

組合せ R, 四面体方程式と多状態 TASEP

東大総合文化 国場敦夫 (Atsuo Kuniba)
 Graduate School of Arts and Sciences, University of Tokyo
 東大理 丸山翔也 (Shouya Maruyama)
 Department of Science, University of Tokyo
 阪市大理 尾角正人 (Masato Okado)
 Department of Science, Osaka City University

1 はじめに

非平衡物理学の文脈で, 様々なタイプの確率過程が, 非平衡系のモデルとして研究されている. その中でも, 最も簡単なモデルの一つに Totally Asymmetric Simple Exclusion Process (TASEP) がある. このモデルは, 可積分性を示すことでも知られ, 様々な物理量を厳密に計算できる. 本稿では, このモデルの定常分布の行列積的表示 ([1]) の構成法を二つ紹介する. 一つは, 組合せ R を用いる方法で, もう一つは, 四面体方程式 (Yang-Baxter 方程式の三次元でのアナロジー) を用いる方法である. これらの方法は, 単にモデルの定常分布の表示が得られるというだけでなく, モデルの背後にある可積分的構造を明らかにするという意味でも, 興味深い.

1 章で, TASEP モデルの導入をする. 2 章において組合せ R による定常分布の構成を述べ, 3 章において四面体方程式による方法の概略を紹介する.

2 n -TASEP

2.1 定義

n, L を任意の自然数とする. 周期的に並んだ L サイトを考える. 各サイト $i \in \mathbb{Z}_L$ は, 状態 $\sigma_i \in \{0, \dots, n\}$ をとるものとする. 系のとりうる配置全体は $\Omega = \{0, \dots, n\}^L$. 写像 $\tau_i : \Omega \rightarrow \Omega$ ($i = 1, \dots, L$) を

$$\tau_i : (\sigma_1, \dots, \sigma_L) \rightarrow (\sigma'_1, \dots, \sigma'_L)$$

$$(\sigma'_i, \sigma'_{i+1}) = \begin{cases} (\sigma_{i+1}, \sigma_i) & (\sigma_i > \sigma_{i+1}) \\ (\sigma_i, \sigma_{i+1}) & (\sigma_i \leq \sigma_{i+1}) \end{cases} \quad \sigma'_j = \sigma_j \quad (j \neq i, i+1),$$

と定める. Ω 上に, 各 τ_i ($i = 1, \dots, L$) が独立にレート 1 (微小時間 dt の間に確率 dt) で発生するという確率的時間発展を定める. このような Ω 上の確率過程を (周期境界条件の) n -species Totally Asymmetric Simple Exclusion Process (n -TASEP) と呼ぶ.

時刻 t で配置 $\sigma \in \Omega$ をとる確率を $\mathbb{P}(\sigma; t)$ とおく. $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle$ を独立なベクトルの組とする. $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in \Omega$ に対して, $|\sigma\rangle = |\sigma_1, \dots, \sigma_L\rangle := |\sigma_1\rangle \otimes \dots \otimes |\sigma_L\rangle$ とおく. これを用いて, 時刻 t での確率ベクトルを次のように定める.

$$|P(t)\rangle = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in \{0, \dots, n\}^L} \mathbb{P}(\sigma_1, \dots, \sigma_L; t) |\sigma_1, \dots, \sigma_L\rangle.$$

確率ベクトルを用いると時間発展を次のように記述できる.

$$\frac{d}{dt} |P(t)\rangle = H |P(t)\rangle, \quad H = \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} (\tau_i - 1). \quad (1)$$

ただし, $\tau_i|\sigma\rangle = |\tau_i\sigma\rangle$ とする. 一般の離散状態の確率過程に対して, このような方程式をマスター方程式, H をマルコフ行列などと呼ぶ. H は

$$H = \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} h_{i,i+1}, \quad h|\alpha, \beta\rangle = \begin{cases} |\beta, \alpha\rangle - |\alpha, \beta\rangle & (\alpha > \beta), \\ 0 & (\alpha \leq \beta), \end{cases}$$

と表すこともできる. ここで, $h_{i,i+1}$ は i 番目と $i+1$ 番目の成分に h で, 他の成分に 1 で作用するものとする. $\mathbf{m} = (m_0, \dots, m_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{n+1}$, $m_0 + \dots + m_n = L$ に対し,

$$S(\mathbf{m}) = \left\{ \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in \{0, \dots, n\}^L \mid \sum_{j=1}^L \delta_{k, \sigma_j} = m_k, \forall k \right\},$$

とおく. n -TASEP の時間発展は $S(\mathbf{m})$ で閉じている. つまり, H の作用は各セクター $\bigoplus_{\sigma \in S(\mathbf{m})} \mathbb{C}|\sigma\rangle$ で閉じている. $m_i = 0$ なる i があるとき, サイト状態のラベルを取り替えることで, $(n-1)$ -TASEP と見なせるので, 以下, $m_i \geq 1$ $i = 0, \dots, n$ なるセクターのみ考える.

2.2 定常状態

確率ベクトル $|\bar{P}\rangle$ が $H|\bar{P}\rangle = 0$ を満たすとき, 定常という. 実際, このとき, (1) から $|\bar{P}\rangle$ は時間変化しない. Perron-Frobenius の定理から次のことがわかる.

Proposition 2.1. 各セクター $S(\mathbf{m})$ 毎に, 定常な確率ベクトル $|\bar{P}(\mathbf{m})\rangle$ が一意に存在する.

Example 2.2.

$$\begin{aligned} |\bar{P}(1, 1, 1)\rangle &= 2|012\rangle + |021\rangle + |102\rangle + 2|120\rangle + 2|201\rangle + |210\rangle, \\ |\bar{P}(2, 1, 1)\rangle &= 3|0012\rangle + |0021\rangle + 2|0102\rangle + 3|0120\rangle + 2|0201\rangle + |0210\rangle + |1002\rangle \\ &\quad + 2|1020\rangle + 3|1200\rangle + 3|2001\rangle + 2|2010\rangle + |2100\rangle, \\ |\bar{P}(1, 2, 1)\rangle &= 2|0112\rangle + |0121\rangle + |0211\rangle + |1012\rangle + |1021\rangle + |1102\rangle + 2|1120\rangle \\ &\quad + 2|1201\rangle + |1210\rangle + 2|2011\rangle + |2101\rangle + |2110\rangle. \end{aligned}$$

3 組合せ R と n -TASEP

3.1 節, 3.2 節では, 組合せ R の定義と必要な性質について準備する. 3.3 節では, TASEP について必要な結果を準備する. 3.4 節において, TASEP の定常分布の行列積表示の構成を行う.

3.1 $U_q(\widehat{sl}_L)$ の反対称表現

量子群 $U_q = U_q(\widehat{sl}_L)$ は, 生成子 e_i, f_i, k_i^{\pm} ($i \in \mathbb{Z}_L$) を持つ代数で, その基本関係式は

$$\begin{aligned} k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1, \quad [k_i, k_j] = 0, \quad k_i e_j = q^{a_{i,j}} e_j k_i, \quad k_i f_j = q^{-a_{i,j}} f_j k_i, \quad [e_i, f_j] = \delta_{i,j} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ e_i^2 e_j - (q + q^{-1}) e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0, \quad f_i^2 f_j - (q + q^{-1}) f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0 \quad (i - j \equiv \pm 1 \pmod{L}). \end{aligned}$$

余積 $\Delta: U_q \rightarrow U_q \otimes U_q$ を

$$\Delta e_i = e_i \otimes 1 + k_i \otimes e_i, \quad \Delta f_i = 1 \otimes f_i + f_i \otimes k_i, \quad \Delta k_i^{\pm} = k_i^{\pm} \otimes k_i^{\pm}.$$

とおく.

l を $0 < l < L$ なる整数とする. U_q の l -反対称表現を次のように定める. まず, 表現空間として,

$$V^l = \bigoplus_{\mathbf{b} \in B^l} \mathbb{C}|\mathbf{b}\rangle, \quad B^l = \{\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_L) \in \{0, 1\}^L \mid |\mathbf{b}| := b_1 + \dots + b_L = l\}$$

をとる. この空間の上の作用 $\phi_x : U_q \rightarrow \text{End}(V^l)$ (x はパラメータ) は,

$$\phi_x(e_i)|\mathbf{b}\rangle = x^{\delta_{i,0}}|\mathbf{b} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}\rangle, \quad \phi_x(f_i)|\mathbf{b}\rangle = x^{-\delta_{i,0}}|\mathbf{b} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}\rangle, \quad \phi_x(k_i^\pm)|\mathbf{b}\rangle = q^{\pm(b_i - b_{i+1})}|\mathbf{b}\rangle.$$

ここで, $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, $i \in \mathbb{Z}_L$. e, f の作用から, この表現は既約.

整数 $0 < l, m < L$ に対して, $\Delta_{x,y} := (\phi_x \otimes \phi_y)\Delta$ は $V^l \otimes V^m$ 上の表現であり, generic な $z := x/y$ に対して, 既約となることが知られている. 量子 R 行列 $\mathcal{R}(z) = \mathcal{R}^{l,m}(z) : V^l \otimes V^m \rightarrow V^m \otimes V^l$ とは,

$$\Delta_{x,y}(g)\mathcal{R}(z) = \mathcal{R}(z)\Delta_{y,x}(g), \quad g \in U_q,$$

を満たす線形同形 (intertwiner) であり, l, m に対し, 規格化を除いて, 一意に存在することが知られている. 次のように規格化しておく,

$$\mathcal{R}(z)(|e_{\leq l}\rangle \otimes |e_{\leq m}\rangle) = \rho(z)|e_{\leq l}\rangle \otimes |e_{\leq m}\rangle, \quad \rho(z) = \prod_{i=(l+m-L)_+}^{\min(l,m)-1} (1 - (-1)^{l+m} q^{l+m-2i} z),$$

ここで, $(m)_+ = \max(m, 0)$, $|e_{\leq l}\rangle = \overbrace{|1, \dots, 1, 0, \dots, 0\rangle}^l \in V^l$.

$\mathcal{R}(z)$ の行列成分を次のように表す.

$$\mathcal{R}(z)(|i\rangle \otimes |j\rangle) = \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \mathcal{R}(z)_{i\mathbf{j}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} |\mathbf{b}\rangle \otimes |\mathbf{a}\rangle.$$

Example 3.1. $L = 3, l = 1, m = 2$ とする. $U_q(\widehat{sl}_3)$ に対し, $\mathcal{R}^{1,2}(z)$ の 0 でない成分は,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(z)_{100,110}^{100,110} &= \mathcal{R}(z)_{010,110}^{010,110} = \mathcal{R}(z)_{100,101}^{100,101} \\ &= \mathcal{R}(z)_{001,101}^{001,101} = \mathcal{R}(z)_{010,011}^{010,011} = \mathcal{R}(z)_{001,011}^{001,011} = 1 + q^3 z, \\ \mathcal{R}(z)_{001,110}^{001,110} &= \mathcal{R}(z)_{010,101}^{010,101} = \mathcal{R}(z)_{100,011}^{100,011} = q(1 + qz), \\ \mathcal{R}(z)_{010,101}^{001,110} &= \mathcal{R}(z)_{100,011}^{010,101} = z\mathcal{R}(z)_{001,110}^{100,011} = -q(1 - q^2)z, \\ \mathcal{R}(z)_{100,011}^{001,110} &= z\mathcal{R}(z)_{001,110}^{010,101} = z\mathcal{R}(z)_{010,101}^{100,011} = (1 - q^2)z. \end{aligned}$$

$\mathcal{R}(z)$ は Yang-Baxter 方程式を満たすことも知られている. つまり, 整数 $1 < k, l, m < L$ に対して,

$$(\mathcal{R}^{l,m}(z) \otimes 1)(1 \otimes \mathcal{R}^{k,m}(zz'))(\mathcal{R}^{k,l}(z) \otimes 1) = (1 \otimes \mathcal{R}^{k,l}(z))(\mathcal{R}^{k,m}(zz') \otimes 1)(1 \otimes \mathcal{R}^{l,m}(z)).$$

3.2 組合せ R

$U_q(\widehat{sl}_L)$ の反対称表現の組合せ R を $R := \mathcal{R}(z=1)|_{q=0}$ と定める. R は $\{|i\rangle \otimes |j\rangle \mid i \in B^l, j \in B^m\}$ から $\{|\mathbf{b}\rangle \otimes |\mathbf{a}\rangle \mid \mathbf{a} \in B^l, \mathbf{b} \in B^m\}$ への全単射になることが知られている.

Example 3.2. Example 3.1 で $q = 0, z = 1$ とすると, $R^{1,2} : B^1 \otimes B^2 \rightarrow B^2 \otimes B^1$ は

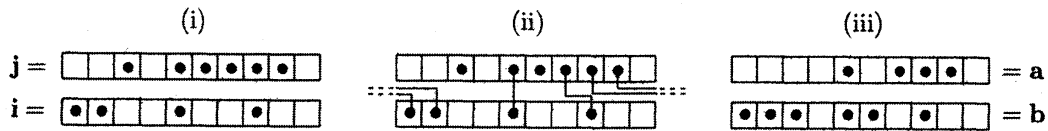
$$\begin{aligned} 100 \otimes 110 &\mapsto 110 \otimes 100, & 100 \otimes 101 &\mapsto 101 \otimes 100, & 100 \otimes 011 &\mapsto 110 \otimes 001, \\ 010 \otimes 110 &\mapsto 110 \otimes 010, & 010 \otimes 101 &\mapsto 011 \otimes 100, & 010 \otimes 011 &\mapsto 011 \otimes 010, \\ 001 \otimes 110 &\mapsto 101 \otimes 010, & 001 \otimes 101 &\mapsto 101 \otimes 001, & 001 \otimes 011 &\mapsto 011 \otimes 001. \end{aligned}$$

R の行列成分の言葉を使えば、各 $i \otimes j \in B^l \otimes B^m$ について、 $R_{i,j}^{a,b}$ は、ただ一つの $b \otimes a \in B^m \otimes B^l$ に対して1, それ以外すべてで0, ということになる。

与えられた $i \otimes j \in B^l \otimes B^m$ に対して、 $b \otimes a = R(i \otimes j) \in B^m \otimes B^l$ を求めるアルゴリズムが知られている [6]. これを中屋敷-山田ルール (NYルール) と呼ぶ。

NYルール ($l < m$):

(i) $i \otimes j \in B^l \otimes B^m$ を1をドット, 0を空箱としてタプローで表す. このタプローを i が下に, j が上になるよう並べて書く. 下の例は $i \otimes j = 1100100100 \otimes 0010111110 \in B^4 \otimes B^6$:



(ii-1) i のドットを任意の一つとる (これを d と呼ぶ). これを j のドットで d の真上か左にあるのものの中で, 最も近いもの (d' と呼ぶ) と結ぶ. このとき, タプローの左端と右端を同一視し (周期境界条件), そのような d' がないときは, 上段のドットの中で最も右にあるものと結ぶ.

(ii-2) 両段のすでにつながれているドットは無視し, 残ったドットに対し, (ii-1) を繰り返す.

(iii) $m - l$ 個の j のつながれていないドットを下段にシフトすることで, $b \otimes a$ が得られる. 上の例では, $b \otimes a = 1110110100 \otimes 0000101110 \in B^6 \otimes B^4$.

Remark 3.3. ステップ (ii) で, i のドットを選ぶ順番は一意ではない. しかし, 最終的な結果はそれに依らない [6].

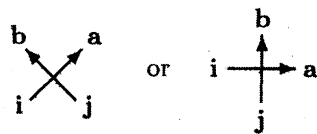
上のNYルールで b は, i にドットを加えることで得られ, a は, j からドットを取り除くことで得られるので, 次がわかる.

Lemma 3.4.

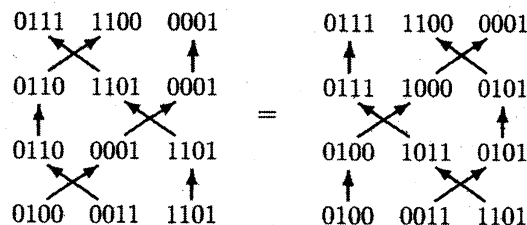
$$R(i \otimes j) = b \otimes a \Rightarrow i \leq b \text{ かつ } a \leq j,$$

ここで, $x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff} y - x \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^L$ ($x, y \in \mathbb{Z}^L$).

関係式 $R(i \otimes j) = b \otimes a$ を次のように図で表すことにする.



Example 3.5. Yang-Baxter 方程式を $0100 \otimes 0011 \otimes 1101 \in B^1 \otimes B^2 \otimes B^3$ に適用すると,



= は最下段の三つの入力に対して, 最上段の三つの出力が一致するという意味.

R には、フォック空間上の作用素による行列積表示が知られている。これを述べるため、いくつか記号の準備をする。まず、フォック空間 $F = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}|m\rangle$ 上の $q=0$ -振動子を次のように定義する。

$$\mathbf{a}^+|m\rangle = |m+1\rangle, \quad \mathbf{a}^-|m\rangle = (1 - \delta_{m,0})|m-1\rangle, \quad \mathbf{k}|m\rangle = \delta_{m,0}|m\rangle. \quad (2)$$

$\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^-, \mathbf{k}$ で生成される代数を $\mathcal{A}_{q=0}$ とおく。 $F^* = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}\langle m|$ とし、 F と F^* の pairing を $\langle m|m'\rangle = \delta_{m,m'}$ と定める。 $X \in \mathcal{A}_{q=0}$ に対して、(右辺が収束するとき) $\text{Tr}(X) = \sum_{m \geq 0} \langle m|X|m'\rangle$ とする。 $V = \mathbb{C}|0\rangle \oplus \mathbb{C}|1\rangle$ とし、 $V \otimes V \otimes F$ 上の作用素 $L = (L_{i,j}^{a,b})$, $L(|i,j\rangle \otimes |\chi\rangle) = \sum_{a,b} \Sigma_{a,b} |a,b\rangle \otimes L_{i,j}^{a,b} |\chi\rangle$ ($i, j, a, b = 0, 1$) を次のようにおく。

$$L_{i,j}^{a,b} = i \begin{array}{c} b \\ \uparrow \\ \hline \rightarrow a \\ \downarrow \\ j \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \hline \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ \hline \rightarrow 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ \hline \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \hline \rightarrow 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ \hline \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \quad (3)$$

これら以外の $L_{i,j}^{a,b}$ は 0。

Proposition 3.6. [5]

$$R_{i,j}^{a,b} = \text{Tr}(L_{i_1, j_1}^{a_1, b_1} \cdots L_{i_L, j_L}^{a_L, b_L}). \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_L) \in B^L$ など。

3.3 Ferrari-Martin の結果

この節で、 n -TASEP の定常分布を組合せ R の言葉で記述するための Ferrari-Martin の結果 [2] を述べる。

まず、記号を用意する。 n -TASEP のセクター $S(\mathbf{m})$ を定めた $\mathbf{m} = (m_0, \dots, m_n)$ に対して、自然数列 $0 < l_1 < \dots < l_n < L$ を次のようにおく。

$$l_i = m_{n-i+1} + \dots + m_{n-1} + m_n \quad (1 \leq i \leq n).$$

以下のような集合と写像を導入する。

$$B(\mathbf{m}) = B^{l_1} \otimes \dots \otimes B^{l_n} = \{\mathbf{b}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_n \mid \mathbf{b}_j \in B^{l_j}\},$$

$$B_+(\mathbf{m}) = \{\mathbf{b}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_n \in B(\mathbf{m}) \mid \mathbf{b}_1 \leq \dots \leq \mathbf{b}_n\} \subset B(\mathbf{m}).$$

$$\varphi: S(\mathbf{m}) \rightarrow B_+(\mathbf{m}); \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_L) \mapsto \varphi_1(\sigma) \otimes \dots \otimes \varphi_n(\sigma),$$

$$\varphi_j(\sigma) = (\theta(\sigma_1 \geq n+1-j), \dots, \theta(\sigma_L \geq n+1-j)) \in B^{l_j}.$$

ここで、 θ は真偽関数 ($\theta(\text{true}) = 1$, $\theta(\text{false}) = 0$)。下の例からすぐわかるように、 φ は全単射であり、

$$\varphi^{-1}(\mathbf{b}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_n) = \mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{b}_n.$$

特に、

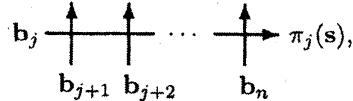
$$\sigma = \varphi^{-1}(\varphi(\sigma)) = \varphi_1(\sigma) + \dots + \varphi_n(\sigma) \quad (\sigma \in S(\mathbf{m})).$$

Example 3.7. $n = 3$, $\mathbf{m} = (2, 2, 1, 2)$ の場合を考える。 $\sigma = (3, 0, 1, 2, 3, 0, 1) \in S(\mathbf{m})$ ととると、 $\varphi(\sigma) = \varphi_1(\sigma) \otimes \varphi_2(\sigma) \otimes \varphi_3(\sigma) \in B_+(\mathbf{m}) \subset B^2 \otimes B^3 \otimes B^5$ は以下ようになる。

σ	3 0 1 2 3 0 1
$\varphi_3(\sigma)$	1 0 1 1 1 0 1
$\varphi_2(\sigma)$	1 0 0 1 1 0 0
$\varphi_1(\sigma)$	1 0 0 0 1 0 0

前節で定義した組合せ R を用いて、次のような写像を導入する。

$$\pi_j : B(\mathbf{m}) \rightarrow B^{l_j}; \quad \mathbf{s} = \mathbf{b}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_n \mapsto \pi_j(\mathbf{s}) \quad (1 \leq j \leq n)$$



ここで、頂点は R の作用を表す。

Remark 3.8. $\pi_j(\mathbf{b}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_n)$ は $\mathbf{b}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_n$ のみに依存する。特に、 $\pi_n(\mathbf{b}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_n) = \mathbf{b}_n$ 。

Lemma 3.9.

$$\pi_1(\mathbf{s}) \otimes \cdots \otimes \pi_n(\mathbf{s}) \in B_+(\mathbf{m})$$

Proof. $P_2(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ とおく。NY ルールにおいて、 $P_2(R(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}))$ ($\mathbf{a} \in B^{l_1}$, $\mathbf{b} \in B^{l_2}$, $l_1 < l_2$) のドットは、 \mathbf{b} のドットで \mathbf{a} に捕まったものであった。よって、 $\mathbf{a}_1 \in B^{l_1}$, $\mathbf{a}_2 \in B^{l_2}$, $\mathbf{b} \in B^m$, $l_1 \leq l_2 < m$ について

$$\mathbf{a}_1 \leq \mathbf{a}_2 \Rightarrow P_2(R(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b})) \leq P_2(R(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b})). \quad (*)$$

$\mathbf{s} = \mathbf{b}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_n$ に対して、

$$\pi_j(\mathbf{s}) = P_2(R(P_2(\cdots R(P_2(R(\mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_{j+1}))) \otimes \mathbf{b}_{j+2}) \cdots) \otimes \mathbf{b}_n)$$

$$\pi_{j+1}(\mathbf{s}) = P_2(R(P_2(\cdots R(\mathbf{b}_{j+1} \otimes \mathbf{b}_{j+2}) \cdots) \otimes \mathbf{b}_n)).$$

Lemma 3.4 より下線部は

$$P_2(R(\mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_{j+1})) \leq \mathbf{b}_{j+1}.$$

よって、(*) が使え、 $\pi_j(\mathbf{s}) \leq \pi_{j+1}(\mathbf{s})$. □

この Lemme から、 $\pi : B(\mathbf{m}) \rightarrow S(\mathbf{m})$ を次のように定めることができる。

$$\pi : B(\mathbf{m}) \rightarrow S(\mathbf{m}); \quad \pi(\mathbf{s}) = \varphi^{-1}(\pi_1(\mathbf{s}) \otimes \cdots \otimes \pi_n(\mathbf{s})) = \pi_1(\mathbf{s}) + \cdots + \pi_n(\mathbf{s}).$$

以上の準備のもと、Ferrari-Martin の結果は次のように述べられる。

Proposition 3.10. [2, 3] 写像 $T_i : B(\mathbf{m}) \rightarrow B(\mathbf{m})$ ($i = 1, \dots, L$) が存在して、次の図を可換にする：

$$\begin{array}{ccc} B(\mathbf{m}) & \xrightarrow{T_i} & B(\mathbf{m}) \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ S(\mathbf{m}) & \xrightarrow{\tau_i} & S(\mathbf{m}). \end{array}$$

T_i の具体形は、ここでは用いない。

$B(\mathbf{m})$ 上に遷移 T_i が独立にレート 1 で発生するという確率過程を定める。この確率過程を multi-line process と呼ぶことにする。マルコフ行列は

$$H_{ML} = \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} (T_i - 1)$$

と書ける。

Proposition 3.11. [2] multi-line process の定常分布は一様分布:

$$H_{ML} \sum_{\mathbf{s} \in B(\mathbf{m})} |\mathbf{s}\rangle = 0.$$

上の二つの Proposition から次が得られる。

Proposition 3.12. n -TASEP のセクター $S(\mathbf{m})$ における定常分布は次で得られる。

$$\begin{aligned} |\bar{P}(\mathbf{m})\rangle &= \sum_{\mathbf{s} \in B(\mathbf{m})} |\pi(\mathbf{s})\rangle = \sum_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in S(\mathbf{m})} \mathbb{P}(\sigma) |\sigma\rangle, \\ \mathbb{P}(\sigma) &= \#\{\mathbf{s} \in B(\mathbf{m}) \mid \pi(\mathbf{s}) = \sigma\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Proof. Proposition 3.10 から

$$H_{ML} \pi = \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} (T_i - 1) \pi = \pi \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} (\tau_i - 1) = \pi H.$$

よって

$$H(\pi(\sum_{\mathbf{s} \in B(\mathbf{m})} |\mathbf{s}\rangle)) = \pi(H_{ML}(\sum_{\mathbf{s} \in B(\mathbf{m})} |\mathbf{s}\rangle)) \stackrel{\text{Proposition 3.11}}{=} 0.$$

□

π の定義より

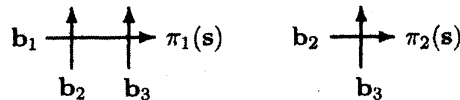
$$\mathbb{P}(\sigma) = \#\{\mathbf{s} \in B(\mathbf{m}) \mid \pi_k(\mathbf{s}) = \varphi_k(\sigma) \ (1 \leq k \leq n)\} \tag{6}$$

とも書ける。

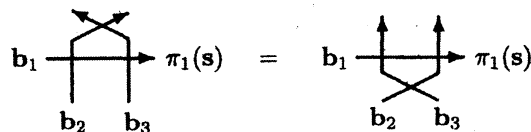
3.4 行列積表示

この節で、 n -TASEP の定常分布の行列積表示を構成する。 $n = 3$ の例に則して説明するが、一般の場合も同様に議論できる。

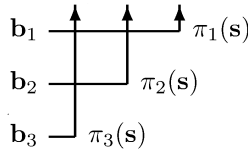
$\mathbf{s} = \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_3 \in B(\mathbf{m}) = B^{l_1} \otimes B^{l_2} \otimes B^{l_3}$ に対して、 π_1, π_2 は



と書けた。 $\pi_1(\mathbf{s})$ の図に Yang-Baxter 方程式を用いると



この右辺の図には、 $\pi_1(s), \pi_2(s), \pi_3(s)(= b_3)$ が同時に現れており、少し変形してやると、次のように書ける。



この図と (6) より、 n -TASEP の定常分布を

$$\mathbb{P}(\sigma) = \sum_{b_1 \otimes b_2 \otimes b_3 \in B(m)} \begin{array}{c} b_1 \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \varphi_1(\sigma) \\ | \quad | \quad | \\ b_2 \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \varphi_2(\sigma) \\ | \quad | \\ b_3 \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \varphi_3(\sigma) \end{array} \quad (7)$$

と表せる。右辺の和の中の図は、 $\sigma \in S(m)$ に応じて固定された角に、整合していれば 1、そうでなければ 0、という意味で用いている。この各頂点に Proposition 3.6 を用いると、各 R の頂点は L 層の (3) に分解し、

$$\mathbb{P}(\sigma) = \text{Tr}_{F^{\otimes 3}}(X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_L}),$$

ここで、 $X_\alpha \in \text{End}(F^{\otimes 3})$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$ は

$$X_0 = \sum \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \quad X_1 = \sum \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 1 \quad 0 \end{array} \quad X_2 = \sum \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 0 \end{array} \quad X_3 = \sum \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

ただし、各頂点は (3) であり、和は、固定された角のエッジ以外のすべてのエッジについての 0, 1 の和。

Example 3.13. 0 のエッジを黒、1 のエッジをグレーで表すと：

$$\begin{aligned} X_0 &= \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 1 \quad 0 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 0 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \\ &= 1 \otimes 1 \otimes 1 + a^+ \otimes 1 \otimes 1 + k \otimes a^+ \otimes 1 + a^- \otimes a^+ \otimes a^+ + 1 \otimes a^+ \otimes a^+, \\ X_1 &= \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 1 \quad 0 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 0 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \\ &= k \otimes k \otimes 1 + a^- \otimes k \otimes a^+ + 1 \otimes k \otimes a^+, \\ X_2 &= \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 0 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \\ &= 1 \otimes a^- \otimes k + a^+ \otimes a^- \otimes k + k \otimes 1 \otimes k, \\ X_3 &= \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ | \quad | \quad | \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \\ &= 1 \otimes a^- \otimes a^- + a^+ \otimes a^- \otimes a^- + k \otimes 1 \otimes a^- + a^- \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

テンソル積の順番は、左上、左下、右上の順。

Theorem 4.2. 次の $X_\alpha, \hat{X}_\alpha \in \text{End}(F^{\otimes n(n-1)/2})$ ($\alpha = 0, \dots, n$) は, (10), (11) を満たす.

$$X_\alpha = \sum \left[\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \dots \uparrow \\ \uparrow \uparrow \dots \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \uparrow \dots \uparrow \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \end{array} \right]_{\alpha, n-\alpha} \quad \hat{X}_\alpha = \sum (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \left[\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \dots \uparrow \\ \uparrow \uparrow \dots \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \uparrow \dots \uparrow \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \end{array} \right]_{\alpha, n-\alpha}$$

Remark 4.3. 上の定理の X_α は, 2章のものと同じ. よって Proposition 4.1 から Theorem 3.14 が従う.

4.2 層転送行列

フォック空間 F 上の q -振動子 a^+, a^-, k を

$$a^+|m\rangle = |m+1\rangle, \quad a^-|m\rangle = (1-q^{2m})|m-1\rangle, \quad k|m\rangle = (-q)^m|m\rangle.$$

と定める. これは, (2) の q 変形である. これを用いて, 3D L 作用素 $\mathcal{L}(z) = (\mathcal{L}_{i,j}^{a,b}(z))_{i,j,a,b \in \{0,1\}} \in \text{End}(V \otimes V \otimes F)$ を

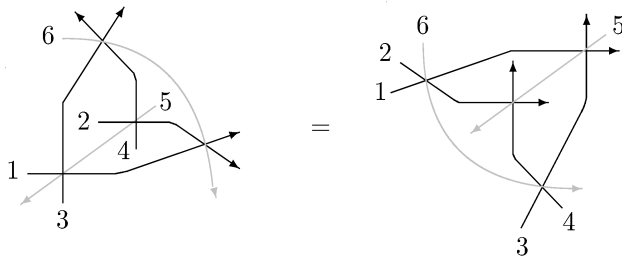
$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} b \\ \uparrow \\ i \rightarrow a \\ \downarrow \\ j \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ 0 \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 1 \rightarrow 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 1 \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ 0 \rightarrow 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 0 \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ 1 \rightarrow 1 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \\ \mathcal{L}_{i,j}^{a,b}(z) & 1 & 1 & za^+ & z^{-1}a^- & k & qk \end{array} \quad (12)$$

と定める (他は 0). $q=0, z=1$ とすると, (3) になる. $\mathcal{M}(z) := \mathcal{L}(z)|_{q \rightarrow -q}$ とおく.

Theorem 4.4. $V^{\otimes 4} \otimes F^{\otimes 2}$ 上の作用素として次の方程式が成り立つ:

$$\mathcal{M}(z_{12})_{126} \mathcal{M}(z_{34})_{346} \mathcal{L}(z_{13})_{135} \mathcal{L}(z_{24})_{245} = \mathcal{L}(z_{24})_{245} \mathcal{L}(z_{13})_{135} \mathcal{M}(z_{34})_{346} \mathcal{M}(z_{12})_{126}, \quad (13)$$

ここで, $z_{ij} = z_i/z_j$. この式は, 下図のように表せる. ここで, V を黒線, F をグレーの線で表している.



$\forall m, n \in \mathbb{N}$ を固定する. $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m), \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \{0, 1\}^m$ と $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ に対して, $T(z)_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{\mathbf{a}\mathbf{b}} \in \text{End}(F^{\otimes mn})$ を次で定める.:

$$T(z)_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \left[\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \dots \uparrow \\ \uparrow \uparrow \dots \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \uparrow \dots \uparrow \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \\ \downarrow \downarrow \dots \downarrow \end{array} \right]_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{a}, \mathbf{b}}$$

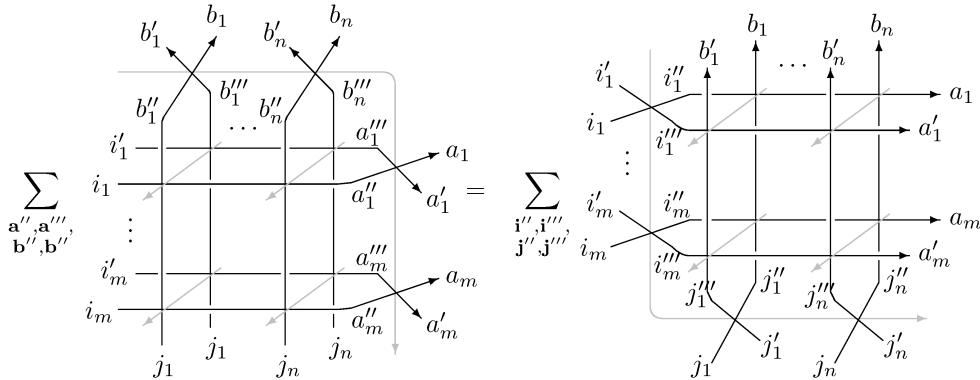
ここで、各頂点は (12) であり、和は内部のエッジすべてについての 0, 1 の和。 $T(z)_j^a := \sum_{i,b} T_L(z)_{ij}^{a,b}$ とおく。

四面体方程式から次の関係式が得られる：

$$\sum_{a'',a''',b'',b'''} (\mathcal{M}_{a''_m a'''_m}^{a''_m a'''_m}(\frac{x}{x'}) \cdots \mathcal{M}_{a''_1 a'''_1}^{a''_1 a'''_1}(\frac{x}{x'})) (\mathcal{M}_{b''_n b'''_n}^{b''_n b'''_n}(\frac{y}{y'}) \cdots \mathcal{M}_{b''_1 b'''_1}^{b''_1 b'''_1}(\frac{y}{y'})) T(\frac{x}{y})_{i_j}^{a'' b''} T(\frac{x'}{y'})_{i'_j}^{a''' b'''}$$

$$= \sum_{i'',i''',j'',j'''} T(\frac{x'}{y'})_{i''_j}^{a'' b''} T(\frac{x}{y})_{i'''_j}^{a''' b'''} (\mathcal{M}_{j''_n j'''_n}^{j''_n j'''_n}(\frac{y}{y'}) \cdots \mathcal{M}_{j''_1 j'''_1}^{j''_1 j'''_1}(\frac{y}{y'})) (\mathcal{M}_{i''_m i'''_m}^{i''_m i'''_m}(\frac{x}{x'}) \cdots \mathcal{M}_{i''_1 i'''_1}^{i''_1 i'''_1}(\frac{x}{x'})). \quad (14)$$

つまり、



これは、まず、左辺の右上の角に四面体方程式を適用する。カーブした F の線 (グレーの線) は、三回カーブした形になる。新たにできた角に、次々に四面体方程式を適用して、北と東を回っていたグレーの線を西と南まで引き抜いてやると右辺になる。

4.3 T の bilinear-relation

(14) から次の T の間の関係式が導かれる。

Theorem 4.5. $\forall \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \{0, 1, 2\}^m, \forall \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \{0, 1, 2\}^n$ に対して、

$$\sum_{\substack{a,a',j,j' \\ a+a'=s, j+j'=r}} x^{|a|+|j|} y^{|a'|+|j'|} T(x)_j^a T(y)_j^{a'} = (x \longleftrightarrow y). \quad (15)$$

実は、この関係式が n -TASEP の hat-relation を含んでいる。実際、 $\mathbf{s} = (0, 0, \dots, 0), \mathbf{r} = (0, 0, \dots, 0)$ ととってやると、上の定理は次の形になる。

Corollary 4.6.

$$[T(x)_{0 \dots 0}^{0 \dots 0}, T(y)_{0 \dots 0}^{0 \dots 0}] = 0.$$

この式で、 $m = n, q = 0$ などとおいてやると、(11) に帰着する。次に、 $\mathbf{s} = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{r} = (1, 0, \dots, 0)$ ととってやると、

Corollary 4.7.

$$x^2 T(y)_{00 \dots 0}^{00 \dots 0} T(x)_{10 \dots 0}^{10 \dots 0} + yx T(y)_{10 \dots 0}^{00 \dots 0} T(x)_{00 \dots 0}^{10 \dots 0} + yx T(y)_{00 \dots 0}^{10 \dots 0} T(x)_{10 \dots 0}^{00 \dots 0} + y^2 T(y)_{10 \dots 0}^{10 \dots 0} T(x)_{00 \dots 0}^{00 \dots 0} = (x \longleftrightarrow y).$$

この式が、(10) に帰着する。

参考文献

- [1] B. Derrida, M.R. Evans, V.Hakim and V. Pasquier, Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993) 1493–1517.
- [2] P. A. Ferrari and J. B. Martin, Stationary distributions of multi-type totally asymmetric exclusion processes, *Ann. Probab.* **35** (2007) 807–832.
- [3] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and combinatorial R , *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** (2015) 34FT02 (19pp).
- [4] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies TASEP and the tetrahedron equation, [arXiv:1509.09018](https://arxiv.org/abs/1509.09018).
- [5] A. Kuniba, M. Okado and S. Sergeev, Tetrahedron equation and generalized quantum groups, to appear in *J. Phys. A: Math. Theor.* ([arXiv:1503.08536](https://arxiv.org/abs/1503.08536)).
- [6] A. Nakayashiki and Y. Yamada, Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models, *Selecta Mathematica, New Ser.* **3** (1997) 547–599.
- [7] A. B. Zamolodchikov, *Tetrahedra equations and integrable systems in three-dimensional space*, *Soviet Phys. JETP* **79** (1980) 641–664.