

Domino tilings of Aztec rectangles with connected holes*

Masao Ishikawa[†], Fumihiko Nakano[‡], Taizo Sadahiro[§] and Hiroyuki Tagawa[¶]

2010 Mathematics Subject Classification : Primary 05A15 Secondary 05A10, 05B45, 52C20.

Keywords : domino tiling, Aztec diamond, Laurent biorthogonal polynomials, Hankel determinant.

概要

アステカ正方形のドミノタイリングの場合の数は 2 の $\binom{n+1}{2}$ 乗になるというのは、有名な話で多くの論文がある。ここでは、この問題を拡張して、アステカ長方形に連続した一列の偶数個の穴がある場合に、その領域のドミノタイリングの場合の数をガウス超幾何関数の行列式で表わすことを目標とする。

アステカ正方形のドミノタイリングの場合の数は $2^{\binom{n+1}{2}}$ になるというのは、有名な話で多くの論文 [1, 2, 3, 4, 5, 11] がある。ここでは、この問題を拡張して、アステカ長方形に連続した一列の偶数個の穴がある場合に、その領域のドミノタイリングの場合の数を同様の 2 の冪と、あるガウス超幾何関数の行列式の積で表わされるという結果を得る。また、このガウス超幾何関数の行列式は穴の位置の座標の関数として、monic な多項式であり、面白い性質を持つ。ここで、ドミノタイリングを数える手法は Kasteleyn の方法ではなく、タイリングを Schröder path に置き換えて、Gessel-Viennot の方法 [6, 7, 15] を使う (定理 3.2)。そして、この Gessel-Viennot の方法で得られた行列式を変形して、定理 4.3 で述べる形でドミノタイリングの場合の数を述べるのが、本原稿の目標である。まずは [11] で使われた Laurent biorthogonal polynomials (LBPs) の特別な場合から始める。

1 Laurent biorthogonal polynomials

\mathbb{Z} を整数全体の集合、 \mathbb{N} を非負整数全体の集合とする。

Definition 1.1. 多項式 $P_n(z)$ を初期条件 $P_{-1}(z) = 0, P_0(z) = 1$ と漸化式

$$P_{n+1}(z) = (z - 1)P_n(z) - zP_{n-1}(z) \quad (n \geq 0) \tag{1.1}$$

によって定義する。 $P_n(z)$ は、上岡 [11] に登場する Laurent biorthogonal polynomials (LBPs) $P_n(z)$ において $b_n = c_n = 1$ とおいたものである。

例えば

$$\begin{aligned} P_1(z) &= z - 1 \\ P_2(z) &= z^2 - 3z + 1 \\ P_3(z) &= z^3 - 5z^2 + 5z - 1 \end{aligned}$$

であり、 $n \geq 0$ に対して、 $P_n(0) = (-1)^n$ が成り立つ。

*This work is supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 25400018,26400145,26400149 and 23540017.

[†]Department of Mathematics, University of the Ryukyus, Nishihara, Okinawa 901-0213, Japan, ishikawa@edu.u-ryukyu.ac.jp

[‡]Department of Mathematics, Gakushuin University, 1-5-1, Mejiro, Toshima-ku, Tokyo, 171-8588, Japan. e-mail : fumihiko@math.gakushuin.ac.jp

[§]Department of Mathematics, Tsuda College, Tsudamachi, Kodaira, Tokyo 187-0025, Japan, sadahiro@tsuda.ac.jp

[¶]Department of Mathematics, Wakayama University, Sakaedani, Wakayama 640-8441, Japan, tagawa@center.wakayama-u.ac.jp

Definition 1.2. [11] のように LBPs 上の linear functional \mathcal{F} を

$$\mathcal{F}[P_n(z)z^{-k}] = h_n \delta_{n,k}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (1.2)$$

によって定義する. \mathcal{F} は, 定数を除いて一意的なので, ここでは $\mathcal{F}[1] = 1$ となるように normalize しておく. また, そのモーメントを

$$f_k = \mathcal{F}[z^k], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

と書く.

Proposition 1.3. 数列 $\{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を初期条件 $f(0) = 1$ と,

(i) $n > 0$ のとき

$$f(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} [z^k]P_n(z) \cdot f(k) \quad (1.4)$$

(ii) $n < 0$ のとき

$$f(n) = - \frac{1}{[1]P_{-n+1}(z)} \sum_{k=1}^{-n+1} [z^k]P_{-n+1}(z) \cdot f(k+n) \quad (1.5)$$

によって定義する. ただし, 多項式 $p(z)$ に対して, $[z^k]p(z)$ は $p(z)$ の z^k の係数, $[1]p(z)$ は $p(z)$ の定数項を意味する. このとき,

$$f(n) = f_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ. \square

例えば

$$\begin{aligned} f(1) &= -(-1)f(0) = 1 \\ f(2) &= -\{-3f(1) + f(0)\} = 2 \\ f(3) &= -\{-5f(2) + 5f(1) - f(0)\} = 6 \end{aligned}$$

のように計算していくと

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 6, \quad f(4) = 22, \quad f(5) = 90, \quad f(6) = 394, \dots$$

を得る. また $P_n(0) = (-1)^n$ より

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\{-3f(0) + f(1)\} = 2 \\ f(-2) &= -\{-5f(-1) + 5f(0) - f(1)\} = 6 \end{aligned}$$

のように計算していくと

$$f(0) = 1, \quad f(-1) = 2, \quad f(-2) = 6, \quad f(-3) = 22, \quad f(-4) = 90, \quad f(-5) = 394, \dots$$

を得る.

Definition 1.4. $P_n(z)$ の inverted polynomials $\tilde{P}_n(z)$ を次のように定める.

$$\tilde{P}_n(z) := \frac{z^n P_n(z^{-1})}{P_n(0)} \quad (1.6)$$

Proposition 1.5. $\tilde{P}_n(z) = P_n(z)$, つまり $[z^k]P_n(z) = (-1)^n [z^{n-k}]P_n(z)$ が成り立つ. \square

Proposition 1.6. $f(1-n) = f(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) が成り立つ. \square

Definition 1.7. 数列 $\{f_m(n)\}_{n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}}$ を

$$f_m(n) = \sum_{k=0}^m [z^k] P_m(z) \cdot f(k+n) \quad (1.7)$$

によって定義する. 特に, $f(n) = f_0(n)$ である.

例えば

$$f_1(-1) = f(0) - f(-1) = -1$$

$$f_1(0) = f(1) - f(0) = 0$$

$$f_1(1) = f(2) - f(1) = 1$$

$$f_1(2) = f(3) - f(2) = 4$$

のように計算していくと

$$f_1(-3) = -16, \quad f_1(-2) = -4, \quad f_1(-1) = -1, \quad f_1(0) = 0, \quad f_1(1) = 1, \quad f_1(2) = 4, \quad f_1(4) = 16, \dots$$

を得る. また

$$f_2(-1) = f(1) - 3f(0) + f(-1) = 0$$

$$f_2(0) = f(2) - 3f(1) + f(0) = 0$$

$$f_2(1) = f(3) - 3f(2) + f(1) = 1$$

$$f_2(2) = f(4) - 3f(3) + f(2) = 6$$

のように計算していくと

$$f_2(-2) = 1, \quad f_2(-1) = 0, \quad f_2(0) = 0, \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(2) = 6, \quad f_2(3) = 30, \dots$$

を得る. 次に述べる命題の性質は, [11] の中で述べられていないが, この原稿で出てくる行列式の計算との関係が深いと思われる. しかし, その関係をまだ十分に研究したとはいえない.

Proposition 1.8. $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_m(n) = (-1)^m f_m(1-m-n) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (1.8)$$

が成り立つ. また,

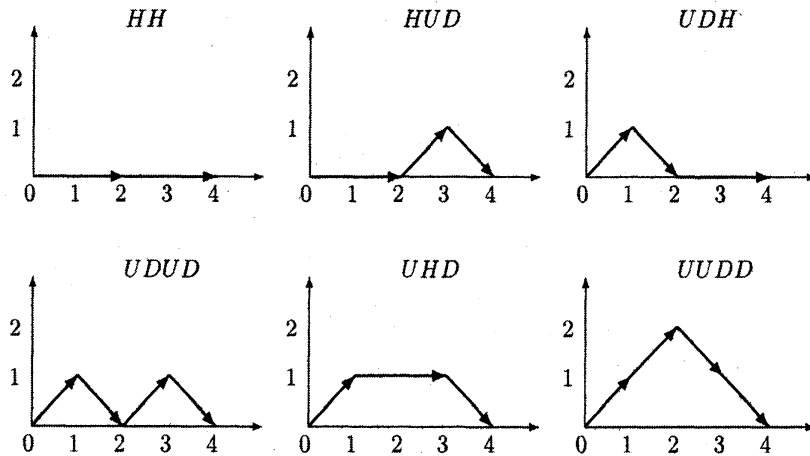
$$f_m(n) = 0 \quad (-m < n < 1), \quad f_m(1) = 1 \quad f_m(-m) = (-1)^m \quad (1.9)$$

である. \square

2 Schröder path

$n \in \mathbb{N}$ とする. $(0, 0)$ から $(2n, 0) \leftarrow H = (2, 0), U = (1, 1), D = (1, -1)$ の 3 種類の step で x -軸の下に行かない経路を Schröder path という. このような path は, 長さ (length) n をもつといい, 長さ n の Schröder path 全体の集合を $S(n)$ と書く. また, $S(n)$ の総数を $S(n)$ と書く. これは, 普通 large Schröder number と言われるものである.

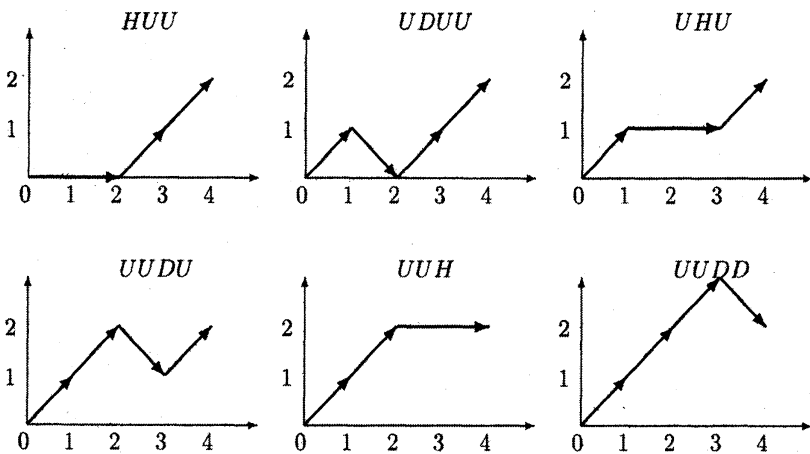
例えば $n = 2$ のときは, 次の 6 つの path で $S(2) = 6$ である.



もう少し計算すると

$$S(0) = 1, \quad S(1) = 2, \quad S(2) = 6, \quad S(3) = 22, \quad S(4) = 90, \quad S(5) = 394, \dots$$

となる。同様にして、 $(0,0)$ から $(2n+m, m)$ へ H, U, D の step で x -軸の下に行かない経路全体の集合を $S_m(n)$ と書く。また、 $S_m(n)$ の総数を $S_m(n)$ と書く。例えば $m=2, n=1$ のとき、 $S_2(1)$ は次の 6 つの経路からなり、 $S_2(1) = 6$ である。



もう少し計算すると

$$S_2(0) = 1, \quad S_2(1) = 6, \quad S_2(2) = 30, \quad S_2(3) = 146, \quad S_2(4) = 714, \dots$$

となる。

Proposition 2.1. $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ のとき

$$f_m(n) = \begin{cases} S_m(n-1) & (n \geq 1) \\ (-1)^m S_m(-m-n) & (n \leq 0) \end{cases} \quad (2.1)$$

が成り立つ。□

Proposition 2.2. $n \in \mathbb{N}$ のときは $S_m(n)$ は、次のような超幾何級数で表わされる。

$$S_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 2 \binom{n+m}{m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n+1, m+n+2; \\ m+2; \end{matrix} -1 \right) & \text{if } n \geq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Proposition 2.3. $m \in \mathbb{N}$ とする。

- (i) $-m \leq n < 0$ のとき, $S_m(n) = 0$ と定義する。
- (ii) $n < -m$ のとき, $S_m(n)$ は, $S_m(n) = (-1)^m S_m(-n-m-1)$ と定義する。

この定義により (2.1) 式は任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つ。□

3 タイリング問題

size が $a \times b$ の Aztec rectangle とは

$$R_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b-2a-1 \leq x+y \leq b+1, -b-1 \leq y-x \leq b+1\}$$

に頂点をもつ正方形格子全体の集合であり, これを $AR_{a,b}$ と書く。ここでは $b = a + r$ とし, r が偶数の場合の tiling の個数を考察する。4 つの頂点 (x, y) , $(x+1, y)$, $(x+1, y+1)$, $(x, y+1)$ からなる正方形を $SQ_{x,y}$ で表すとき, $x+y+b$ が偶数ならば白い正方形, $x+y+b$ が奇数ならば黒い正方形と呼ぶ。domino とは, 正方形 2 つからなる 2×1 または 1×2 の長方形である。



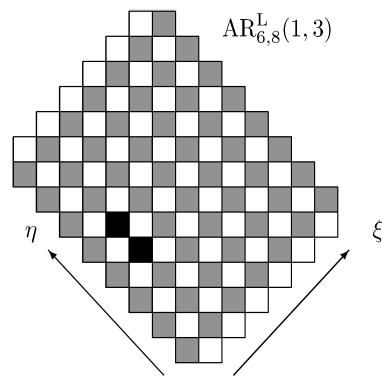
domino tiling とは $AR_{a,b}$ を domino で隙間なく敷き詰めることである。1 つの domino は, 白箱 1 個と黒箱 1 個からなるから domino tiling が存在するためには, 白箱と黒箱の個数が同数でなければならない。ところが $AR_{a,b}$ には白箱が $a(b+1)$ 個, 黒箱が $(a+1)b$ 個あるので, 黒箱が白箱より $b-a = r$ 個多い。よって, $AR_{a,b}$ から $b-a = r$ 個の箱を除いた領域を考える。このとき, r 個の穴は必ず連続した 1 列の並びで取ることになると, これらの 1 列の並びの穴は長い辺に平行か, または短い辺に平行かのいずれかである。そこで, 長い辺に沿って $r = b-a$ 個の穴を 1 列の並びで除いた領域を $AR_{a,b}^L(\xi, \eta)$, 短い辺に沿って $r = b-a$ 個の穴を 1 列の並びで除いた領域を $AR_{a,b}^S(\xi, \eta)$ と書くことにする。ここで (ξ, η) は一番下の穴の座標で, ξ, η は, それぞれ図のように取ることにして, 最も下の箱の座標を $(0, 0)$ としよう。ゆえに, ξ, η の動く範囲は $AR_{a,b}^L(\xi, \eta)$ の場合は

$$0 \leq \xi, \eta \leq a \quad (3.1)$$

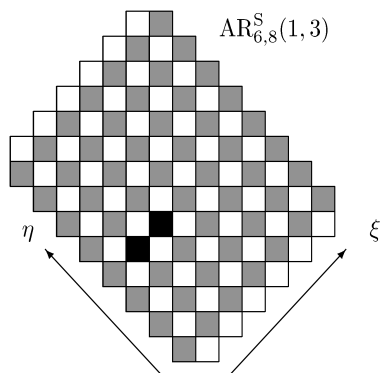
であり, $AR_{a,b}^S(\xi, \eta)$ の場合は

$$0 \leq \xi \leq a-r+1, \quad 0 \leq \eta \leq b-1 = a+r-1 \quad (3.2)$$

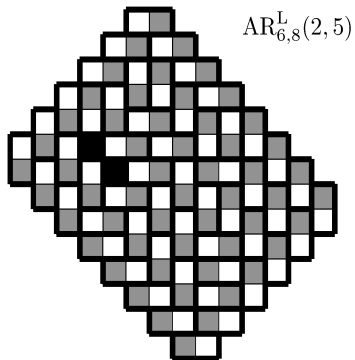
となる。次の図は $AR_{6,8}^L(1, 3)$ である。



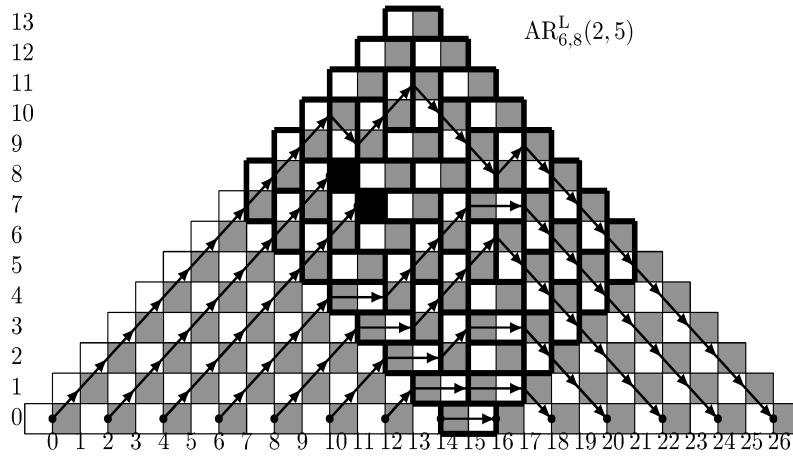
また、次の図は $AR_{6,8}^S(1,3)$ である。



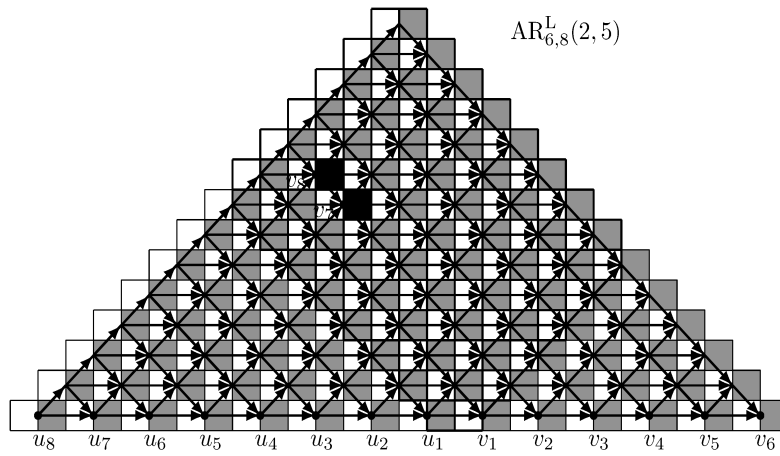
例えば、次の図は $AR_{6,8}^L(2,5)$ の domino tiling の例である。



このような domino tiling が与えられたときに、次のような lattice path に置き換えることができる。そして、この対応は全単射であるので、tiling の個数の代わりに lattice path の個数を数えればよい。



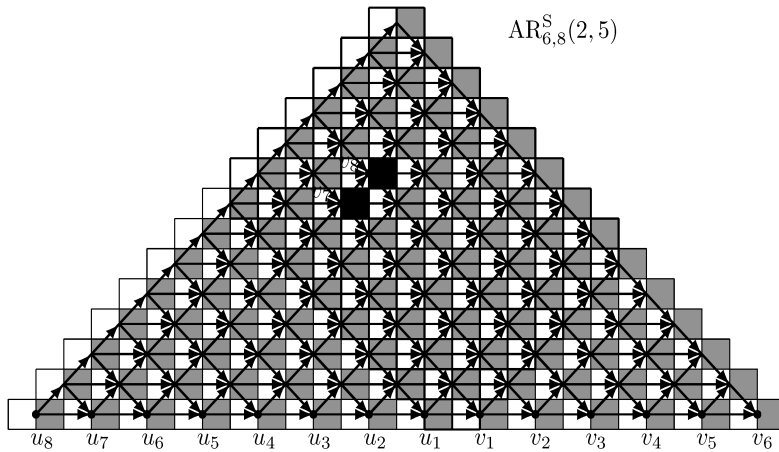
上の図で lattice path のみを描くと次のような Schröder path になる. ここで, vertex の座標 $\langle x, y \rangle$ を, 下辺の左端の点を $\langle 0, 0 \rangle$ として, 第 1 座標 x は $\bar{e}_1 = (2, 0)$ 進む毎に 1 増え, 第 2 座標 y は $\bar{e}_2 = (1, 1)$ 進む毎に 1 増えるような座標系で表す. 例えば, 一番上の頂点は $\langle 0, a + b - 1 \rangle$ である.



このとき, $AR_{a,b}^L(\xi, \eta)$ においては,

$$u_i = \langle b - i, 0 \rangle \quad (1 \leq i \leq b), \quad v_j = \begin{cases} \langle j + b - 1, 0 \rangle & (1 \leq j \leq a) \\ \langle a + b - \eta - j, j - a - 1 + \xi + \eta \rangle & (a < j \leq b) \end{cases} \quad (3.3)$$

である. 例えば, 上図の $AR_{6,8}^L(2,5)$ の場合には $u_1 = \langle 7, 0 \rangle, u_2 = \langle 6, 0 \rangle, u_3 = \langle 5, 0 \rangle, u_4 = \langle 4, 0 \rangle, u_5 = \langle 3, 0 \rangle, u_6 = \langle 2, 0 \rangle, u_7 = \langle 1, 0 \rangle, u_8 = \langle 0, 0 \rangle, v_1 = \langle 8, 0 \rangle, v_2 = \langle 9, 0 \rangle, v_3 = \langle 10, 0 \rangle, v_4 = \langle 11, 0 \rangle, v_5 = \langle 12, 0 \rangle, v_6 = \langle 13, 0 \rangle, v_7 = \langle 2, 7 \rangle, v_8 = \langle 1, 8 \rangle$ である.



一方の $AR_{a,b}^S(\xi, \eta)$ においては,

$$u_i = \langle b - i, 0 \rangle \quad (1 \leq i \leq b), \quad v_j = \begin{cases} \langle j + b - 1, 0 \rangle & (1 \leq j \leq a) \\ \langle b - \eta - 1, j - a - 1 + \xi + \eta \rangle & (a < j \leq b) \end{cases} \quad (3.4)$$

である. 例えば, 上図の $AR_{6,8}^S(2,5)$ の場合には $u_1 = \langle 7, 0 \rangle, u_2 = \langle 6, 0 \rangle, u_3 = \langle 5, 0 \rangle, u_4 = \langle 4, 0 \rangle, u_5 = \langle 3, 0 \rangle, u_6 = \langle 2, 0 \rangle, u_7 = \langle 1, 0 \rangle, u_8 = \langle 0, 0 \rangle, v_1 = \langle 8, 0 \rangle, v_2 = \langle 9, 0 \rangle, v_3 = \langle 10, 0 \rangle, v_4 = \langle 11, 0 \rangle, v_5 = \langle 12, 0 \rangle, v_6 = \langle 13, 0 \rangle, v_7 = \langle 2, 7 \rangle, v_8 = \langle 2, 8 \rangle$ である.

Definition 3.1. $a, b \in \mathbb{N} (a \leq b), c \in \mathbb{Z}$ に対して, 行列 $H^L(a, b, c, \xi, \eta)$ と $H^S(a, b, c, \xi, \eta)$ を次のように定義する.

(i) $H^L(a, b, c, \xi, \eta) = (h_{i,j}^L(a, b, c, \xi, \eta))_{1 \leq i, j \leq b}$ の成分は

$$h_{i,j}^L(a, b, c, \xi, \eta) = \begin{cases} S(i + j + c - 1) & \text{for } 1 \leq j \leq a, \\ S_{j-a-1+\xi+\eta}(a - \eta + i - j + c) & \text{for } a + 1 \leq j \leq b \end{cases} \quad (3.5)$$

(ii) $H^S(a, b, c, \xi, \eta) = (h_{i,j}^S(a, b, c, \xi, \eta))_{1 \leq i, j \leq b}$ の成分は

$$h_{i,j}^S(a, b, c, \xi, \eta) = \begin{cases} S(i + j + c - 1) & \text{for } 1 \leq j \leq a, \\ S_{j-a-1+\xi+\eta}(i + c - \eta - 1) & \text{for } a + 1 \leq j \leq b \end{cases} \quad (3.6)$$

によって定義する.

また, $F^L(a, b, c, \xi, \eta) = \det H^L(a, b, c, \xi, \eta), F^S(a, b, c, \xi, \eta) = \det H^S(a, b, c, \xi, \eta)$ と書くことにする.

例えば

$$H^L(3, 5, -1, 3, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 22 & 0 & 0 \\ 6 & 22 & 90 & 1 & 0 \\ 22 & 90 & 394 & 10 & 1 \\ 90 & 394 & 1806 & 70 & 12 \end{pmatrix}$$

であり, また

$$H^S(3, 5, -1, 3, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 22 & 0 & 0 \\ 6 & 22 & 90 & 1 & 1 \\ 22 & 90 & 394 & 10 & 12 \\ 90 & 394 & 1806 & 70 & 96 \end{pmatrix}$$

なので $F^L(3, 5, -1, 3, 1) = 24 = 2^3 \cdot 3$, $F^S(3, 5, -1, 3, 1) = 80 = 2^4 \cdot 5$ である. Gessel-Viennot の定理を使えば, 我々は簡単に次の公式を導くことができる. 特に, Domino tiling の個数を行列式で表わすことができる.

Theorem 3.2. $b - a = r$ が偶数のとき

- (i) $AR_{a,b}^L(\xi, \eta)$ の domino tiling の総数は $F^L(a, b, 0, \xi, \eta)$ である.
- (ii) $AR_{a,b}^S(\xi, \eta)$ の domino tiling の総数は $F^S(a, b, 0, \xi, \eta)$ である.

次節では, この定理を使う. Gessel-Viennot の手法を注意深く考察すると, この行列式は r が偶数のときは, ドミノタイリングの場合の数を与えるが, r が奇数のときは, そうではないことがわかる. しかし, それでも猶, 我々は r が奇数のときも, この行列式の値を計算する. それは, この行列式の値を帰納的に次数を下げて計算していくためである. また, $c = 0$ のときは, この行列式はドミノタイリングの場合の数を与えるが, $c \neq 0$ のときは, 組合せ論的意味を持たない. 少なくとも, 現在のところ我々は知らない. c を導入した目的は, 次に述べる Desnanot-Jacobi の等式を適用するためである. この c を導入すると, 一般に, 予想 4.5 に述べるような値が得られると期待される. この行列式に Desnanot-Jacobi の等式を適用すると

$$\begin{aligned} & F^L(a, b-1, c, \xi, \eta) F^L(a+1, b+1, c-2, \xi+1, \eta-1) \\ &= F^L(a+1, b, c-2, \xi+1, \eta-1) F^L(a, b, c, \xi, \eta) - F^L(a+1, b, c-1, \xi+1, \eta-1) F^L(a, b, c-1, \xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & F^S(a, b-1, c, \xi, \eta) F^S(a+1, b+1, c-2, \xi+1, \eta-1) \\ &= F^S(a+1, b, c-2, \xi+1, \eta-1) F^S(a, b, c, \xi, \eta) - F^S(a+1, b, c-1, \xi+1, \eta-1) F^S(a, b, c-1, \xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.8)$$

が成り立つことを注意しておく. [11] の中では, この 2 次関係式が行列式の計算に重要であった. それは, タイリングの場合の数は, 決して 0 にはならないからである. しかし, 我々の計算では, この関係式に頼ることに疑問がある. それは, r が奇数の場合は, 行列式の値がタイリングの場合の数を数えているわけではなく, この行列式の値が 0 になることが起こるからである.

4 行列評価

この節では, 定理 3.2 で求めた穴あきアステカ長方形のドミノタイリングの場合の数を, 行列式で表す式を評価し, なるべく簡単な形で書いた結果を述べる. 主に得られた結果のみを述べるが, 証明をするにはかなりの準備が必要である.

母関数を使うと, 定義 3.1 で定義した行列の行列式を次の形に変形できる. 証明は多少準備が必要なので, ここでは述べない. 方法は, $F^L(a, a+r, 0, \xi, \eta)$, $F^S(a, a+r, 0, \xi, \eta)$ を与える行列式の第 1 列から第 a 列までを上三角行列に変形する行列を左から掛けることである. この計算を母関数を使ってやる代わりに, 直接の行列計算でもできるが, 超幾何級数の等式を多用しなければならない.

Theorem 4.1. $c = 0$ のとき,

$$F^L(a, a+r, 0, \xi, \eta) = (-1)^{r(a+\eta)} 2^{\frac{a(a+1)}{2}} \det \left((-1)^{i+j} \binom{i+a}{j+\eta} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -\xi, j-i+\eta-a; \\ -i-a; \end{matrix} 2 \right) \right)_{0 \leq i, j \leq r-1} \quad (4.1)$$

$$F^S(a, a+r, 0, \xi, \eta) = (-1)^{r(a+\eta)+\binom{r}{2}} 2^{\frac{a(a+1)}{2}} \det \left(\binom{i+a}{\eta} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -i+\eta-a, -\xi-j; \\ -i-a; \end{matrix} 2 \right) \right)_{0 \leq i, j \leq r-1} \quad (4.2)$$

である.

定理 4.1 で得られた行列式をさらに変形して, 穴あきアステカ長方形のドミノタイリングの場合の数を, もともとのアステカ正方形の場合の形に近い形にするために, 次のような Gauss 超幾何級数 ${}_2F_1$ の行列式として定義される関数 $f_n^{(r)}(a, x)$, $g_n^{(r)}(a, x)$ を次のように定義する. 便宜上, 今後 $r < 0$ のとき, $\frac{1}{r!} = 0$ と定義する.

Definition 4.2. $r, n \geq 0$ を整数とする. x についての rn 次の多項式 $f_n^{(r)}(a, x)$ を terminating hypergeometric series の行列式として

$$f_n^{(r)}(a, x) = \prod_{k=0}^{r-1} \frac{(n+k)!}{k!} \cdot \det \left(\frac{\left(\frac{a}{2} + x - n - j + i + 1\right)_{n+j-i} {}_2F_1\left(\frac{-n-j+i, a-n+i; 1}{\frac{a}{2} + x - n - j + i + 1; 2}\right)}{(n+j-i)!} \right)_{1 \leq i, j \leq r} \quad (4.3)$$

$$= 2^{-rn} \prod_{k=0}^{r-1} \frac{(n+k)!(-a-k)_n}{k!} \cdot \det \left(\frac{{}_2F_1\left(\frac{-n-j+i, -\frac{a}{2}-x; 2}{-a-j; 1}\right)}{(n+j-i)!} \right)_{0 \leq i, j \leq r-1} \quad (4.4)$$

と定義する. ただし, $r=0$ のとき $f_n^{(r)}(a, x) = 1$ とする. また, $g_n^{(r)}(a, x)$ を

$$g_n^{(r)}(a, x) = f_n^{(r)}(a - r + 1, x) \quad (4.5)$$

と定義する.

ここで $r=0$ のときは $f_n^{(r)}(a, x) = 1$ と定義した. また, $r \geq 1, n=0$ のとき, 行列は上三角で対角行列だから $f_n^{(r)}(a, x) = 1$ である. さらに, $r \geq 1, n < 0$ のときは $1/n! = 0$ より, 下三角部分では対角線も含めて 0 だから $f_n^{(r)}(a, x) = 0$ であると解釈する. $f_n^{(r)}(a, x), g_n^{(r)}(a, x)$ は, いずれも x についての monic な多項式で, 例えば $r=2$ のとき, $f_n^{(2)}(a, x)$ の最初の方は次のようになる.

$$f_0^{(2)}(a, x) = 1$$

$$f_1^{(2)}(a, x) = x^2 + \frac{a}{4}$$

$$f_2^{(2)}(a, x) = x^4 - x^2 + \frac{3}{16}a^2x^4 - x^2 + \frac{3}{16}a^2$$

$$f_3^{(2)}(a, x) = x^6 - \frac{3a+8}{4}x^4 + \frac{1}{16}(9a^2 - 6a + 16)x^2 + \frac{9}{64}a^2(a-2)$$

$$f_4^{(2)}(a, x) = x^8 - 2(a+1)x^6 + \frac{1}{8}(15a^2 - 10a + 32)x^4 - \frac{1}{8}(15a^2 - 26a + 24)x^2 + \frac{45}{256}(a-2)^2a^2$$

穴あきアステカ長方形のドミノタイリングの場合の数を, 次の形で表わすことが我々の今回の主結果である.

Theorem 4.3. $0 \leq a \leq b$ とする. $b - a = r$ とおく.

(i) $0 \leq \xi \leq a, 0 \leq \eta \leq a$ のとき

$$F^L(a, b, 0, \xi, \eta) = (-1)^{r(\xi+a)} 2^{\frac{a(a+1)}{2} + r\eta} \cdot \prod_{k=0}^{r-1} \frac{k!}{(k+\eta)!} \cdot f_\eta^{(r)}\left(a, \xi - \frac{a}{2}\right) \quad (4.6)$$

となる.

(ii) $0 \leq \xi \leq a, 0 \leq \eta \leq a$ のとき

$$F^L(a, b, 0, \xi, \eta) = (-1)^{r(\eta+a)} 2^{\frac{a(a+1)}{2} + r\xi} \cdot \prod_{k=0}^{r-1} \frac{k!(k+a-\xi)!}{(k+\eta)!(k+a-\eta)!} f_\xi^{(r)}\left(a, \eta - \frac{a}{2}\right) \quad (4.7)$$

となる.

(iii) $0 \leq \xi \leq a - r + 1, 0 \leq \eta \leq a$ のとき

$$F^S(a, b, 0, \xi, \eta) = (-1)^{r(\xi+a)} 2^{\frac{a(a+1)}{2} + r\eta - \frac{r(r-1)}{2}} \prod_{k=0}^{r-1} \frac{k!}{(k+\eta-r+1)!} \cdot g_{\eta-r+1}^{(r)}\left(a, \xi - \frac{a-r+1}{2}\right) \quad (4.8)$$

となる.

(iv) $0 \leq \xi \leq a - r + 1, 0 \leq \eta \leq a$ のとき

$$\begin{aligned} & F^S(a, b, 0, \xi, \eta) \\ &= (-1)^{r(\eta+a)} 2^{\frac{a(a+1)}{2} + r\xi + \frac{r(r-1)}{2}} \cdot \prod_{k=0}^{r-1} \frac{k!(k+a-r+1-\xi)!}{(k+\eta-r+1)!(k+a-\eta)!} \cdot g_{\xi}^{(r)} \left(a, \eta - \frac{a+r-1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる.

定理 4.1 を変形して, 定理 4.3 を得る計算は, 超幾何級数を多用した直接計算でかなり長いものである. もう少しの改善が必要である.

我々の問題意識として, まず $r=2$ の場合, すなわち 2 つの 1 列に並んだ穴あきアステカ長方形のドミノタイリングの場合の数を, 数えることが最初であった. 特に, この場合には, 次の命題 4.4 に述べるように ${}_4F_3$ を使って, ドミノタイリングの場合の数を表せるというのが, 最初の観察であった. 現在は, 命題 4.4 は定義 4.2 の中で述べられた行列式から導くことができる.

Proposition 4.4.

$$f_n^{(2)}(a, x) = (-1)^n \binom{\frac{a}{2} + 1 - n + x}{n} \binom{\frac{a}{2} + 1 - n - x}{n} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{a}{2} + 1 - n, \frac{a+1}{2} - n, a + 2 - n, -n; \\ \frac{a}{2} + 1 - n + x, \frac{a}{2} + 1 - n - x, a + 1 - 2n; \\ 1 \end{matrix} \right) \quad (4.10)$$

パラメータ c は, (3.7), (3.8) に述べた Desnanot-Jacobi adjoint matrix Theorem を導くために, 形式的に導入した変数であった. この c の入れ方の良い点は, さらに, 次に述べる予想が成り立つことである.

Conjecture 4.5. $0 \leq a \leq b$ とする. $b - a = r$ とおく.

(i) $-a \leq c \leq 0, 0 \leq \xi + c \leq a + c, 0 \leq \eta \leq a + c$ のとき

$$F^L(a, b, c, \xi, \eta) = (-1)^{r(\xi+a)} 2^{\frac{(a+c)(a+c+1)}{2} + r\eta} \cdot \prod_{k=0}^{r-1} \frac{k!}{(k+\eta)!} \cdot f_{\eta}^{(r)} \left(a + c, \xi + c - \frac{a+c}{2} \right) \quad (4.11)$$

となる.

(ii) $-a \leq c \leq 0, 0 \leq \xi + c \leq a + c, 0 \leq \eta \leq a + c$ のとき

$$F^L(a, b, c, \xi, \eta) = (-1)^{r(\eta+a-c)} 2^{\frac{(a+c)(a+c+1)}{2} + r(\xi+c)} \cdot \prod_{k=0}^{r-1} \frac{k!(k+a-\xi)!}{(k+\eta)!(k+a+c-\eta)!} \cdot f_{\xi+c}^{(r)} \left(a + c, \eta - \frac{a+c}{2} \right) \quad (4.12)$$

となる.

(iii) $0 \leq \xi + c \leq a + c - r + 1, 0 \leq \eta \leq a + c$ のとき,

$$\begin{aligned} & F^S(a, b, c, \xi, \eta) \\ &= (-1)^{r(\xi+a)} 2^{\frac{(a+c)(a+c+1)}{2} + r\eta - \frac{r(r-1)}{2}} \prod_{k=0}^{r-1} \frac{k!}{(k+\eta-r+1)!} \cdot g_{\eta-r+1}^{(r)} \left(a + c, \xi + c - \frac{a+c-r+1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

となる.

(iv) $0 \leq \xi + c \leq a + c - r + 1, 0 \leq \eta \leq a + c$ のとき,

$$\begin{aligned} & F^S(a, b, c, \xi, \eta) \\ &= (-1)^{r(\eta+a+c)} 2^{\frac{(a+c)(a+c+1)}{2} + r(\xi+c) + \frac{r(r-1)}{2}} \cdot \prod_{k=0}^{r-1} \frac{k!(k+a-r+1-\xi)!}{(k+\eta-r+1)!(k+a+c-\eta)!} \cdot g_{\xi+c}^{(r)} \left(a + c, \eta - \frac{a+c-r-1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる.

この一般の予想は、まだ証明できていないが、この場合に定義 3.1 で定義した行列式の第 1 列から第 a 列までを上三角行列に変形する行列が、定義 1.7 の $f_m(n)$ を使って得られることが観察される。LBP と行列式の関係と言う意味で興味深い問題でもある。

参考文献

- [1] R. A. Brualdi and S. Kirkland, "Aztec diamonds and digraphs, and Hankel determinants of Schröder numbers", *J. Combin. Theory Ser. B*, **94** (2005), 334–351.
- [2] M. Ciucu, "Perfect matchings of cellular graphs", *J. Algebraic Combinatorics* **5** (1996), 87–103.
- [3] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp, "Alternating-sign matrices and domino tilings (Part I)", *J. Algebraic Combinatorics* **1** (1992), 111–132.
- [4] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp, "Alternating-sign matrices and domino tilings (Part II)", *J. Algebraic Combinatorics* **1** (1992), 219–234.
- [5] S.P. Eu and T.S. Fu, "A Simple Proof of the Aztec Diamond Theorem", *Electron.J.Combin.* **12** (2005), Research Paper 18, 8pp. (electronic).
- [6] I. Gessel and G. Viennot, "Binomial determinants, paths, and hook length formulae", *Advances in Math.* **58** (1985), 300–321.
- [7] I. M. Gessel and X. G. Viennot, Determinants, Paths, and Plane Partitions, 1989 preprint.
- [8] I. M. Gessel and G. Xin, The Generating Function of Ternary Trees and Continued Fractions, *Electron.J.Combin.* **13** (2006), Research Paper 53, 48pp. (electronic).
- [9] S. Kamioka, "A combinatorial representation with Schröder paths of biorthogonality of Laurent biorthogonal polynomials", *Electron.J.Combin.* **14** (2007), Research Paper 37, 22pp. (electronic).
- [10] S. Kamioka, "A combinatorial derivation with Schröder paths of a determinant representation of Laurent biorthogonal polynomials", *Electron.J.Combin.* **15** (2008), Research Paper 76, 20pp. (electronic).
- [11] S. Kamioka, "Laurent biorthogonal polynomials, q -Narayana polynomials and domino tilings of the Aztec diamonds", *J. Combin. Theory Ser. A* **123** (2014), 14–29.
- [12] C. Krattenthaler, "A Systematic List of Two- and Three-term Contiguous Relations for Basic Hypergeometric Series", available at <http://www.mat.univie.ac.at/~kratt/artikel/control.html>.
- [13] S. Okada and C. Krattenthaler, "The number of rhombus tilings of a 'punctured' hexagon and the minor summation formula" *Adv. Appl. Math.* **21** (1998), 381–404.
- [14] E. H. Kuo, "Applications of graphical condensation for enumerating matchings and tilings", *Theoret. Comput. Sci.* **319** (2004), 29–57.
- [15] B. Lindström, "On the vector representations of induced matroids", *Bull. London Math. Soc.* **5** (1973), 85–90.
- [16] L. F. Slater, "Generalized Hypergeometric Functions", Cambridge University Press (1966).
- [17] R. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume I*, Cambridge University Press, second edition, 2011.
- [18] R. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume II*, Cambridge University Press, 1997, 1999.