数理解析研究所講究録
第 1992 巻 2016 年 80-90

The Zuckerman functor over a commutative ring

Takuma Hayashi *
The University of Tokyo

概 要

本論説では講演者の修士論文 [H1] に従い、可換環上の Zuckerman 関手の定式化及びその存在証明の概略を述べる。

目 次

1 背景

本論説全体のテーマは実簡約 Lie 群の「代数的」表現を構成することである。この節ではその表現が何であるかについて基本的な例を与える。詳細については例えば [S1], [S2], [S3], [O] を参考文献に挙げておく。まず初めに半単純 Lie 群

$$\mathrm{SU}(1,1)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}:|\alpha|^2-|\beta|^2=1\right\}$$

を考える。この Lie 群は一次分数変換によって円

$$S^1=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:x^2+y^2=1\}$$

に推移的に作用し、$\epsilon\in\{0,\frac{1}{2}\}$ と $\mu\in\mathbb{C}$ でパラメーターづけられる $L^2(S^1)$ 上の Hilbert 表現族 $\mathcal{H}^{\epsilon,\mu}$ を得る。これらは一般に主系列表現と呼ばれてい

*Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan, htakuma@ms.u-tokyo.ac.jp

る。当然、各表現は解析的な対象である。ここで、これを少しだけ小さい部分ベクトル空間に取り替えることで代数化することを考えよう。つまり、$\mathcal{H}^{\epsilon,\mu}_{fin} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}z^n$ を考える。このとき、群 $\mathrm{SU}(1,1)$ は $\mathcal{H}^{\epsilon,\mu}_{fin}$ に作用しない。しかし、その代わりにこのベクトル空間には2つの作用がある。一つは Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の作用である。具体的には次で与えられる。

$$Ez^n = (\mu + n - \epsilon)z^{n+1}$$

$$Fz^n = (\mu - n + \epsilon)z^{n-1}$$

$$Hz^n = 2(n - \epsilon)z^n$$

ここで (E, F, H) は通常の $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-triple、つまり

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。もう一つの作用は極大コンパクト部分群

$$\mathrm{U}(1) \subset \mathrm{SU}(1,1); z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

あるいはその複素化 $\mathbb{C}^*$ の代数的作用である。具体的には、$a \in \mathbb{C}^*$ として

$$a \cdot z^n = a^{2(n-\epsilon)}z^n$$

で与えられる。このようにして構成された表現は一般に $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \mathbb{C}^*)$ 加群と呼ばれる。これが冒頭で述べられた「代数的」表現の意味である。

より一般に、$G_\mathbb{R}$ を実簡約 Lie 群とし、$G_\mathbb{R}$ の Lie 環の複素化を $\mathfrak{g}$、$G_\mathbb{R}$ の極大コンパクト部分群を $K_\mathbb{R}$、その複素化を K と書くことにする。このとき、上記の $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \mathbb{C}^*)$ 加群の構成を一般化することができる。詳細については例えば [K] を見てもらうことにする。まず $\mathcal{H}$ を $G_\mathbb{R}$ の Hilbert 表現とする。この時、$\mathcal{H}$ の $K_\mathbb{R}$ 有限ベクトルのなす部分空間 $\mathcal{H}_{fin}$ をとる。ここで $v \in \mathcal{H}$ が $K_\mathbb{R}$ 有限ベクトルであるとは、$\{kv : k \in K_\mathbb{R}\}$ の張る $\mathcal{H}$ の線形部分空間が有限次元であるということである。結果、$G_\mathbb{R}$ の $\mathcal{H}$ への作用を $K_\mathbb{R}$ に制限することで $K_\mathbb{R}$ の線形空間 $\mathcal{H}_{fin}$ への作用を得る。さらにこの表現は K の代数的表現に一意的に延長できる。一方、$\mathcal{H}$ の C^∞ ベクトルに対して $\mathfrak{g}$ の作用を定義することができる。そこで、$\mathcal{H}_{fin,\infty}$ を $K_\mathbb{R}$ 有限 C^∞ ベクトルのなす $\mathcal{H}$ の部分ベクトル空間とすれば、$\mathcal{H}_{fin,\infty}$ 上に $\mathfrak{g}$ と K の作用を得ることができる。このようにして得られる表現は $(\mathfrak{g}, K)$ 加群と呼ばれる。

注意 1.1 ([K]). $\mathcal{H}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の認容表現であるとする。つまり、$\mathcal{H}_{fin}$ を $K_{\mathbb{R}}$ の表現として既約表現の直和に分解したとき、各既約成分の重複度が有限であるとする。この時、$\mathcal{H}$ の $K_{\mathbb{R}}$ 有限ベクトルは常に C^{∞} ベクトルになっていることが知られている。言い換えれば $\mathcal{H}_{fin} = \mathcal{H}_{fin,\infty}$ が従う。例えば、冒頭の SU(1,1) の主系列表現 $\mathcal{H}^{\epsilon,\mu}$ は認容表現である。また、Harish-Chandra によって実半単純 Lie 群の既約ユニタリ表現は常に認容表現になっていることが知られている。

2　可換環上の Zuckerman 関手とは何か？

まず、1 節で現れた概念を一般的に定式化することにしよう。まず次のデータの組を考える：

- (簡約) 複素線形代数群 K；
- 複素ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ 及びその上の K の表現 ϕ；
- K の表現の準同型 $[-,-] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ にはテンソル積表現によって K の表現の構造を入れる)。

$[-,-]$ が $\mathfrak{g}$ 上に Lie 代数の構造を定めるとき $(\mathfrak{g}, \phi)$ を K 同変複素 Lie 代数と呼ぶ。例えば K の Lie 環 $\mathfrak{k}$ は随伴表現によって K 同変複素 Lie 代数となる。さらに、K 同変複素 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \phi)$ に K 同変 Lie 代数の準同型 (つまり K の表現の準同型かつ Lie 代数の準同型)$\psi : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ が与えられているときこのデータを Harish-Chandra 対と呼び $(\mathfrak{g}, K)$ と書く。

次に $(\mathfrak{g}, K)$ を Hairsh-Chandra 対とする。このとき $(\mathfrak{g}, K)$ 加群とは次のデータの組

- K の複素表現 (V, ν)；
- V 上の K 同変複素 $\mathfrak{g}$ 加群構造 π、すなわち、Lie 環の表現を定める K の表現の準同型 $\pi : \mathfrak{g} \otimes V \to V$

であって等式

$$\pi \circ \psi = d\nu$$

を満たすもののことである。ここで $d\nu$ は ν の微分表現である。以下 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群のなす圏を $(\mathfrak{g}, K)$-mod と書くことにする。

$(\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$ を Hairsh-Chandra 対の (自然に定義される意味での) 射とすると、忘却関手または制限関手と呼ばれる自然な関手

$$(\mathfrak{g}, K)\text{-mod} \to (\mathfrak{h}, L)\text{-mod}$$

が定義され、この関手には右随伴関手 $I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}$ が存在する。本稿ではこの関手を Zuckerman 関手と呼ぶことにする。

注意 2.1. 通常、$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}$ であるときに右随伴関手 $I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}$ が Zuckerman 関手と呼ばれる。一方 $K=L$ であるときに $I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}$ はプロダクションまたは余誘導と呼ばれる。

Lie 群の代数的表現論では、$I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}$ (の導来関手のコホモロジー) によって多くの重要な表現あるいは表現の基本的な不変量が得られることが知られている ([KV])。以下簡単な例を挙げる。

例 2.2 ([KV] Proposition 11.47). $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{p}$ を次で定義する：

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b-a \\ b+a & -a \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{C}\right\}.$$

また、$M=\left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ とする。この時、同型 $\mathcal{H}_{fin}^{0,0}\cong I_{\mathfrak{p},M}^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}),\mathbb{C}^*}(\mathbb{C})$ がある。

より一般に、$G_\mathbb{R}$ を実簡約 Lie 群、$P_\mathbb{R}=M_\mathbb{R}A_\mathbb{R}N_\mathbb{R}$ を放物部分群とその Langlands 分解とする。以下 $G_\mathbb{R},P_\mathbb{R},M_\mathbb{R},A_\mathbb{R},N_\mathbb{R}$ の Lie 環の複素化を $\mathfrak{g},\mathfrak{p},\mathfrak{m},\mathfrak{a},\mathfrak{n}$ と書く。また $K\cap M$ を $K_\mathbb{R}\cap M_\mathbb{R}$ の複素化とする。さて、ξ を $M_\mathbb{R}$ の Hilbert 表現、ν を $\mathfrak{a}$ の線形汎関数とする。さらに、ξ を $K_\mathbb{R}\cap M_\mathbb{R}$ 上認容表現になっていると仮定する。このとき $(P_\mathbb{R},\xi,\nu)$ に付随する $G_\mathbb{R}$ の連続系列表現は認容表現であり、これに付随する $(\mathfrak{g},K)$ 加群は $I_{\mathfrak{p},K\cap M}^{\mathfrak{g},K}(V_{K\cap M}^{\xi,\nu})$ と同型である。ここで、$V_{K\cap M}^{\xi}$ を ξ に付随する $(\mathfrak{m},K\cap M)$ 加群とし、$V_{K\cap M}^{\xi,\nu}=V_{K\cap M}^{\xi}\otimes\mathbb{C}_\nu\otimes\mathbb{C}$ により $(\mathfrak{p},M)$ 加群を定める。つまり、$(\mathfrak{m},K\cap M)$ は $V_{K\cap M}^{\xi}$ に作用し、$\mathfrak{a}$ は ν によって $\mathbb{C}_\nu=\mathbb{C}$ に、$\mathfrak{n}$ は $\mathbb{C}$ に自明に作用させる。

例 2.3. $(\mathfrak{g},K)$ を Harish-Chandra 対とし、V を $(\mathfrak{g},K)$ 加群とする。この時、自明な射 $(\mathfrak{g},K)\to(0,1)$ はベクトル空間

$$H^n(\mathfrak{g},K,V)=R^nI_{\mathfrak{g},K}^{0,1}(V)$$

を誘導する。これは表現 V の相対コホモロジーと呼ばれている。

以上の理論の類似として、近年の F. Januszewski の研究がある。彼は保型表現の L 関数の特殊値の研究をモチベーションに、次のことを証明した：上記において「複素」を「標数 0 の体上」と置き換えたとしても右随伴関手が存在する ([Ja])。より一般に次のことを考えることができる。

問題 2.4. 上記において「複素」を一般の「可換環 k 上」と置き換えたとき、右随伴関手が存在するか？また、その右導来関手は存在するか？

正確な定式化は 4 節で行う。さて、本稿における可換環 k 上の Zuckerman 関手とは問題 2.4 における右随伴関手のことである。しかし、この存在問題は非自明である。さらに、この一般化された状況においては $(\mathfrak{g},K)$ 加群はアーベル圏をなさないことがありうる。本論説では可換環 k 上の Zuckerman 関手およびその導来関手の存在問題に焦点を当てることにする。

注意 2.5. 多項式環 $\mathbb{C}[t]$ 上の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群という概念については Jantzen フィルターの理論においてすでに考えられていた。また、$k = \mathbb{Z}$ の場合には [Har] において本稿とは微妙に異なる設定が導入されている。

3 問題点

一般化するうえで、次のような問題がある。

1. 可換環 k 上の線形代数群とは何か？

2. 随伴表現は一般には (期待される意味で) 定義できない。

3. $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の圏における核は必ずしもコントロールできない。

最初の 2 つは K の有限性に関する問題である。一方、3 つ目は $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の圏論的側面が関係する。これらの問題の 1 つの解法とは良い設定を見つけることである。

まず問題 1 について。体 k 上の線形代数群と言えば (被約) 有限型アフィン群スキームを指すことが多い。しかし、k を Noether 環でない環に置き換えた場合には有限型という性質は良いふるまいをしない。そこで、以下代数群という言葉を一度忘れることにし、Zuckerman 関手が存在する、あるいは他の 2 つの問題を解決する一般的な設定を模索することにする。

次に 2 つ目の問題について考えることにしよう。群スキームの理論において、群スキームの Lie 環 (単位元での接空間) には 2 つの定義が存在する。1 つは接空間加群として与える方法である。まず K を可換環 k 上のアフィン群スキームであるとし、K の座標環の余単位射の核を I_e と書くことにする。このとき、k 加群 $\mathrm{Hom}_k(I_e/I_e^2, k)$ には自然な Lie 代数の構造が入る。これが一つ目の候補である。2 つ目は k 上の代数の圏から集合の圏への関手 $\mathfrak{k}(-)$ として定義する方法である。まず、各 k 上の可換代数 R に対して $a + b\epsilon \mapsto a$ によって k 代数の準同型

$$R[\epsilon]/(\epsilon^2) \to R$$

が定義される。このとき関手 $\mathfrak{k}(-)$ を

$$\mathfrak{k}(R) = \mathrm{Ker}(K(R[\epsilon]/(\epsilon^2)) \to K(R))$$

によって定義する。重要なことは、随伴表現が後者の定式化の下で定められるということである。各 $\mathfrak{k}(R)$ には自然な R 加群の構造が入ることに注意する。今、群 $K(R)$ の $\mathfrak{k}(R)$ への作用 Ad を、$a \mapsto a + 0\epsilon$ で定まる写像

$$R \to R[\epsilon]/(\epsilon^2)$$

による共役作用で定義する。これにより、K を k 上の代数の圏から群の圏への関手と見なしたとき、K の $\mathfrak{k}(-)$ への作用が定まる。しかし、これらの定

義は一般には一致しない。ただし、2 つが一致することの特徴づけとして次の結果が知られている。

補題 3.1 ([DG] II.4.8). K を k 上のアフィン群スキームであるとする。このとき、任意の k 代数 R について R 加群の準同型

$$R \otimes_k \mathfrak{k}(k) \to \mathfrak{k}(R)$$

が同型であることと、I_e/I_e^2 が k 上有限生成かつ射影的であることは同値である。

よって、後者の条件が 2 つ目の問題の解法として提示される。この性質を以下 (*) と呼ぶことにする。

最後に 3 つ目の問題について述べることにする。ここでは問題を簡単にするため、$(\mathfrak{g}, K)$ 加群を考える代わりに K 加群の圏を考えることにする。まず K を可換環 k 上のアフィン群スキームとする。このとき、K 加群の圏は核を持たない、あるいは核を持ったとしても k 加群の圏の核と一致しないことがある。この問題が回避できる状況として、K が k 上平坦である場合が知られている。一般に次の結果が知られている。

補題 3.2. K が k 上平坦であるとする。このとき、K 加群の圏 K-mod は *Grothendieck* アーベル圏である、すなわち次の条件を満たす：

1. K-mod は局所的に小さい、つまり各 Hom 集合が小さい。
2. K-mod は余完備アーベル圏である。
3. フィルター余極限が完全である。
4. K-mod は生成子を持つ。

さらに、K-mod の核及び任意の小さい余極限は k 加群としては k 加群の圏の中で計算することができる。

注意 3.3. 正確には Grothendieck 宇宙を固定し、上記の k, K, K 加群はすべてこの宇宙について小さいことを仮定する。このことについては 4 節の冒頭で改めて述べることにする。

4 解

前節を踏まえ、主張を正確に定式化することから始める。技術的な前提として、十分大きい到達不能基数の存在を認め、Grothendieck 宇宙を一つ固定する。これは以降の「小さい」という単語を正当化し、圏論の抽象的な結果を用いるための集合論的な仮定である。圏論の専門家でない場合は Grothendieck 宇宙および以降の「小さい」という単語については読み飛ばして構わない。

まず k を可換環とする。この時、k 上の Hairsh-Chandra 対 $(\mathfrak{g}, K)$ とは次のデータのことである：

- k 上平坦なアフィン群スキーム K であって、性質 $(*)$ を満たす。
- k 上の K 同変 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \phi)$
- K 同変 Lie 代数準同型 $\psi : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ (K の条件から $\mathfrak{k}$ には随伴表現 Ad が定義される).

次に Hairsh-Chandra 対 $(\mathfrak{g}, K)$ に対して、$(\mathfrak{g}, K)$ 加群とはデータの組

- K の k 上の有理表現 (V, ν)
- K 同変 $\mathfrak{g}$ 加群構造 π

であって等式

$$\pi \circ \psi = d\nu$$

を満たすもののことである。以下再び $(\mathfrak{g}, K)$ 加群のなす圏を $(\mathfrak{g}, K)$-mod と書くことにする。

定理 4.1 ([H1], [H2]). $(\mathfrak{g}, K)$ を k 上の *Harish-Chandra* 対とする。このとき、圏 $(\mathfrak{g}, K)$-mod は *Grothendieck* アーベル圏である。さらに、この圏の核、余核、直和は k 加群の圏の中で計算することができる。

Grothendieck アーベル圏は局所表示可能であることに注意する ([Be] Proposition 3.10)。次の事実が肝心である。

定理 4.2 (随伴関手定理, [AR]). $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を局所表示可能な圏の間の関手とする。このとき F が右随伴関手を持つことと任意の小さい余極限を保つことは同値である。

系 4.3 ([H1], [H2]). $(\mathfrak{h}, L) \to (\mathfrak{g}, K)$ を k 上の *Harish-Chandra* 対の射とする。このとき、忘却関手

$$(\mathfrak{g}, K)\text{-mod} \to (\mathfrak{h}, L)\text{-mod}$$

は右随伴関手 $I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}$ を持つ。また、この忘却関手は完全である。

以降局所表示可能性は定理 4.5 の組み合わせ論的モデル構造の定式化及び同定理の証明を除いては用いない。詳細な定義については [AR] や [L] の付録を参考文献に挙げることにし、本稿ではこれを省略する。

次に Zuckerman 関手の導来関手について述べることにする。まず、Grothendieck アーベル圏は十分単射的対象を持つ ([Gro]) ことから次が得られる：

系 4.4. $I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}$ は左有界導来圏上導来関手を持つ。

次に非有界導来関手の存在も証明する。このために Quillen によるモデル圏の理論を用いることにする。基本的な用語については [Hov] および [L] の付録を参考文献に挙げておく。

定理 4.5 ([Be]). $\mathcal{A}$ を *Grothendieck* アーベル圏であるとする。この時、$\mathcal{A}$ の対象の複体の圏 $C(\mathcal{A})$ には次を満たす *(組み合わせ論的)* モデル構造が存在する。

(C) $C(\mathcal{A})$ の射が余ファイブレーションであることと単射であることが同値である。

(W) $C(\mathcal{A})$ の射が弱同値であることと擬同型であることが同値である。

このモデル構造は単射的モデル構造と呼ばれている。

系 4.6 ([H1], [H3]). 関手 $I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}$ は単射的モデル構造について右 *Quillen* 関手である。特に、$I_{\mathfrak{h},L}^{\mathfrak{g},K}$ は非有界導来関手を持つ。

以下定理 4.1 の証明の概略を述べる。証明のアイデアは、具体的な計算をせず、主張を圏論の言葉に翻訳して抽象化して証明することである。まず、$\mathfrak{g}$ および $\mathfrak{g}$ 加群を考える代わりに不変包絡環 $U(\mathfrak{g})$ とその上の加群を考えるということにすり替えることにする。さらに $U(\mathfrak{g})$ を一般の K 同変 k 代数 $\mathcal{A}$ に一般化することにする。そのうえで対 $(\mathcal{A}, K)$、その上の加群、及び定理 4.1 を同様に定式化する。以下、$(\mathcal{A}, K)$ に対する定理 4.1 を定理 4.1' と呼ぶことにする。さらに、[BB] によって導入された弱 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群、あるいは弱 $(\mathcal{A}, K)$ 加群を導入する。これは Lie 環 $\mathfrak{k}$ の 2 つの表現に関する整合性の条件を外すことで得られる概念である。まず k 上の弱 Harish-Chandra 対 $(\mathcal{A}, K)$ とは、性質 $(*)$ を満たす k 上平坦なアフィン群スキーム K と k 上の K 同変 Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \phi)$ の組のことである。また、弱 $(\mathcal{A}, K)$ 加群とは、データ

- K の k 上の有理表現 (V, ν)
- K 同変 $\mathfrak{g}$ 加群構造 π

の組である。弱 $(\mathcal{A}, K)$ 加群の圏を $(\mathcal{A}, K)$-mod_w と書くことにする。弱 $(\mathcal{A}, K)$ 加群に対しても再び定理 4.1 の類似を定式化することができる。これを定理 4.1" と書くことにする。

定理 4.1" から定理 4.1' が従うことを証明する。まず、Harish-Chandra 対 $(\mathcal{A}, K)$ に対し、圏 $(\mathcal{A}, K)$-mod は $(\mathcal{A}, K)$-mod_w の (狭義) 充満部分圏であることに注意する。

補題 4.7 ([H1], [H2]). $(\mathcal{A}, K)$-mod は $(\mathcal{A}, K)$-mod_w の局所化かつ余局所化である。すなわち、自然な埋め込み

$$(\mathcal{A}, K)\text{-mod} \to (\mathcal{A}, K)\text{-mod}_w$$

が左随伴関手および右随伴関手を持つ。

このことから $(\mathcal{A},K)$-mod の極限及び余極限はすべて $(\mathcal{A},K)$-mod$_w$ の中で計算できることがわかった。$(\mathcal{A},K)$-mod が生成子を持つことは事実から従う：

補題 4.8. $(F,G):\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}$ を随伴対、U を $\mathcal{C}$ の生成子とする。また、G が忠実であると仮定する。このとき、$F(U)$ は $\mathcal{D}$ の生成子である。

証明. $f,g:X\to Y$ を $\mathcal{D}$ の射とする。任意の $e:F(U)\to X$ に対して $f\circ e=g\circ e$ を満たすとする。随伴 (F,G) を経由することにより、これは次のように言い換えられる：任意の射 $e':U\to G(X)$ に対して $G(f)\circ e'=G(g)\circ e'$ を満たす。U は $\mathcal{C}$ の生成子であることから $G(f)=G(g)$ が従い、さらに G が忠実であるという仮定により $f=g$ が言える。 □

以上により帰着の証明が終わった。

さて、定理 4.1" の証明をすることにしよう。まず圏 K-mod には自然な閉対称モノイダル圏の構造が入ることを思い出すことにしよう。このとき、弱 Harish-Chandra 対 $(\mathcal{A},K)$ 及びその上の加群は、([ML] の意味で)K-mod のモノイド対象及びその上の加群になっていることに注意する。さらに補題 3.2 も思い出すことにしよう。すると、定理 4.1" はモノイダル圏に関する次の標準的な結果の特殊な場合として従う。

命題 4.9. $\mathcal{V}$ をモノイダル圏であるとする。以下、A を $\mathcal{V}$ のモノイド対象とする。また、左 A 加群の圏を A-mod と書くことにする。

(1) $\mathcal{V}$ が生成子 U を持つとする。この時 $A\otimes U$ は自然な左 A 加群の構造を持ち、A-mod の生成子となる。

(2) $\mathcal{V}$ が完備であるとき、A-mod も完備である。さらに、A-mod の任意の極限は $\mathcal{V}$ において計算される。

(3) $\mathcal{V}$ が閉対称モノイダル圏であるとする。このとき、$\mathcal{V}$ が余完備であれば A-mod も余完備である。さらに、A-mod の任意の余極限は $\mathcal{V}$ において計算される。

(4) $\mathcal{V}$ が局所的に小さいとき、A-mod も局所的に小さい。

この命題については全て定義から直接証明することができる。以上により定理 4.1" の証明が終わった。

コメント 4.10 ([H1], [H2], [H3]). (1) より一般に、A を dg 代数に置き換えても同様の議論により同様の結果が得られる。ただし、この場合には左有界導来関手は必ずしも存在しない。また、dg $(\mathcal{A},K)$ 加群の圏は一般にはアーベル圏の対象の複体の圏の形をしていないため、[Be] の結果を直接使うことはできないが、同論文と同様の議論によって単射的モデル構造を構成することができる。$\mathcal{A}$ が dg 代数の場合の $(\mathcal{A},K)$ 加群

及び Zuckerman 関手の先行研究として Pandžić の同変 Zuckerman 関手の理論 ([P1], [P2]) が知られている。同研究は Zuckerman 関手の局所化問題と関連する ([MP])。

(2) 上述の定理 4.1' の証明は [H2] および [H3] に基づく。[H1] では補題 4.7 を用いず直接同定理を証明している。

(3) 可換環上の Zuckerman 関手の存在証明は [H1] と [H2] において行われ、2 つの証明は微妙に異なる。本論説では [H1] の方法を採用した。どちらも随伴関手定理が用いられているが、[H2] ではモノイダル圏の構造をさらに駆使することで、[H1] に比べて構成的な証明になっている。両証明により Zuckerman 関手の存在問題自体は本来モノイダル圏の問題としておよそ捉えられるという見方を与えた。

(4) 本論説のテーマになっている $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の構成方法として他に双対 Zuckerman 関手 (及び誘導関手) が知られている ([KV])。群の部分を変えず、代数部分だけを変える誘導関手は係数拡大をすることで定義され、これはまさにモノイダル構造を由来としている。一方、群の部分を取り替える双対 Zuckerman 関手はそのようにはなっていない。双対 Zuckerman 関手の定式化には (代数的)Peter-Weyl の定理が肝心である。ただし、[KV] の双対 Zuckerman 関手の一般化として、Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を自然に dg 代数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に拡張することはできる ([H1], [H2])。また、その導来関手の構成は [H1], [H3] で行われている。

参考文献

[AR] J.Adámek, J.Rosicky. Locally presentable and accessible categories. Vol. 189, Cambridge University Press, 1994.

[BB] A.Beilinson, J.Bernstein. A proof of the Jantzen conjecture, Advances in Soviet mathematics 16. Part 1 (1993): 1-50.

[Be] T.Beke. Sheafifiable homotopy model categories. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 129, No. 03. Cambridge University Press, 2000.

[DG] M.Demazure, P.Gabriel. Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups. Translated from the French by J. Bell, North-Holland Mathematics Studies, 39, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[Gro] A.Grothendieck. Sur quelques points d'algebra homologique. Tôhoku Mathematical Journal, Second Series 9.2 (1957): 119-221.

[Har] G.Harder. Harish-Chandra Modules over $\mathbb{Z}$. arXiv:1407.0574 (2014).

[H1] T.Hayashi. Induction and production for $(\mathcal{A}, K, \mathcal{D})$-modules. Master thesis.

[H2] T.Hayashi. Dg analogues of the Zuckerman functors and the dual Zuckerman functors I. arXiv:1507.06405.

[H3] T.Hayashi. Dg analogues of the Zuckerman functors and the dual Zuckerman functors II. To appear.

[Hov] M.Hovey. Model categories, Mathematical Surveys and Monographs 63, American Mathematical Society, (1999).

[Ja] F.Januszewski. On Rational Structures on Automorphic Representations. arXiv:1411.3318 (2014).

[K] A.W.Knapp. Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples. Princeton University Press, Princeton, 1988.

[KV] A.W.Knapp. D.A.Vogan, Cohomological induction and unitary representations. Princeton University Press, Princeton, 1995.

[L] J.Lurie. Higher Topos Theory, Princeton Univ. Press (2009).

[ML] S.MacLane. Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[MP] D.Miličić. P.Pandžić, Equivariant derived categories, Zuckerman functors and localization, Geometry and Representation Theory of Real and p-adic groups, Birkhäuser Boston, 1998, 209-242.

[O] 岡本清郷. 等質空間上の解析学：リー群論的方法による序説. 紀伊國屋書店.

[P1] P.Pandžić. Equivariant analogues of Zuckerman functors, Ph.D. thesis, University of Utah, 1995.

[P2] P.Pandžić. Zuckerman functors between equivariant derived categories, Trans. Amer. Math. Soc. Volume 359, Number 5, May 2007, Pages 2191-2220.

[S1] 杉浦光夫, ユニタリ表現入門（上）. 上智大学数学講究録 No. 8.

[S2] 杉浦光夫, ユニタリ表現入門（下）. 上智大学数学講究録 No. 13.

[S3] M.Sugiura. Unitary representations and harmonic analysis: an introduction. Elsevier, 1990.