数理解析研究所講究録
第 1994 巻 2016 年 211-217

空間異質的な年齢構造化 SIS 感染症モデルの漸近挙動 [1]

Existence of nontrivial equilibria in epidemic models with spatial and age structures

國谷紀良
神戸大学大学院システム情報学研究科
〒 657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1

Toshikazu KUNIYA
Department of Applied Mathematics, Graduate School of System Informatics, Kobe University,
1-1 Rokkodai-cho, Nada-ku, Kobe 657-8501, JAPAN

Abstract In this paper, we investigate the asymptotic behavior of solution of an age-structured SIS epidemic model with patch structure. We prove that if the spectral radius of a linear operator is greater than 1, then the endemic equilibrium of the model is globally attractive, that is, any solution with nontrivial initial datum converges to the endemic equilibrium as time goes to infinity. In the proof, we succeed in applying the technique of monotone semiflow as in [S.N. BUSENBERG, M. IANNELLI, AND H.R. THIEME, *Global behavior of an age-structured epidemic model*, SIAM J. Math. Anal., 22 (1991), pp. 1065–1080.] to a more general spatially heterogeneous Banach space.

1 導入

SIS 感染症モデルは、病気から回復した感染個体は免疫を獲得せずに再び感受性を有するようになると仮定された、最も基本的な感染症モデルの一つとして有名である (see Diekmann and Heesterbeek [5])。実年齢（生まれてからの経過時間）構造を持つ SIS 感染症モデルは、一階の偏微分方程式の初期値境界値問題として記述されるが、その解の大域的な挙動の解析は Busenberg *et al.* [3] によって行われた。そこでは、SIS 感染症モデルの解が定義する半力学系の単調性を利用することで、有名な疫学的閾値である基本再生産数 $\mathscr{R}_0$ (see [5]) に相当すると考えられるある閾値が、ある線型作用素のスペクトル半径として得られ、その値が 1 以下であれば自明平衡解のみが存在し大域的に吸収的となる一方、1 より大きければエンデミックな非自明平衡解が一意に存在して大域的に吸収的となることが示された。そのような半力学系の単調性は SIS 感染症モデルが持つ重要な特徴の一つであり、いくつかの多状態 SIS 感染症モデルに対しても、その性質を利用することで解の大域的な挙動が解析されている (see Lajmanovich and Yorke [11] and Feng *et al.* [6])。

一方、感染症の地理的な伝播を考える上で、空間構造、すなわち各個体の空間異質性を考える試みが重要となることは、論を俟たない (see Rass and Radcliffe [14])。そのような空間異質性を考慮する上で、主に次の二つの方法が考えられる：パッチ構造を導入する方法 (see for instance [1, 7, 15]) と、空間拡散を導入する方法 (see for instance [2, 13, 17]) である。前者では、各地域を表すパッチ毎に人口を区分することで、離散的な空間構造を考慮することが可能となるのに対し、後者では空間変数を導入することで連続的な空間構造を考慮することが可能となる。連続的な構造の方がより一般的であるとも考えられるが、パッチ構造を持つモデルでは各パッチ間の即時的な移動を考慮できるという利点があると考えられる。本稿では、紙面の都合上、パッチ構造を持つモデルの解析に焦点を置く。

年齢構造を持たないパッチ構造化 SIS 感染症モデルの先行研究として、Arino and van den Driessche [1] では解の大域挙動に関するある予想が提唱され、それは Iggidr *et al.* [7] によって解決された。また一般的な出生項を持つパッチ構造化 SIS モデルの研究は Wang and Zhao [15] で行われている。より一般の空間異質性と年齢構造を同時に考慮した感染症モデルの研究は、著者の知る限り数の限られたものである。Langlais and Busenberg [12] では、エンデミックな非自明平衡解（および周期解）が存在する際の大域的な安定性が示されていたが、そのような存在を保証する閾値については未解明であった。一方、Kuniya and Oizumi [10] では、エンデミックな非自明平衡解の存在を保証する閾値としての基本再生産数 $\mathscr{R}_0$ が行われたが、その大

[1] 本稿の内容は稲葉寿教授（東京大学大学院数理科学研究科）との共同研究に基づく。また本研究は JSPS 科研費 15K17585 の助成を受けたものである。E-mail: tkuniya@port.kobe-u.ac.jp

域的な安定性については未解明であった。その他、出生や死亡などの人口学的構造がない場合の挙動については Blasio [4]、解の存在などの包括的な解説は Webb [16] で行われている。本稿では、パッチ構造を持つ年齢構造化 SIS 感染症モデルに焦点を置き、基本再生産数 $\mathscr{R}_0$ に相当すると考えられるある線型作用素のスペクトル半径を導出し、その値が 1 より大きければエンデミックな非自明平衡解が一意に存在して、大域的に吸収的となることを証明する。

2 解析

本稿では、次のパッチ構造を持つ年齢構造化 SIS 感染症モデルに焦点を置く：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial a}\right)S_j(t,a)=-\left\{\lambda_j(t,a)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{kj}(a)+\mu_j(a)\right\}S_j(t,a)+\gamma_j(a)I_j(t,a)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{jk}(a)S_k(t,a), \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial a}\right)I_j(t,a)=-\left\{\gamma_j(a)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{kj}(a)+\mu_j(a)\right\}I_j(t,a)+\lambda_j(t,a)S_j(t,a)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{jk}(a)I_k(t,a), \\ S_j(t,0)=\displaystyle\int_0^{a_\dagger}\beta_j(a)P_j(t,a)\mathrm{d}a,\quad I_j(t,0)=0,\quad \lambda_j(t,a)=\displaystyle\int_0^{a_\dagger}\kappa_j(a,\sigma)I_j(t,\sigma)\mathrm{d}\sigma,\quad j\in\{1,2,\dots,n\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで $S_j(t,a)$ および $I_j(t,a)$ はそれぞれ時間 $t\geq 0$ においてパッチ $j\in\{1,2,\dots,n\}$ に属する年齢 $a\in[0,a_\dagger]$ ($a_\dagger\in(0,+\infty)$ は最大到達可能年齢）の感受性人口と感染人口を表す。$\lambda_j(t,a)$ は時間 t においてパッチ j に属する年齢 a の感受性個体に対する感染力であり、$\kappa_j(a,\sigma)$ はパッチ j における年齢 a の感受性個体と年齢 σ の感染個体の間の感染伝達の係数である。$m_{jk}(a)$ はパッチ k からパッチ j への年齢依存の移動率、$\mu_j(a)$ はパッチ j における年齢依存の死亡率、$\gamma_j(a)$ はパッチ j における年齢依存の回復率、$\beta_j(a)$ はパッチ j における年齢依存の出生率を表す。また $P_j(t,a)=S_j(t,a)+I_j(t,a)$ は時間 t においてパッチ j に属する年齢 a の人口であり、(2.1) の各式を加えることで次の方程式を満たすものであることが分かる：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a}\right)P_j=-\left\{\sum_{k=1}^{n}m_{kj}(a)+\mu_j(a)\right\}P_j+\sum_{k=1}^{n}m_{jk}(a)P_k,\ \ P_j(t,0)=\int_0^{a_\dagger}\beta_j(a)P_j(t,a)\mathrm{d}a,\ \ j\in\{1,2,\dots,n\}. \tag{2.2}$$

各係数には次の仮定を置く：

(A1) すべての $j,k\in\{1,2,\dots,n\}$ に対して $m_{jk},\gamma_j,\kappa_j\in L_+^\infty(0,a_\dagger)$ とする（上限は $m_{jk}^+,\gamma_j^+,\kappa_j^+<+\infty$ と表す)。

(A2) すべての $j\in\{1,2,\dots,n\}$ に対して $\mu_j\in L^1_{\mathrm{loc},+}(0,a_\dagger)$ とし、次が成り立つものとする：

$$\int_0^{a_\dagger}\mu_j(a)\mathrm{d}a=+\infty,\quad \lim_{a\to a_\dagger}\frac{\ell_k(a)}{\ell_j(a)}<+\infty,\quad j,k\in\{1,2,\dots,n\}$$

ここで $\ell_j(a):=\exp\left(-\int_0^a\mu_j(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)$ はパッチ j における生残率を表す。

(A3) すべての $j\in\{1,2,\dots,n\}$ に対して $\beta_j\in L_+^\infty(0,a_\dagger)$ とする。

(A4) 純再生産行列 $\int_0^{a_\dagger}B(a)L(a)\mathrm{d}a$ は分解不能である。ここで $B(a):=\mathrm{diag}\left(\beta_j(a)\right)_{j\in\{1,2,\dots,n\}}$ であり、$L(a)$ は行列微分方程式 $\mathrm{d}L(a)/\mathrm{d}a=M(a)L(a),\ L(0)=I$ の解である。但し $M(a):=\left(m_{jk}(a)\right)_{j,k\in\{1,2,\dots,n\}}$, $m_{jj}(a):=-\left\{\sum_{k=1}^{n}m_{kj}(a)+\mu_j(a)\right\}$ であり、I は単位行列である。また、この純再生産行列のフロベニウス根は 1 とする。

仮定 (A4) の下で、Inaba [8, Propositions 3.2 and 3.3] より、(2.2) には正の平衡解 P_j^*, $j\in\{1,2,\dots,n\}$ が存在することが分かる。以下の議論では、初期時刻よりそのような定常状態は到達されている（すなわち、$P_j(t,a)\equiv P_j^*(a),\ j\in\{1,2,\dots,n\}$）ものとする。

2.1 半力学系の定義

系 (2.1) の各解に対し、正規化 $s_j(t,a) := S_j(t,a)/P_j^*(a)$, $i_j(t,a) := I_j(t,a)/P_j^*(a)$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ を考える。$s_j(t,a) = 1 - i_j(t,a)$ が成立することに注意すると、系 (2.1) は次の i_j の系に書き換えられる：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial a}\right) i_j(t,a) = -\left\{\gamma_j(a) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{jk}(a)\right\} i_j(t,a) + \lambda_j(t,a)\left\{1 - i_j(t,a)\right\} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{jk}(a) i_k(t,a), \\ i_j(t,0) = 0, \quad j \in \{1,2,\ldots,n\}. \end{cases} \tag{2.3}$$

但し $\bar{m}_{jk}(a) := m_{jk}(a)P_k^*(a)/P_j^*(a)$, $j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$ であり、正規化の影響で (2.3) の右辺の負の項には $\bar{m}_{kj}(a)$ ではなく $\bar{m}_{jk}(a)$ が現れることに注意されたい。また $\bar{\kappa}_j(a,\sigma) := \kappa_j(a,\sigma)P_j^*(\sigma)$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ とすることで、感染力は $\lambda_j(t,a) = \int_0^{a_\dagger} \bar{\kappa}_j(a,\sigma) i_j(t,\sigma)\mathrm{d}\sigma$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ となる。

今、$E := L^1(0,a_\dagger;\mathbb{R}^n)$ を定め、E_+ をその正値錐とする。(2.3) の解に対する状態空間として、閉凸集合

$$C := \left\{\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n) \in E_+ :\ 0 \le \varphi_j(a) \le 1,\ j = 1,2,\ldots,n,\ \text{a.e.}\right\} \tag{2.4}$$

を定める。また、線型作用素 $A : D(A) \subset E \to E$ を

$$A\varphi(a) := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\varphi(a), \quad D(A) := \left\{\varphi \in E :\ \varphi \in W^{1,1}(0,a_\dagger;\mathbb{R}^n),\ \varphi(0) = \mathbf{0}\right\}$$

で定め、非線型作用素 $F : C \subset E \to E$ を

$$(F(\varphi))(a) := \left(-\left\{\gamma_j(a) + \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{jk}(a)\right\}\varphi_j(a) + \lambda_j[a|\varphi]\left\{1 - \varphi_j(a)\right\} + \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{jk}(a)\varphi_k(a)\right)_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}, \quad \varphi \in C$$

で定める。但し

$$\lambda_j[a|\varphi] := \int_0^{a_\dagger} \bar{\kappa}_j(a,\sigma)\varphi_j(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \quad \varphi \in E, \quad j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

とした。このとき系 (2.3) は、E 内の次の抽象的コーシー問題に書き換えられる：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) = Ai(t) + F(i(t)), \quad i(0) = i_0 = (i_{0,1}, i_{0,2}, \cdots, i_{0,n}) \in E \tag{2.5}$$

但し $i(t) = (i_1(t), i_2(t), \cdots, i_n(t)) \in E$ である。

作用素 A は次で定める C_0-半群 $\{e^{tA}\}_{t\ge0} : E \to E$ の無限小生成作用素であることが容易に分かる：

$$e^{tA}\varphi(a) := \begin{cases} (\varphi_1(a-t), \varphi_2(a-t), \cdots, \varphi_n(a-t)), & a - t > 0; \\ 0, & t - a \ge 0, \end{cases} \quad \varphi \in E.$$

また任意の正定数 $\alpha > 0$ に対して、レゾルベント $(I - \alpha A)^{-1} : E \to E$ は

$$(I - \alpha A)^{-1}\varphi(a) := \frac{1}{\alpha}\left(\int_0^a e^{-\frac{1}{\alpha}(a-\sigma)}\varphi_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \cdots, \int_0^a e^{-\frac{1}{\alpha}(a-\sigma)}\varphi_n(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right), \ \varphi \in E$$

で与えられる。仮定 (A1)、(A2) より次の補題が成立する（紙面の都合上、証明は省略する）：

補題 2.1. (i) すべての $a \in [0,a_\dagger]$ と $j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対して、$\bar{m}_{jk}(a) \le \bar{m}_{jk}^+$ を満たす正定数 $\bar{m}_{jk}^+ \in (0,+\infty)$ が存在する。

(ii) すべての $a \in [0,a_\dagger]$ と $\varphi \in C$ および $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対して、$\lambda_j[a|\varphi] \le \lambda_j^+$ を満たす正定数 $\lambda_j^+ \in (0,+\infty)$ が存在する。

補題 2.1 の下で、

$$\alpha < \frac{1}{\displaystyle\max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\left(\lambda_j^+ + \gamma_j^+ + \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{jk}^+\right)} \tag{2.6}$$

を満たすように正の数 α を定めれば、Busenberg *et al.* [3] と同様の議論で、抽象的問題 (2.5) の軟解は積分方程式

$$i(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}t}\mathrm{e}^{tA}i_0+\frac{1}{\alpha}\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}(t-s)}\mathrm{e}^{(t-s)A}(I+\alpha F)\,i(s)\mathrm{d}s$$

の解として得られ、その解は次を満たす半力学系 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ を用いて $i(t)=U(t)i_0$ と表現される：

$$\begin{aligned}&U(t)(C)\subset C,\quad U(t)\varphi\leq U(t)\psi \text{ if } \varphi\leq\psi,\quad \varphi,\psi\in C,\\ &\xi U(t)\varphi\leq U(t)\xi\varphi,\quad \xi\in(0,1),\ \varphi\in C.\end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2 エンデミックな平衡解の存在

系 (2.3) の平衡解 $i^*\in C$ の存在を調べる。(2.5) より、そのような i^* は次を満たす：

$$\mathbf{0}=Ai^*+F(i^*),\quad i^*=(i_1^*,i_2^*,\cdots,i_n^*)\in C. \tag{2.8}$$

感染症の無い自明平衡解 $i^*\equiv\mathbf{0}\in C$ が常に一意に存在することは明らかである。以下では、エンデミックな非自明平衡解 $i^*\in C\setminus\{\mathbf{0}\}$ の存在を調べる。(2.8) は $i^*=(I-\alpha A)^{-1}(I+\alpha F)i^*$ と書き換えられる。但し $\alpha>0$ は (2.6) を満たす正定数とする。したがって $\Phi:=(I-\alpha A)^{-1}(I+\alpha F):E\to E$ と置き、Φ の非自明な不動点の存在と一意性を調べればよい。Φ の原点 $\mathbf{0}$ における Fréchet 微分を $\mathscr{K}:E\to E$ とすると、

$$\mathscr{K}\varphi(a):=\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^a \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}(a-\sigma)}\left\{\varphi_j(\sigma)-\alpha\left(\gamma_j(\sigma)+\sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}(\sigma)\right)\varphi_j(\sigma)+\alpha\lambda_j[\sigma|\varphi]+\alpha\sum_{k=1}^n\bar{m}_{jk}(\sigma)\varphi_k(\sigma)\right\}\mathrm{d}\sigma\right)_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} \tag{2.9}$$

となる。この作用素 $\mathscr{K}$ のスペクトル半径 $\rho(\mathscr{K})$ が、基本再生産数 $\mathscr{R}_0$ (see Diekmann and Heesterbeek *et al.* [5]) に相当する、エンデミックな平衡解 $i^*\in C\setminus\{\mathbf{0}\}$ の存在に対する閾値となることが期待される。実際、次の命題が証明される：

命題 2.1. $\rho(\mathscr{K})>1$ ならば、系 *(2.3)* には少なくとも一つのエンデミックな平衡解 $i^*\in C\setminus\{\mathbf{0}\}$ が存在する。

証明. 作用素 $\mathscr{K}$ は線型かつ完全連続で、正値錐 E_+ を不変に保つので、クレイン・ルトマンの定理（[9]）より、$\rho(\mathscr{K})>1$ に対応する正の固有ベクトル $\varphi^*\in E_+\setminus\{\mathbf{0}\}$ が存在する。それは

$$\begin{aligned}&\rho(\mathscr{K})\varphi^*(a)=\mathscr{K}\varphi^*(a)\\ &=\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^a \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}(a-\sigma)}\left\{\varphi_j^*(\sigma)-\alpha\left(\gamma_j(\sigma)+\sum_{k=1}^n\bar{m}_{jk}(\sigma)\right)\varphi_j^*(\sigma)+\alpha\lambda_j[\sigma|\varphi^*]+\alpha\sum_{k=1}^n\bar{m}_{jk}(\sigma)\varphi_k^*(\sigma)\right\}\mathrm{d}\sigma\right)_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\leq\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^a\left\{\varphi_j^*(\sigma)+\alpha\lambda_j^++\alpha\bar{m}_j^+\sum_{k=1}^n\varphi_k^*(\sigma)\right\}\mathrm{d}\sigma\right)_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\leq\left(\frac{1}{\alpha}\|\varphi_j^*\|_{L^1}+\lambda_j^+a_\dagger+\bar{m}_j^+\sum_{k=1}^n\|\varphi_k^*\|_{L^1}\right)_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}<+\infty$$

を満たす。但し $\bar{m}_j^+:=\sup_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}\bar{m}_{jk}^+<+\infty$ である。したがって $\varphi^*\in L_+^\infty(0,a_\dagger;\mathbb{R}^n)$ であるため、一般性を失うことなく $\varphi^*\in C$ と仮定することが出来る。すると $\xi\in(0,1)$ に対して $\xi\varphi^*\in C$ であり、

$$\begin{aligned}\Phi(\xi\varphi^*)(a)&=\mathscr{K}\xi\varphi^*(a)-\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^a\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}(a-\sigma)}\alpha\lambda_j[\sigma|\xi\varphi^*]\xi\varphi_j^*(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\\ &=\xi\rho(\mathscr{K})\varphi^*(a)-\left(\xi^2\int_0^a\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}(a-\sigma)}\lambda_j[\sigma|\varphi^*]\varphi_j^*(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\\ &\geq\xi\rho(\mathscr{K})\varphi^*(a)-\xi^2\bar{\lambda}\left(\int_0^a\varphi_j^*(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\end{aligned} \tag{2.11}$$

となる。ただし $\bar{\lambda}:=\max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\lambda_j^+$ である。ところで式 (2.10) より

$$\begin{aligned}\rho(\mathscr{K})\varphi^*(a)&\geq\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}a_\dagger}\int_0^a\left\{1-\alpha\left(\gamma_j^++\sum_{k=1}^n\bar{m}_{jk}^+\right)\right\}\varphi_j^*(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\\ &\geq\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}a_\dagger}(1-\alpha\bar{\gamma})\int_0^a\varphi_j^*(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし $\bar{\gamma} := \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}}\left(\gamma_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+\right) > 0$ とする。すると (2.6) より $1-\alpha\bar{\gamma}>0$ なので、

$$\frac{\alpha\rho(\mathscr{K})}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}a_\dagger}(1-\alpha\bar{\gamma})}\varphi_j^*(a) \ge \int_0^a \varphi_j^*(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \quad j\in\{1,2,\ldots,n\}$$

が成り立つ。これと (2.11) より、

$$\begin{aligned}\Phi(\xi\varphi^*)(a) &\ge \xi\rho(\mathscr{K})\varphi^*(a) - \xi^2\bar{\lambda}\frac{\alpha\rho(\mathscr{K})}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}a_\dagger}(1-\alpha\bar{\gamma})}\varphi^*(a)\\ &= \xi\varphi^*(a) + \left\{(\rho(\mathscr{K})-1) - \xi\bar{\lambda}\frac{\alpha\rho(\mathscr{K})}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}a_\dagger}(1-\alpha\bar{\gamma})}\right\}\xi\varphi^*(a) \ \ge\ \xi\varphi^*(a)\end{aligned}$$

が、ξ が十分小さければ成立する。したがって作用素 Φ の単調性と有界性に注意すると、有界な単調非減少列 $\{\Phi^n(\xi\varphi^*)\}_{n=0}^{+\infty}$ が構成でき、$\Phi(\varphi^\infty)=\varphi^\infty$ を満たす極限 $\varphi^\infty\in C\setminus\{\mathbf{0}\}$ が存在する。その極限が求める不動点 i^* に他ならない。 □

式 (2.3) より、任意のエンデミックな平衡解 i^* は次を満たす。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}i_j^*(a) = -\left\{\gamma_j(a) + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}(a)\right\}i_j^* + \lambda_j[a|i^*]\left(1-i_j^*\right) + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}(a)i_k^*,\\ i_j^*(0)=0, \quad j\in\{1,2,\ldots,n\}.\end{cases} \tag{2.12}$$

次の仮定を置く。

(A5) すべての $a,\sigma\in[0,a_\dagger]$ と $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ に対して、$\kappa_j(a,\sigma)\ge\kappa_j^-$ を満たす定数 $\kappa_j^-\in(0,+\infty)$ が存在する。

仮定 (A5) の下で $\varphi\in E_+\setminus\{\mathbf{0}\}$ に対して次が成り立つ。

$$\lambda_j[a|\varphi] \ \ge\ \kappa_j^-\int_0^{a_\dagger}P_j^*(\sigma)\varphi_j(\sigma)\mathrm{d}\sigma \ =:\ \lambda_j^-(\varphi) \ >\ 0, \quad j\in\{1,2,\ldots,n\}. \tag{2.13}$$

(2.12) より $\lambda_j^-(i^*) - \left(\gamma_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+ + \lambda_j^+\right)i_j^*(a) \ \le\ \mathrm{d}i_j^*(a)/\mathrm{d}a \ \le\ \lambda_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+$ が成り立つ。したがって積分して整理すると

$$\lambda_j^-(i^*)\mathrm{e}^{-\left(\gamma_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+ + \lambda_j^+\right)a_\dagger}a \ \le\ i_j^*(a) \ \le\ \left(\lambda_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+\right)a \tag{2.14}$$

が得られる。

エンデミックな平衡解 i^* が存在する場合の一意性について、本稿では紙面の都合上その証明を割愛させて頂くが、作用素 Φ の単調性と凹性を利用することで次の命題が成立することが分かる：

命題 2.2. 系 *(2.3)* のエンデミックな平衡解 $i^*\in C\setminus\{0\}$ は存在するならば高々一つである。

2.3 解の漸近挙動

本稿の最後に、エンデミックな非自明平衡解 $i^*\in C\setminus\{\mathbf{0}\}$ が存在する下では、(非自明な初期データを持つ) モデル (2.3) の解 i は $t\to+\infty$ で i^* に収束することを示す。ここで、非自明な初期データ $i_0=(i_{0,1},i_{0,2},\ldots,i_{0,n})\in C\setminus\{\mathbf{0}\}$ は、ある $\tau\in(0,a_\dagger)$ に対して

$$\int_\tau^{a_\dagger}P_j^*(\sigma)i_{0,j}(\sigma-\tau)\mathrm{d}\sigma>0, \quad j\in\{1,2,\ldots,n\} \tag{2.15}$$

を満たすものとして定義する。このとき、次の補題が成立する。

補題 2.2. $\tau \in (0, a_\dagger)$ は *(2.15)* が成立するような定数とする。すべての $t > \tau$ と $a \in [0, a_\dagger]$ に対して、次が成立する。

$$\lambda_j(t,a) > 0, \quad j \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

証明. (2.3) を特性線に沿って積分することで

$$i_j(t,a) = \begin{cases} i_{j,0}(a-t)\mathrm{e}^{-\int_0^t \left\{\lambda_j(\rho,a-t+\rho)+\gamma_j(a-t+\rho)+\sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}(a-t+\rho)\right\}\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\sigma \\ \quad + \int_0^t \left\{ \lambda_j(\sigma, a-t+\sigma) + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}(a-t+\sigma) i_k(\sigma, a-t+\sigma) \right\} & a-t>0; \\ \qquad \times \mathrm{e}^{-\int_\sigma^t \left\{\lambda_j(\rho,a-t+\rho)+\gamma_j(a-t+\rho)+\sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}(a-t+\rho)\right\}\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\sigma, \\ \\ \int_0^a \left\{ \lambda_j(t-a+\sigma, \sigma) + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}(\sigma) i_k(t-a+\sigma, \sigma) \right\} & t-a \geq 0 \\ \qquad \times \mathrm{e}^{-\int_\sigma^a \left\{\lambda_j(t-a+\rho,\rho)+\gamma_j(\rho)+\sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}(\rho)\right\}\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\sigma, \end{cases} \tag{2.16}$$

が得られる。今 $\tau \in (0, a_\dagger)$ なので、

$$\lambda_j(\tau, a) \geq \kappa_j^- \int_\tau^{a_\dagger} P_j^*(\sigma) i_{j,0}(\sigma - \tau)\mathrm{d}\sigma\, \mathrm{e}^{-\left(\lambda_j^+ + \gamma_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+\right)\tau} > 0$$

がすべての $a \in [0, a_\dagger]$ に対して成り立つ。すると $t \in (\tau, a_\dagger)$ に対して、$a - t > 0$ なら

$$i_j(t,a) \;\geq\; \int_0^t \lambda_j(\sigma, a-t+\sigma)\mathrm{d}\sigma\, \mathrm{e}^{-\left(\lambda_j^+ + \gamma_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+\right)a_\dagger} \;>\; 0$$

が成り立つので、

$$\lambda_j(t,a) \;\geq\; \kappa_j^- \int_t^{a_\dagger} P_j^*(\sigma) i_j(t,\sigma)\mathrm{d}\sigma \;>\; 0$$

が $t \in (\tau, a_\dagger)$ および $a \in [0, a_\dagger]$ に対して成り立つ。すると $t \in [a_\dagger, 2a_\dagger)$ および $a \in [0, a_\dagger]$ に対して、(2.16) の第二式より

$$\lambda_j(t,a) \geq \kappa_j^- \int_0^{a_\dagger} P_j^*(\sigma) \int_0^\sigma \lambda_j(t-\sigma+\rho, \rho)\mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{e}^{-\left(\lambda_j^+ + \gamma_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+\right)a_\dagger} > 0$$

が成り立つ。以下同様の手順で、$t \in [na_\dagger, (n+1)a_\dagger)$, $n = 1,2,\ldots,$ および $a \in [0, a_\dagger]$ に対して $\lambda_j(t,a) > 0$ を示すことが出来るため、題意は示される。 □

補題 2.2 より、次の補題が示される。

補題 2.3. 系 *(2.3)* にエンデミックな平衡解 $i^* \in C \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在するならば、ある定数 $\xi \in (0,1)$ と $t_0 > 0$ が存在して、

$$\xi i^* \leq U(t_0) i_0, \tag{2.17}$$

が非自明な初期データ $i_0 \in C$ に対して成立する。

証明. $t > a_\dagger$ の場合を考える。特性線に沿った積分 (2.16) より、

$$i_j(t,a) \geq \mathrm{e}^{-\left(\lambda_j^+ + \gamma_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+\right)a_\dagger} \int_0^a \lambda_j(t-a+\sigma, \sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{2.18}$$

が得られる。今、ある $t_0 > 3a_\dagger$ に対し $\underline{\lambda}_j := \inf_{(t,a) \in [t_0 - a_\dagger, t_0] \times [0, a_\dagger]} \lambda_j(t,a)$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ を定めると、補題 2.2 より $\underline{\lambda}_j > 0$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ である。すると (2.14) と (2.18) より

$$\begin{aligned} i_j(t_0, a) \;&\geq\; \mathrm{e}^{-\left(\lambda_j^+ + \gamma_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+\right)a_\dagger} \underline{\lambda}_j\, a \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-\left(\lambda_j^+ + \gamma_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+\right)a_\dagger}}{\lambda_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+} \underline{\lambda}_j \left(\lambda_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+ \right) a \\ &\geq\; \frac{\mathrm{e}^{-\left(\lambda_j^+ + \gamma_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+\right)a_\dagger}}{\lambda_j^+ + \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}^+} \underline{\lambda}_j i_j^*(a), \quad j \in \{1,2,\ldots,n\} \end{aligned}$$

が得られる。この不等式より、(2.17) を満たす十分小さい $\xi \in (0,1)$ が存在することが分かる。 □

補題 2.3 と半力学系 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ の単調性より

$$U(t)\xi i^* \leq U(t)U(t_0)i_0 \leq U(t)\mathbf{1}, \quad t \geq 0$$

が成立する。但し $\mathbf{1}$ は恒等的に 1 であるような C 内の関数である。すると性質 (2.7) より

$$\xi i^* = \xi U(t)i^* \leq U(t)\xi i^*, \quad U(t)\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$$

であるため、単調収束列 $\{U(t)^n\xi i^*\}_{n=0}^{+\infty}$ と $\{U(t)^n\mathbf{1}\}_{n=0}^{+\infty}$ によって系 (2.3) の解は上下から挟まれる。特にエンデミックな平衡解 i^* の一意性より、解は i^* に収束することになる。以上の結果を 命題 2.1 および命題 2.2 とまとめることで、次の主定理が得られる：

定理 2.1. $\rho(\mathscr{K}) > 1$ ならば、系 *(2.3)* にはエンデミックな平衡解 $i^* \in C\setminus\{\mathbf{0}\}$ が一意に存在し、非自明な初期データ $i_0 \in C\setminus\{\mathbf{0}\}$ に対するすべての解 $i(t) = U(t)i_0$ を吸引する。すなわち、$t \to +\infty$ に対して E 内で $U(t)i_0 \to i^*$ となる。

参考文献

[1] J. Arino, and P. van den Driessche, *A multi-city epidemic model*, Math. Popul. Studies, 10 (2003), pp. 175–193.

[2] L.J.S. Allen, B.M. Bolker, Y. Lou, and A.L. Nevai, *Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic reaction-diffusion model*, Disc. Cont. Dyn. Syst., 21 (2008), pp. 1–20.

[3] S.N. Busenberg, M. Iannelli, and H.R. Thieme, *Global behavior of an age-structured epidemic model*, SIAM J. Math. Anal., 22 (1991), pp. 1065–1080.

[4] G.D. Blasio, *Mathematical analysis for an epidemic model with spatial and age structure*, J. Evol. Equ., 10 (2010), pp. 929–953.

[5] O. Diekmann, and J.A.P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*, John Wiley and Sons, Chichester, 2000.

[6] Z. Feng, W. Huang, and C. Castillo-Chavez, *Global behavior of a multi-group SIS epidemic model with age structure*, J. Diff. Equat., 218 (2005), pp. 292–324.

[7] A. Iggidr, G. Sallet, and B. Tsanou, *Global stability analysis of a metapopulation SIS epidemic model*, Math. Popul. Studies, 19 (2012), pp. 115–129.

[8] H. Inaba, *A semigroup approach to the strong ergodic theorem of the multistate stable population process*, Math. Popul. Studies, 1 (1988), pp. 49–77.

[9] M.G. Krein, and M.A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Usephi. Mat. Nauk., 3 (1948) pp. 3–95 (in Russian): Amer. Math. Soc. Transl., 10 (1950) pp. 199–325 (in English).

[10] T. Kuniya, and R. Oizumi, *Existence result for an age-structured SIS epidemic model with spatial diffusion*, Nonlinear Anal. RWA, in press.

[11] A. Lajmanovich, and J.A. Yorke, *A deterministic model for gonorrhea in a nonhomogeneous population*, Math. Biosci., 28 (1976), pp. 221–236.

[12] M. Langlais, and S.N. Busenberg, *Global behaviour in age structured S.I.S. models with seasonal periodicities and vertical transmission*, J. Math. Anal. Appl., 213 (1997), pp. 511–533.

[13] R. Peng, and S. Liu, *Global stability of the steady states of an SIS epidemic reaction-diffusion model*, Nonlinear Anal., 71 (2009), pp. 239–247.

[14] L. Rass, and J. Radcliffe, *Spatial Deterministic Epidemics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[15] W. Wang, and X.Q. Zhao, *An epidemic model in a patchy environment*, Math. Biosci., 190 (2004), pp. 97–112.

[16] G.F. Webb, *Population models structured by age, size, and spatial position*, in Structured Population Models in Biology and Epidemiology, P. Magal, and S. Ruan, eds., Springer-Verlag, Berlin, 2008, pp. 1–49.

[17] P. Weng, and X.Q Zhao, *Spreading speed and traveling waves for a multi-type SIS epidemic model*, J. Diff. Equat., 229 (2006), pp. 270–296.