

All Global Bifurcation Curves for a Cell Polarization Model

龍谷大学大学院 理工学研究科 数理情報学専攻
 森 竜樹

本研究は久藤 衡介氏（電通大・情報理工）、辻川 亨氏（宮崎大・工）、および、四ツ谷 晶二氏（龍谷大・理工）との共同研究である。

S.Ishihara, et al. [1], M.Otsuji, et al. [7] に由来を持った, Y.Mori, A.Jilkinе and L.Edelstein-Keshet [6] による細胞極性モデル

$$(TP) \begin{cases} \varepsilon W_t = \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(V+1-W), & x \in (0, 1), t \in (0, \infty), \\ \varepsilon V_t = DV_{xx} - W(W-1)(V+1-W), & x \in (0, 1), t \in (0, \infty), \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = V_x(0, t) = V_x(1, t) = 0, \\ W(x, 0) = W_0(x), V(x, 0) = V_0(x) \end{cases}$$

を数学的に調べる。ここで、 $W(x, t)$ は活性タンパク質の濃度、 $V(x, t)$ は不活性タンパク質の濃度、 $\varepsilon > 0$ 、 $D > 0$ は拡散係数である。方程式より、タンパク質の総量は初期の総量 m に一致し、保存される。実際の現象では D は ε に比べて十分大きいと考えられている。

(TP) の定常問題において $D \rightarrow \infty$ とすると、 $V(x)$ は定数となる。この未知定数を \tilde{V} とかく。単調増加な解に着目すると、定常極限方程式

$$(SLP) \begin{cases} \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(\tilde{V}+1-W) = 0, & x \in (0, 1), \\ W_x(0) = W_x(1) = 0, \\ W(x) > 0, W_x(x) > 0, & x \in (0, 1), \quad \tilde{V} > 0, \\ \int_0^1 W dx + \tilde{V} = m \end{cases}$$

を得る。K.Kuto and T.Tsujikawa [3] により、この問題の数学的解析がはじめられた。

(SLP) の解析を行うにあたり、次の補助問題

$$(AP; \tilde{V}) \begin{cases} \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(\tilde{V}+1-W) = 0, & x \in (0, 1), \\ W_x(0) = W_x(1) = 0, \\ W_x(x) > 0 \text{ in } (0, 1) \end{cases}$$

を導入する。(AP; \tilde{V}) が解を持つための必要十分条件は、 $(\tilde{V}, \varepsilon^2) \in \mathcal{G}$ 、ただし、

$$\mathcal{G} := \left\{ (\tilde{V}, \varepsilon^2) : 0 < \varepsilon^2 < \frac{\tilde{V}}{\pi^2} \right\}$$

である。このとき、解は一意的である。

数値計算結果を紹介する。(SLP) の解が存在する点を図示すると図1のようになる。分岐曲線の各点ごとに一つの解が対応している。すべての正数 m に対して、(SLP) に対する分岐曲線の存在・非存在および分岐の様子を数学的に証明することが研究目的である。

まず、

$$m(\tilde{V}, \varepsilon^2) := \int_0^1 W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2) dx + \tilde{V}.$$

と定義する。 \mathcal{G} 上の $m(\tilde{V}, \varepsilon^2)$ のグラフを大域的分岐シートとよぶ。図1に大域的分岐シートの形状を示す。大域的分岐シートの等高線が分岐曲線になっている。分岐曲線の様子を調

べることはシートの形状と等高線を詳細に調べることに帰着される。しかし従来、大域的分岐シートを考えることはできても、表示式を求めることは不可能と考えられてきた。

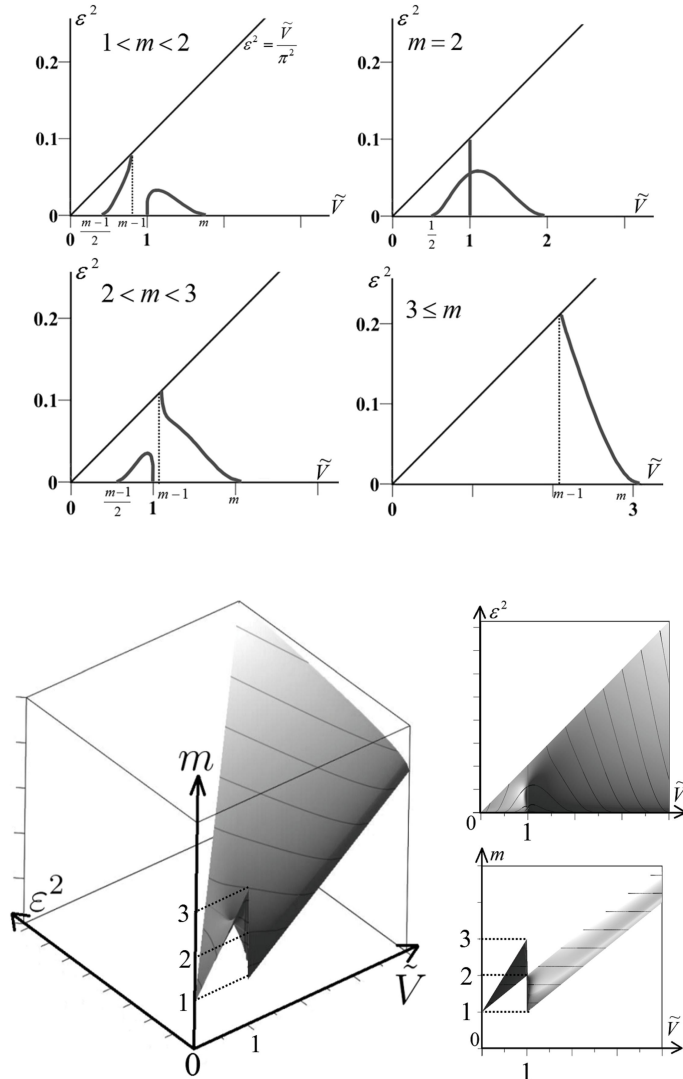


図 1: m ごとの分岐曲線と大域的分岐シート。

本研究では S.Kosugi, Y.Morita and S.Yotsutani [2] の結果を応用して、大域的分岐シートの完全楕円積分を用いた表示式を得ることに成功した ([4])。これに基づき [5] を得た。本講演では、さらに詳しい解析を行うことにより、数学的証明が極めて困難と思われてきた、(SLP) の分岐曲線の様子に関する次の問題

- すべて m について分岐曲線の存在・非存在を決定できるか？
- 分岐の方向、接続の様子はわかるか？
- 非自明定常解からの分岐点が一意的に存在することは証明できるか？
- 非自明定常解から分岐した分岐曲線の大域的存在とその行き先はどうなっているか？

を解決したことを報告する。具体的に述べると、次の定理を得た。

Theorem 0.1 *Let $0 < m \leq 1$ be given. There exists no solution of (SLP).*

Theorem 0.2 Let $1 < m < 2$ be given. The following holds:

- (i) There exists no solution of (SLP) for $\tilde{V} \in (0, (m-1)/2] \cup [m-1, 1] \cup [m, \infty)$.
- (ii) There exists the unique $\varepsilon(\tilde{V}) \in (0, \sqrt{\tilde{V}}/\pi)$ such that $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ is a solution of (SLP) for $\tilde{V} \in ((m-1)/2, m-1)$. Moreover, $\varepsilon(\tilde{V})$ is continuous on $[(m-1)/2, m-1]$ by defining $\varepsilon((m-1)/2) = 0$, $\varepsilon(m-1) = \sqrt{m-1}/\pi$.
- (iii) There exists the unique $\varepsilon(\tilde{V}) \in (0, \sqrt{\tilde{V}}/\pi)$ such that $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ is a solution of (SLP) for $\tilde{V} \in (1, m)$. Moreover, $\varepsilon(\tilde{V})$ is continuous on $[1, m]$, by defining $\varepsilon(1) = 0$, $\varepsilon(m) = 0$.

図2に $1 < m < 2$ のときのそれぞれの $(\tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ に対応する解 $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ の形状を示す.

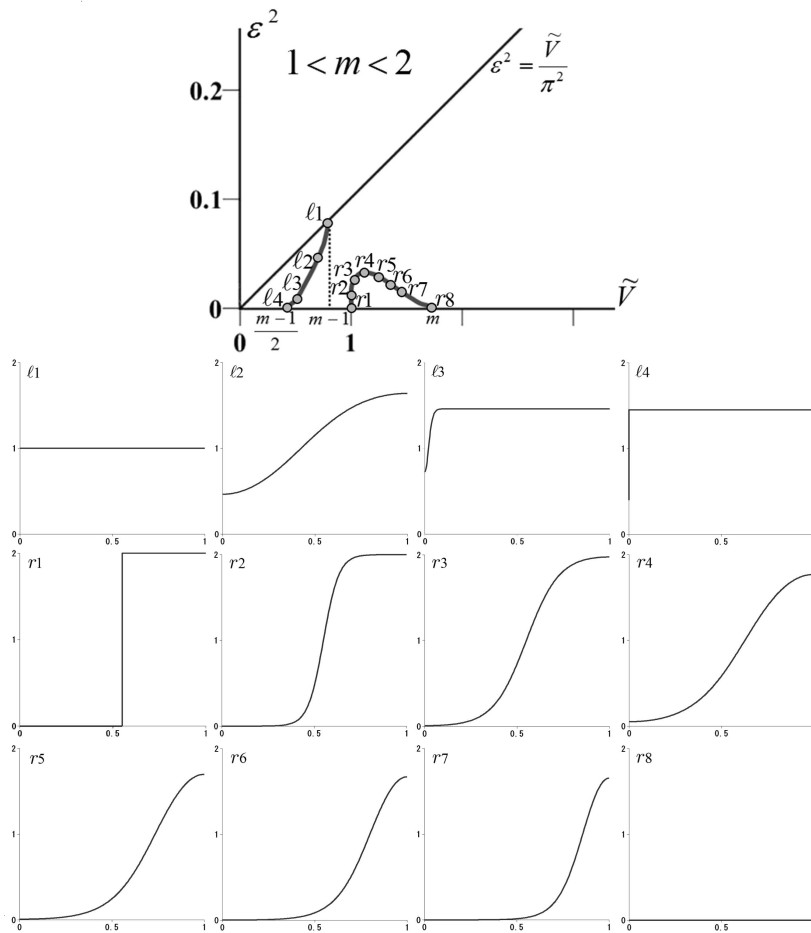


図2: $1 < m < 2$ に対する解 $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2)$ の形状.

Theorem 0.3 Let $m = 2$ be given. The following holds:

- (i) There exists no solution of (SLP) for $\tilde{V} \in (0, 1/2] \cup [2, \infty)$.
- (ii) There exists the unique $\varepsilon(\tilde{V}) \in (0, \sqrt{\tilde{V}}/\pi)$ such that $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ is a solution of (SLP) for $\tilde{V} \in (1/2, 1)$. Moreover, there exists the unique $\varepsilon_* = 0.23529 \dots$ such that $\varepsilon(\tilde{V})$ is continuous on $[1/2, 1]$ by defining $\varepsilon(1/2) = 0$, $\varepsilon(1) = \varepsilon_*$.
- (iii) For $\tilde{V} = 1$, there exists no solution of (SLP) for $\varepsilon \in [1/\pi, \infty)$, and there exists the unique solution $W(x; 1, \varepsilon^2)$ of (SLP) for $\varepsilon \in (0, 1/\pi)$.
- (iv) There exists the unique $\varepsilon(\tilde{V}) \in (0, \sqrt{\tilde{V}}/\pi)$ such that $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ is a solution of (SLP) for $\tilde{V} \in (1, 2)$. Moreover, $\varepsilon(\tilde{V})$ is continuous on $[1, 2]$ by defining $\varepsilon(1) = \varepsilon_*$, $\varepsilon(2) = 0$.

図3に $m = 2$ のときのそれぞれの $(\tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ に対応する解 $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ の形状を示す。

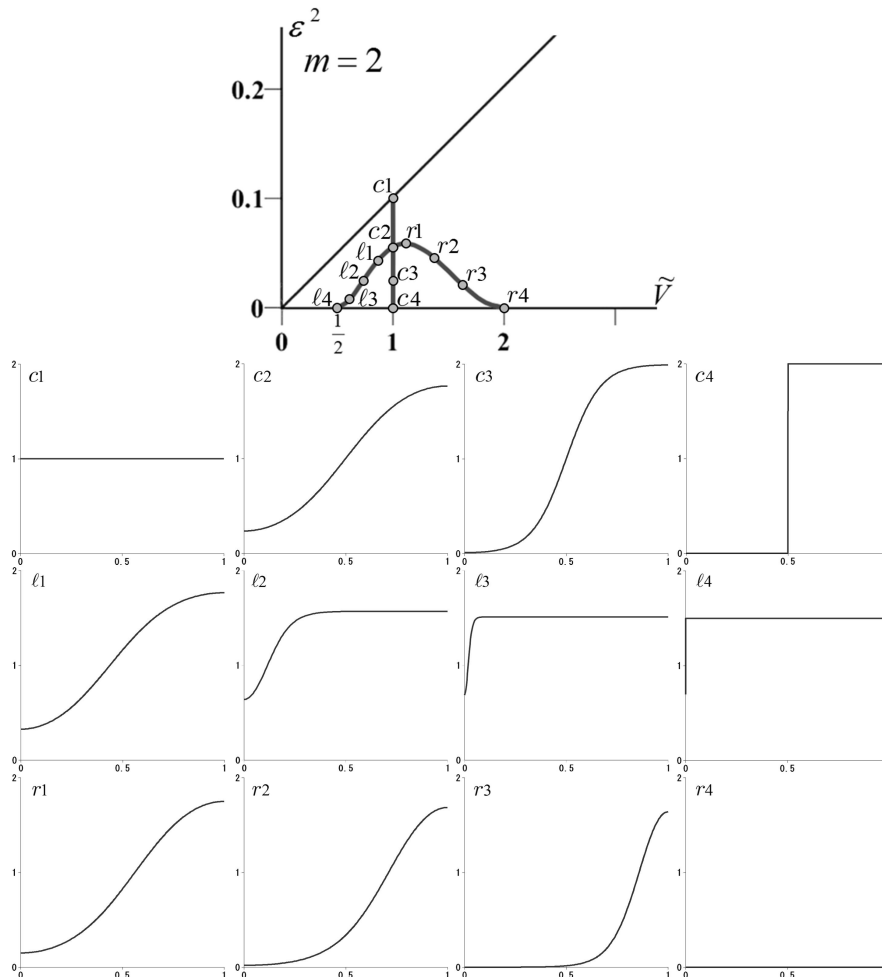


図3: $m = 2$ に対する解 $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2)$ の形状。

Theorem 0.4 Let $2 < m < 3$ be given. The following holds:

- (i) There exists no solution of (SLP) for $\tilde{V} \in (0, (m-1)/2) \cup [1, m-1] \cup [m, \infty)$.
- (ii) There exists the unique $\varepsilon(\tilde{V}) \in (0, \sqrt{\tilde{V}}/\pi)$ such that $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ is a solution of (SLP) for $\tilde{V} \in ((m-1)/2, 1)$. Moreover, $\varepsilon(\tilde{V})$ is continuous on $[(m-1)/2, 1]$ by defining $\varepsilon((m-1)/2) = 0$, $\varepsilon(1) = 0$.
- (iii) There exists the unique $\varepsilon(\tilde{V}) \in (0, \sqrt{\tilde{V}}/\pi)$ such that $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ is a solution of (SLP) for $\tilde{V} \in (m-1, m)$. Moreover, $\varepsilon(\tilde{V})$ is continuous on $[m-1, m]$ by defining $\varepsilon(m-1) = \sqrt{m-1}/\pi$, $\varepsilon(m) = 0$.

Theorem 0.5 Let $m \geq 3$ be given. The following holds:

- (i) There exists no solution of (SLP) for $\tilde{V} \in (0, m-1] \cup [m, \infty)$.
- (ii) There exists the unique $\varepsilon(\tilde{V}) \in (0, \sqrt{\tilde{V}}/\pi)$ such that $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2(\tilde{V}))$ is a solution of (SLP) for $\tilde{V} \in (m-1, m)$. Moreover, $\varepsilon(\tilde{V})$ is continuous on $[m-1, m]$ by defining $\varepsilon(m-1) = \sqrt{m-1}/\pi$, $\varepsilon(m) = 0$.

参考文献

- [1] S.Ishihara, M.Otsuji and A.Mochizuki, *Transient and steady state of mass-conserved reaction-diffusion systems*, Phys. Rev. E 75 015203(R) (2007).
- [2] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *Stationary solutions to the one-dimensional Cahn-Hilliard equation: Proof by the complete elliptic integrals*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **19**(2007), 609-629.
- [3] K. Kuto and T. Tsujikawa, *Bifurcation structure of steady-states for bistable equations with nonlocal constraint*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplement (2013), 467-476.
- [4] T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa, M. Nagayama and S. Yotsutani, *Global bifurcation sheet and diagrams of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization*, Proceedings of the 10th AIMS conference 2014, to appear.
- [5] T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa, and S. Yotsutani, *Exact multiplicity of stationary limiting problem of a cell polarization model*, preprint.
- [6] Y. Mori, A. Jilkine and L. Edelstein-Keshet, *Asymptotic and bifurcation analysis of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization*, SIAM J. Appl. Math **71**(2011), 1401-1427.
- [7] M.Otsuji, S.Ishihara, C.Co, et al., *A Mass Conserved Reaction-Diffusion System Captures Properties of Cell Polarity*, PLoS Compt. Biol. 3: e108 (2007).