数理解析研究所講究録
第 1995 巻 2016 年 122-131

発展作用素を用いた半線形放物型方程式に対する解の精度保証付き数値計算法

早稲田大学 理工学術院総合研究所 高安 亮紀 (Akitoshi Takayasu)[1]
Research Institute for Science and Engineering, Waseda University
早稲田大学 水口 信 (Makoto Mizuguchi)
Graduate School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University
筑波大学 久保 隆徹 (Takayuki Kubo)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba,
早稲田大学 大石 進一 (Shin'ichi Oishi)
Department of Applied Mathematics, Waseda University

1 はじめに

$J:=(t_0,t_1]$ $(0\le t_0<t_1<\infty)$, $\Omega=(0,1)^d\subset\mathbb{R}^d$ $(d=1,2,3)$ とし, 次のような半線形放物型方程式の初期値境界値問題を考える.

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=u^p & \text{in } J\times\Omega,\\ u=0 & \text{on } J\times\partial\Omega,\\ u(t_0,\cdot)=u_0 & \text{in } \Omega.\end{cases}\tag{1}$$

ここで $\partial_t u=\frac{\partial u}{\partial t}$, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$, $1<p<1+\frac{4}{d}$, $u_0\in L^2(\Omega)$ は与えられた初期関数である. 境界条件を考慮すると $D(\Delta)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ である.

V_N を $D(\Delta)$ の有限次元部分空間とし, $V_N=\operatorname{span}\left(\{\psi_m(x)\}_{|m|\le N^d}\right)$ とする. ここで N は一変数に対する基底関数の最大次数, $\psi_m(x)=\sin(m_1\pi x_1)\sin(m_2\pi x_2)\cdots\sin(m_d\pi x_d)$ は境界条件を考慮した Fourier 基底関数, m は多重指数で $m=(m_1,m_2,...,m_d)$ とする. このとき近似解 $\omega(t,x)$ を以下で決定する.

$$\omega(t,x)=\sum_{|m|\le N^d}u_m(t)\psi_m(x).\tag{2}$$

本稿の目的は (2) で定義された近似解 ω の Banach 空間 $C^0\left(J;L^2(\Omega)\right)$ における近傍に (1) の "*mild solution*" が一意存在する条件を導く事である. 特に, Laplacian Δ を用いて定義される正値作用素 Δ_μ の分数冪と Tanabe-Sobolevskii による発展作用素を用いた不動点定式化を利用し, 初期関数を $L^2(\Omega)$ 関数で与えた場合の局所包含定理を与える.

2 不動点定式化

局所包含定理を与える際に使用するある不動点形式を導出する. はじめに (1) の "*mild solution*" u が存在することと $z=u-\omega$ が次の方程式

$$\begin{cases}\partial_t z-\Delta z=(z+\omega)^p-\partial_t\omega+\Delta\omega & \text{in } J\times\Omega,\\ z=0 & \text{on } J\times\partial\Omega,\\ z(t_0,\cdot)=u_0-\omega(t_0,\cdot) & \text{in } \Omega\end{cases}$$

[1] takitoshi@suou.waseda.jp

の "*mild solution*" であることが同値であるという事実からはじめる（"*mild solution*" の定義は例えば [1] を参照せよ）．そしてある $\sigma > 0$ に対して, $z = e^{\sigma(t-t_0)}v$ と仮定すると v は次の方程式の解となる.

$$\begin{cases} \partial_t v + A(t)v = g(v) & \text{in } J \times \Omega, \\ v = 0 & \text{on } J \times \partial\Omega, \\ v(t_0, \cdot) = u_0 - \omega(t_0, \cdot) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

ここで $t \in J$ に対して $A(t)$, $g(v)$ は次をみたす.

$$\begin{aligned} A(t) &= -\Delta + \left(\sigma - p\omega(t)^{p-1}\right),\ \omega(t) = \omega(t, \cdot),\ t \in J, \\ g(v) &= e^{-\sigma(t-t_0)}\left\{ \left(\omega + e^{\sigma(t-t_0)}v\right)^p - \omega^p - p\omega^{p-1}e^{\sigma(t-t_0)}v + \omega^p - \partial_t\omega + \Delta\omega \right\}. \end{aligned}$$

パラメータ $\mu > 0$ を固定し, $\Delta_\mu = -\Delta + \mu$ とする. スペクトル定理より Δ_μ は正の固有値をもち, $\rho(\Delta_\mu)$ が Δ_μ の resolvent, $\sigma(\Delta_\mu)$ が Δ_μ の spectrum を表すとする. $V = H_0^1(\Omega)$ とし, V のノルムを $\|\cdot\|_V = \left(\|\nabla \cdot\|_{L^2}^2 + \mu\|\cdot\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$ と設定する. このとき $\sigma > 0$ を $\sigma - p\omega(t,x)^{p-1} \geq \mu$ for $t \in J,\ x \in \Omega$ をみたすように決めれば, $D(A(t)) = D(\Delta_\mu)(= D(\Delta))$ であり, $A(t)$ は $\forall u \in D(A(t)),\ t \in J$ に対して

$$\begin{aligned} |(A(t)u, v)_{L^2}| &= \left|(\nabla u, \nabla v)_{L^2} + \mu(u, v)_{L^2} + \left((\sigma - p\omega(t)^{p-1} - \mu)u, v\right)_{L^2}\right| \\ &\leq M\|u\|_V\|v\|_V, \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

を満たす $M > 0$ が存在し, さらに

$$\begin{aligned} (A(t)u, u)_{L^2} &= (\nabla u, \nabla u)_{L^2} + \left((\sigma - p\omega(t,x)^{p-1})u, u\right)_{L^2} \\ &\geq (\nabla u, \nabla u)_{L^2} + \mu(u, u)_{L^2} = (\Delta_\mu u, u)_{L^2} = \|u\|_V^2 \end{aligned} \tag{4}$$

をみたす. よって $-A(t)$ は $L^2(\Omega)$ において角域作用素となり, 各 $t \in J$ において解析半群 $\left\{e^{-sA(t)}\right\}_{s \geq 0}$ を生成する. また $-A(t)$ の固有値は (4) より $\lambda_{\min} > 0$ を $-\Delta$ の最小固有値とすると各 $t \in J$ において一様に $\lambda_A = \lambda_{\min} + \mu > 0$ で下から抑えられる.

そして $t, s \in J$ において

$$\|A(t)A(s)^{-1} - I\| = \|(A(t) - A(s))A(s)^{-1}\| \leq C|t - s|^\alpha$$

をみたす $C > 0$ と $\alpha > 0$ が存在する. ここで $\|\cdot\|$ は $L^2(\Omega)$ における作用素ノルムを表す.

以上の事実から $t \in J$ に対して, $-A(t)$ は $L^2(\Omega)$ において発展作用素 $\{U(t,s)\}_{t_0 \leq s \leq t \leq t_1}$ を生成する (Tanabe-Sobolevskii [2, 3, 4, 5]). 発展作用素は

$$U(t, s) = e^{-(t-s)A(s)} + \int_s^t e^{-(t-r)A(r)}R(r, s)dr \quad (t_0 \leq s \leq r \leq t \leq t_1) \tag{5}$$

で表現でき, $R(t,s)$ は次の Volterra 型積分方程式の解である.

$$\begin{cases} R(t, s) = R_1(t, s) + \displaystyle\int_s^t R_1(t, r)R(r, s)dr, \\ R_1(t, s) = -(A(t) - A(s))e^{-(t-s)A(s)}. \end{cases} \tag{6}$$

上記で生成された発展作用素 $\{U(t,s)\}_{t_0 \leq s \leq t \leq t_1}$ を用いて, 非線形作用素 $T : C(J; L^2(\Omega)) \to C(J; L^2(\Omega))$ が以下で定義できる.

$$T(v) := U(t, t_0)v(t_0) + \int_{t_0}^t U(t, s)g(v(s))ds \quad (t_0 \leq s \leq t \leq t_1). \tag{7}$$

この作用素 T を用いて不動点形式 $v = T(v)$ となる不動点が存在する十分条件を Banach の不動点定理の証明から導く. 本十分条件の成立を精度保証付き数値計算によって示すことで, (1) の "*mild solution*" の存在が示されることになる.

3 発展作用素に関する諸評価

定義 1 (作用素の分数冪). Δ_μ を $-\Delta+\mu$ とし, λ_i を Δ_μ の各固有値とする. このとき $\alpha\in(0,1)$ に対して, Δ_μ^α を以下のように定義する.

$$\Delta_\mu^\alpha u := \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^\alpha c_i\phi_i,\ D(\Delta_\mu^\alpha) := \left\{ u=\sum_{i=1}^\infty c_i\phi_i \in L^2(\Omega) : \sum_{i=1}^\infty c_i^2\lambda_i^{2\alpha} < \infty \right\}.$$

ここで $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は固有関数の L^2-完全正規直交基底であり, $c_i=(u,\phi_i)_{L^2}$, $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}=\sigma(\Delta_\mu)$ である.

補題 1 (分数冪ノルムの評価). Δ_μ を $-\Delta+\mu$ とし, (4) より $\alpha\in(0,1)$, $t\in J$ に対して, 次のノルム評価が成り立つ.

$$\left\|\Delta_\mu^\alpha u\right\|_{L^2} \le \|A(t)^\alpha u\|_{L^2},\ \forall u\in D(A(t)).$$

補題 2 (分数冪の埋め込み評価). 有界領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ $(d\in\mathbb{N})$, $2<p\le\infty$ に対して $\alpha>\frac{d(p-2)}{4p}$ とする. ただし $p=\infty$ のとき $\alpha>\frac{d}{4}$ とする. このとき $\Delta_\mu=-\Delta+\mu$ とし, 以下の評価が成り立つ.

$$\|u\|_{L^p}\le C_{p,\alpha}\|\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^2},\ \forall u\in\mathcal{D}(\Delta_\mu^\alpha),\ where\ \ C_{p,\alpha}:=\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{d(p-2)}{4p}\right)}{(4\pi)^{\frac{d(p-2)}{4p}}\Gamma(\alpha)}\min_{0<\beta\le1}g(\beta).$$

ただし $g(\beta)=\beta^{-\frac{d(p-2)}{4p}}((1-\beta)\lambda_{\min}+\mu)^{-\left(\alpha-\frac{d(p-2)}{4p}\right)}$, $\lambda_{\min}$ は $-\Delta$ の最小固有値, Γ はガンマ関数.

証明. はじめに $e^{-t\Delta_\mu}:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ を $-\Delta_\mu$ から生成される解析半群とする. $\beta>0$ に対して

$$\Delta_\mu^{-\beta}u=\Gamma(\beta)^{-1}\int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t\Delta_\mu}dt \tag{8}$$

と表現される. また $1\le q<p\le\infty$ に対して, $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ とおく. このとき Δ から生成される解析半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t\ge0}$ を用いて

$$\|e^{t\Delta}u\|_{L^p}\le(4\pi t)^{-\frac{d}{2r}}\|u\|_{L^q},\quad \forall u\in L^q(\Omega) \tag{9}$$

が成り立つ. ただし, $1/\infty=0$ とする.

$\alpha>\frac{d(p-2)}{4p}$, $0<\beta\le1$ と $u\in\mathcal{D}(\Delta_\mu^\alpha)$ に対して (8) を用いると

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p} &= \|\Delta_\mu^{-\alpha}\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^p}\\
&\le \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\|e^{-t\Delta_\mu}\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^p}dt\\
&\le \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\|e^{-t\Delta_\mu}\|_{L^2,L^p}\|\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^2}dt\\
&\le \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\|e^{-\beta t\Delta_\mu}\|_{L^2,L^p}\|e^{-(1-\beta)t\Delta_\mu}\|_{L^2,L^2}\|\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^2}dt
\end{aligned}$$

と評価する. ここで $e^{-t\Delta_\mu}=e^{-\mu t}e^{t\Delta}$ より, (9) 式で $q=2$ とすると $\frac{d}{2r}=\frac{d(p-2)}{4p}$ であるので

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L^p}\\
\le\ & \Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(4\pi\beta t)^{-\frac{d(p-2)}{4p}}e^{-\beta\mu t}e^{-t(1-\beta)(\lambda_{\min}+\mu)}\|\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^2}dt\\
=\ & (4\pi\beta)^{-\frac{d(p-2)}{4p}}\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^\infty t^{\alpha-1-\frac{d(p-2)}{4p}}e^{-t((1-\beta)\lambda_{\min}+\mu)}dt\|\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^2}\\
=\ & (4\pi\beta)^{-\frac{d(p-2)}{4p}}\Gamma(\alpha)^{-1}\left(\frac{1}{(1-\beta)\lambda_{\min}+\mu}\right)^{\alpha-1-\frac{d(p-2)}{4p}}\int_0^\infty s^{\alpha-1-\frac{d(p-2)}{4p}}e^{-s}\left(\frac{1}{(1-\beta)\lambda_{\min}+\mu}\right)ds\|\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^2}\\
=\ & (4\pi\beta)^{-\frac{d(p-2)}{4p}}\Gamma(\alpha)^{-1}\left(\frac{1}{(1-\beta)\lambda_{\min}+\mu}\right)^{\alpha-\frac{d(p-2)}{4p}}\Gamma\left(\alpha-\frac{d(p-2)}{4p}\right)\|\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^2}\\
=\ & \frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{d(p-2)}{4p}\right)}{(4\pi)^{\frac{d(p-2)}{4p}}\Gamma(\alpha)}\beta^{-\frac{d(p-2)}{4p}}((1-\beta)\lambda_{\min}+\mu)^{-\left(\alpha-\frac{d(p-2)}{4p}\right)}\|\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^2}
\end{aligned}$$

が成り立つ．そして $g(\beta)=\beta^{-\frac{d(p-2)}{4p}}((1-\beta)\lambda_{\min}+\beta\mu)^{-(\alpha-\frac{d(p-2)}{4p})}$ とすれば補題は成立する． □

補題 3 (半群の評価 1). 各 $t\in J$ で $-A(t)$ によって生成される解析半群 $\{e^{-sA(t)}\}_{s\geq 0}$ はスペクトル写像定理より次のように評価される．

$$\left\|e^{-sA(t)}\right\|\leq e^{-s\lambda_A}.$$

補題 4 (半群の評価 2). 各 $t\in J$ で $-A(t)$ によって生成される解析半群 $\{e^{-sA(t)}\}_{s\geq 0}$ は，$\alpha\in(0,1)$, $\beta\in(0,1]$ で次の評価が成立する．

$$\begin{aligned}\left\|A(t)^{\alpha}e^{-sA(t)}\right\| &= \sup_{x\in\sigma(A(t))}(x^{\alpha}e^{-sx})\\ &\leq \sup_{x\geq 0}(x^{\alpha}e^{-s\beta x})\sup_{x\in\sigma(A(t))}(e^{-s(1-\beta)x})\\ &\leq \left(\frac{\alpha}{e\beta}\right)^{\alpha}s^{-\alpha}e^{-s(1-\beta)\lambda_A}.\end{aligned}$$

補題 5 ($R_1(t,s)$ の評価). 式 (6) で与えられる $R_1(t,s)$ は $A(t)$ の定義より

$$R_1(t,s)=-(A(t)-A(s))e^{-(t-s)A(s)}=p\left(\omega(t)^{p-1}-\omega(s)^{p-1}\right)e^{-(t-s)A(s)}.$$

よって $R_1(t,s)$ の評価は

$$\begin{aligned}\|R_1(t,s)\| &= \left\|p(\omega(t)^{p-1}-\omega(s)^{p-1})e^{-(t-s)A(s)}\right\|\\ &= \left\|p(p-1)\left(\int_0^1|\theta\omega(t)+(1-\theta)\omega(s)|^{p-2}d\theta\right)(\omega(t)-\omega(s))e^{-(t-s)A(s)}\right\|\\ &= \left\|p(p-1)\left(\int_0^1|\theta\omega(t)+(1-\theta)\omega(s)|^{p-2}d\theta\right)\partial_t\omega(\xi)(t-s)e^{-(t-s)A(s)}\right\|,\ \xi\in(s,t)\\ &\leq p(p-1)\left\|\int_0^1|\theta\omega(t)+(1-\theta)\omega(s)|^{p-2}d\theta\right\|_{\infty,\infty}\|\partial_t\omega\|_{\infty,\infty}(t-s)e^{-(t-s)\lambda_A}\\ &=: C_\omega(t-s)e^{-(t-s)\lambda_A}\end{aligned}$$

となる．$\|\cdot\|_{\infty,\infty}$ は空間時間ともに sup をとったものとした．

補題 6 (ある積分評価). $0\leq s\leq r\leq t$ に対して，$a,\ b>0$ とすると

$$\int_s^t(t-r)^{a-1}(r-s)^{b-1}dr=(t-s)^{a+b+1}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

が成立する．

証明. $\frac{r-s}{t-s}=x$ とすると $r-s=(t-s)x$, $t-r=(t-s)(1-x)$, $dr=(t-s)dx$ より

$$\int_s^t(t-r)^{a-1}(r-s)^{b-1}dr=\int_0^1(t-s)^{a-1}(1-x)^{a-1}(t-s)^{b-1}x^{b-1}(t-s)dx=(t-s)^{a+b-1}B(a,b).$$

B はベータ関数で，$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ である． □

補題 7 ($R(t,s)$ の評価). 補題 5 において $\|R_1(t,s)\|\leq C_\omega(t-s)e^{-(t-s)\lambda_A}$ と評価されたとき，次の評価が成り立つ．

$$\|R(t,s)\|\leq\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-s)\right)e^{-(t-s)\lambda_A}.$$

証明. (6) で与えられた積分方程式の解は逐次近似を行なう事で以下で与えられる.

$$\begin{cases} R(t,s) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s), \\ R_m(t,s) = \displaystyle\int_s^t R_1(t,r) R_{m-1}(r,s) dr \quad (m \geq 2). \end{cases}$$

各 m について補題6を利用して以下の評価を得る.

$$\begin{aligned} \|R_2(t,s)\| &\leq \int_s^t \|R_1(t,r)\| \|R_1(r,s)\| dr \\ &\leq C_\omega^2 \int_s^t (t-r) e^{-(t-r)\lambda_A} (r-s) e^{-(r-s)\lambda_A} dr \\ &= C_\omega^2 e^{-(t-s)\lambda_A} \int_s^t (t-r)(r-s) dr \\ &= C_\omega^2 e^{-(t-s)\lambda_A} (t-s)^3 \frac{\Gamma(2)^2}{\Gamma(4)}, \end{aligned}$$

$$\|R_3(t,s)\| \leq \int_s^t \|R_1(t,r)\| \|R_2(r,s)\| dr \leq C_\omega^3 e^{-(t-s)\lambda_A} (t-s)^5 \frac{\Gamma(2)^3}{\Gamma(6)}.$$

これを繰り返すと

$$\|R_m(t,s)\| \leq C_\omega^m e^{-(t-s)\lambda_A} (t-s)^{2m-1} \frac{\Gamma(2)^m}{\Gamma(2m)}.$$

従って

$$\begin{aligned} \|R(t,s)\| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} C_\omega^m e^{-(t-s)\lambda_A} (t-s)^{2m-1} \frac{1}{(2m+1)!} \\ &= e^{-(t-s)\lambda_A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_\omega^{m+1} (t-s)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= e^{-(t-s)\lambda_A} \sqrt{C_\omega} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{C_\omega})^{2m+1} (t-s)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \\ &= e^{-(t-s)\lambda_A} \sqrt{C_\omega} \sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-s) \right). \end{aligned}$$

□

4 局所包含定理

本稿の残りでは, 前節で導いた非線形作用素 (7) を用いて, 時間局所解の存在に対する包含定理を導く. この局所包含定理では分数冪 $\alpha \in (0,1)$ を一つ固定し, 方程式 (3) の解 v を関数空間 $C(J; D(\Delta_\mu^\alpha))$ で近似解 ω 近傍に包含する. そこで時刻に対する重み付き関数空間を $C(J; D(\Delta_\mu^\alpha))$ の部分空間

$$X_\alpha := \left\{ u \in C(J; D(\Delta_\mu^\alpha)) : \sup_{t \in J} (t-t_0)^\alpha \|\Delta_\mu^\alpha u\|_{L^2} < +\infty \right\}$$

とし, そのノルムを $\|\cdot\|_{X_\alpha} := \sup_{t \in J} (t-t_0)^\alpha \|\Delta_\mu^\alpha \cdot\|_{L^2}$ とする. ノルム $\|\cdot\|_{X_\alpha}$ において X_α は Banach 空間 [2] となる. 以下では $\|v\|_{X_\alpha} \leq \rho$ をみたす $v \in X_\alpha$ に対して, Banach の不動点定理により, 不動点形式 $v = T(v)$ をみたす不動点 v の存在する十分条件を導く. この十分条件は精度保証付き数値計算を利用する事で, 厳密に検

[2] 関数空間 $C(J; D(\Delta_\mu^\alpha))$ のノルムは通常グラフノルムで定義されるが, $D(\Delta_\mu^\alpha)$ から $L^2(\Omega)$ への埋め込みが存在する事で上記ノルムはグラフノルムと同値となる.

証が可能である形になっている必要がある．そして，もしもこの十分条件が成り立つならば，$\|v\|_{X_\alpha} \le \rho$ をみたす $v \in X_\alpha$ が一意存在することになり，$v = e^{-\sigma(t-t_0)}(u-\omega)$ より，方程式 (1) の解は近似解 ω の近傍

$$B_J(\omega,\rho) := \left\{ u \in C(J; D(\Delta_\mu^\alpha)) : \sup_{t\in J}(t-t_0)^\alpha e^{-\sigma(t-t_0)} \|\Delta_\mu^\alpha(u-\omega)\|_{L^2} \le \rho \right\}$$

において一意存在する[3]．

定理 1. α を $\alpha \in \left(\frac{d(p-1)}{4p}, \frac{1}{p}\right)$ をみたす値とする．初期関数 u_0 に対して近似解 ω が $\|u_0 - \omega(t_0)\|_{L^2} \le \varepsilon_0$ をみたすとする．さらに ω は残差評価

$$\|\partial_t \omega - \Delta\omega - \omega^p\|_{C(J;L^2(\Omega))} \le \delta \tag{10}$$

をみたすとする．このときもし

$$W(\tau)\left(\varepsilon_0 + L_\omega(\rho)\rho^2 + \frac{\delta\tau}{1-\alpha}\right) < \rho \tag{11}$$

をみたす $\rho > 0$ が存在すれば，(1) の解 $u(t) := u(t,\cdot)$ $(t \in J)$ は近似解 ω の近傍 $B_J(\omega,\rho)$ の中に唯一存在する．ただし，

$$W(\tau) := \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \left\{1 + \frac{\tau\sqrt{C_\omega}}{1-\alpha}\sinh\left(\tau\sqrt{C_\omega}\right)\right\},$$

$$L_\omega(\rho) := p(p-1)C_{2p,\alpha}^2 e^{\sigma\tau}\left(\tau^\alpha \|\omega\|_{C(J;L^{2p}(\Omega))} + C_{2p,\alpha}e^{\sigma\tau}\rho\right)^{p-2} \tau^{1-p\alpha} B(1-\alpha, 1-p\alpha).$$

定理 1 の証明のために，以下の補題 2 つを用意する．

補題 8. $\Delta_\mu = -\Delta + \mu$, $\alpha \in (0,1)$ とし，任意の $\phi \in L^2(\Omega)$, $t,s \in J$ に対して，次の評価が成り立つ．

$$\left\|\Delta_\mu^\alpha U(t,s)\phi\right\|_{L^2} \le (t-s)^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \|\phi\|_{L^2}\left\{1 + \frac{(t-s)}{(1-\alpha)}\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-s)\right)\right\}.$$

証明. $\alpha \in (0,1)$, β_1, $\beta_2 \in (0,1]$ とし，任意の $\phi \in L^2(\Omega)$, $t,s \in J$ に対して，(5) と補題 1, 4, 7, そして sinh の単調性を用いると

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_\mu^\alpha U(t,s)\phi\right\|_{L^2} \\
\le\ & \left\|\Delta_\mu^\alpha e^{-(t-s)A(s)}\phi\right\|_{L^2} + \int_s^t \left\|\Delta_\mu^\alpha e^{-(t-r)A(r)}R(r,s)\phi\right\|_{L^2} dr \\
\le\ & \left\|A(s)^\alpha e^{-(t-s)A(s)}\phi\right\|_{L^2} + \int_s^t \left\|A(r)^\alpha e^{-(t-r)A(r)}R(r,s)\phi\right\|_{L^2} dr \\
\le\ & \left(\frac{\alpha}{e\beta_1}\right)^\alpha (t-s)^{-\alpha}e^{-(1-\beta_1)(t-s)\lambda_A}\|\phi\|_{L^2} + \int_s^t \left(\frac{\alpha}{e\beta_2}\right)^\alpha (t-r)^{-\alpha}e^{-(1-\beta_2)(t-r)\lambda_A}\|R(r,s)\phi\|_{L^2}dr \\
\le\ & \left(\frac{\alpha}{e\beta_1}\right)^\alpha (t-s)^{-\alpha}e^{-(1-\beta_1)(t-s)\lambda_A}\|\phi\|_{L^2} \\
& + \int_s^t \left(\frac{\alpha}{e\beta_2}\right)^\alpha (t-r)^{-\alpha}e^{-(1-\beta_2)(t-r)\lambda_A}\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(r-s)\right)e^{-(r-s)\lambda_A}\|\phi\|_{L^2}dr \\
\le\ & \left(\frac{\alpha}{e\beta_1}\right)^\alpha (t-s)^{-\alpha}e^{-(1-\beta_1)(t-s)\lambda_A}\|\phi\|_{L^2} \\
& + \left(\frac{\alpha}{e\beta_2}\right)^\alpha e^{-(1-\beta_2)(t-s)\lambda_A}\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-s)\right)\|\phi\|_{L^2}\int_s^t (t-r)^{-\alpha}e^{-\beta_2(r-s)\lambda_A}dr \\
\le\ & (t-s)^{-\alpha}\|\phi\|_{L^2}\left\{\left(\frac{\alpha}{e\beta_1}\right)^\alpha e^{-(1-\beta_1)(t-s)\lambda_A}\right. \\
& \left. +(t-s)^\alpha\left(\frac{\alpha}{e\beta_2}\right)^\alpha e^{-(1-\beta_2)(t-s)\lambda_A}\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-s)\right)\int_s^t (t-r)^{-\alpha}e^{-\beta_2(r-s)\lambda_A}dr\right\}
\end{aligned}$$

---
[3] $D(\Delta_\mu^\alpha)$ から $L^2(\Omega)$ への埋め込みが存在するため解 u は $C(J;L^2(\Omega))$ においても一意存在することが示せる．

となる. ここで $\beta_1 = \beta_2 = 1$ とすると

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_\mu^\alpha U(t,s)\phi\right\|_{L^2} \\
\le\ & (t-s)^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \|\phi\|_{L^2}\left\{1+(t-s)^\alpha\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-s)\right)\int_s^t (t-r)^{-\alpha}e^{-(r-s)\lambda_A}dr\right\} \\
=\ & (t-s)^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \|\phi\|_{L^2}\left\{1+(t-s)^\alpha\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-s)\right)(t-s)^{1-\alpha}\int_0^1 (1-x)^{-\alpha}e^{-(t-s)\lambda_A x}dx\right\} \\
\le\ & (t-s)^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \|\phi\|_{L^2}\left\{1+\frac{(t-s)}{(1-\alpha)}\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-s)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

□

補題 9. $\Delta_\mu = -\Delta + \mu$, $z_i \in D\left(\Delta_\mu^\alpha\right)$ $(i=1,2)$ とする. (2) で定義された ω に対して, $t \in J$ を固定すると, 次の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\left\|(\omega+z_1)^p-(\omega+z_2)^p-p\omega^{p-1}(z_1-z_2)\right\|_{L^2} \\
\le\ & p(p-1)C_{2p,\alpha}^2\int_0^1\int_0^1\left(\|\omega\|_{L^{2p}}+\eta C_{2p,\alpha}\left\|\Delta_\mu^\alpha(\theta z_1+(1-\theta)z_2)\right\|_{L^2}\right)^{p-2}d\eta\,\cdot \\
& \left\|\Delta_\mu^\alpha(\theta z_1+(1-\theta)z_2)\right\|_{L^2}d\theta\left\|\Delta_\mu^\alpha(z_1-z_2)\right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

ここで $C_{2p,\alpha}$ は補題 2 で現れる埋め込み定数.

証明. はじめに中間値の定理から

$$\begin{aligned}
&\left\{(\omega+z_1)^p-(\omega+z_2)^p-p\omega^{p-1}(z_1-z_2)\right\} \\
=\ & \int_0^1\frac{d}{d\theta}\left\{(\omega+\theta z_1+(1-\theta)z_2)^p-\theta p\omega^{p-1}(z_1-z_2)\right\}d\theta \\
=\ & p\int_0^1\left((\omega+\theta z_1+(1-\theta)z_2)^{p-1}-\omega^{p-1}\right)d\theta(z_1-z_2) \\
=\ & p\int_0^1\int_0^1\frac{d}{d\eta}(\omega+\eta(\theta z_1+(1-\theta)z_2))^{p-1}d\eta d\theta(z_1-z_2) \\
=\ & p(p-1)\int_0^1\int_0^1(\omega+\eta(\theta z_1+(1-\theta)z_2))^{p-2}d\eta(\theta z_1+(1-\theta)z_2)d\theta(z_1-z_2).
\end{aligned}$$

このとき Hölder の不等式, Minkowski の不等式, 補題 2 から

$$\begin{aligned}
&\left\|(\omega+z_1)^p-(\omega+z_2)^p-p\omega^{p-1}(z_1-z_2)\right\|_{L^2} \\
\le\ & p(p-1)\int_0^1\int_0^1\|\omega+\eta(\theta z_1+(1-\theta)z_2)\|_{L^{2p}}^{p-2}d\eta\,\|\theta z_1+(1-\theta)z_2\|_{L^{2p}}d\theta\,\|z_1-z_2\|_{L^{2p}} \\
\le\ & p(p-1)\int_0^1\int_0^1(\|\omega\|_{L^{2p}}+\eta\|\theta z_1+(1-\theta)z_2\|_{L^{2p}})^{p-2}d\eta\,\|\theta z_1+(1-\theta)z_2\|_{L^{2p}}d\theta\,\|z_1-z_2\|_{L^{2p}} \\
\le\ & p(p-1)C_{2p,\alpha}^2\int_0^1\int_0^1\left(\|\omega\|_{L^{2p}}+\eta C_{2p,\alpha}\left\|\Delta_\mu^\alpha(\theta z_1+(1-\theta)z_2)\right\|_{L^2}\right)^{p-2}d\eta\,\cdot \\
& \left\|\Delta_\mu^\alpha(\theta z_1+(1-\theta)z_2)\right\|_{L^2}d\theta\left\|\Delta_\mu^\alpha(z_1-z_2)\right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

□

証明. (定理 1) $v \in X_\alpha$ が $\|v\|_{X_\alpha} \le \rho$ をみたすとし, 各 $t \in J$ において $T(v(t))$ の評価を次のように得る.

$$\left\|\Delta_\mu^\alpha T(v(t))\right\|_{L^2} \le \left\|\Delta_\mu^\alpha U(t,t_0)v(t_0)\right\|_{L^2} + \int_{t_0}^t\left\|\Delta_\mu^\alpha U(t,s)g(v(s))\right\|_{L^2}ds. \tag{12}$$

よって (12) の各項を評価する. 以下では $v_0 = v(t_0)$ とする.

(12) 式の評価は補題 8 より

$$
\begin{aligned}
&\left\|\Delta_\mu^\alpha T(v(t))\right\|_{L^2} \\
\le\ & \left\|\Delta_\mu^\alpha U(t,t_0)v_0\right\|_{L^2} + \int_{t_0}^t \left\|\Delta_\mu^\alpha U(t,s)g(v(s))\right\|_{L^2} ds \\
\le\ & (t-t_0)^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \|v_0\|_{L^2}\left\{1+\left(\frac{t-t_0}{1-\alpha}\right)\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-t_0)\right)\right\} \\
& + \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \|g(v(s))\|_{L^2}\left\{1+\frac{(t-s)}{(1-\alpha)}\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-s)\right)\right\} ds \\
\le\ & (t-t_0)^{-\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \left\{1+\left(\frac{t-t_0}{1-\alpha}\right)\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-t_0)\right)\right\}\cdot \\
& \left(\|v_0\|_{L^2} + (t-t_0)^\alpha \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\|g(v(s))\|_{L^2} ds\right). \qquad (13)
\end{aligned}
$$

ここから $g(v(s))$ の評価をする．はじめに $g(v) = g_1(s) + g_2(s)$ と分けて，それぞれ

$$
\begin{aligned}
g_1(s) &= e^{-\sigma(s-t_0)}\left\{\left(\omega + e^{\sigma(s-t_0)}v\right)^p - \omega^p - p\omega^{p-1}e^{\sigma(s-t_0)}v\right\}, \\
g_2(s) &= e^{-\sigma(s-t_0)}\left(\omega^p - \partial_t\omega + \Delta\omega\right)
\end{aligned}
$$

とする．$g_1(s)$ は補題 9 で $z_1 = e^{\sigma(s-t_0)}v$, $z_2 = 0$ とすると

$$
\|g_1(s)\|_{L^2} \le p(p-1)C_{2p,\alpha}^2 e^{\sigma(s-t_0)}\left\|\Delta_\mu^\alpha v\right\|_{L^2}^2 \int_0^1\int_0^1 \left(\|\omega\|_{L^{2p}} + \theta\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(s-t_0)}\left\|\Delta_\mu^\alpha v\right\|_{L^2}\right)^{p-2} d\eta\theta d\theta
$$

という評価を得る．よって $\|v\|_{X_\alpha} \le \rho$ に対して

$$
\begin{aligned}
& (t-t_0)^\alpha \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\|g_1(s)\|_{L^2} ds \\
\le\ & (t-t_0)^\alpha \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\Big\{p(p-1)C_{2p,\alpha}^2 e^{\sigma(s-t_0)}\left\|\Delta_\mu^\alpha v\right\|_{L^2}^2 \cdot \\
& \int_0^1\int_0^1 \left(\|\omega\|_{L^{2p}} + \theta\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(s-t_0)}\left\|\Delta_\mu^\alpha v\right\|_{L^2}\right)^{p-2} d\eta\theta d\theta\Big\} ds \\
\le\ & (t-t_0)^\alpha \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\Big\{p(p-1)C_{2p,\alpha}^2 e^{\sigma(s-t_0)}(s-t_0)^{-p\alpha}\left((s-t_0)^\alpha\left\|\Delta_\mu^\alpha v\right\|_{L^2}\right)^2 \cdot \\
& \int_0^1\int_0^1 \left((s-t_0)^\alpha\left(\|\omega\|_{L^{2p}} + \theta\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(s-t_0)}\left\|\Delta_\mu^\alpha v\right\|_{L^2}\right)\right)^{p-2} d\eta\theta d\theta\Big\} ds \\
\le\ & (t-t_0)^\alpha p(p-1)C_{2p,\alpha}^2 e^{\sigma(t-t_0)}\rho^2 \int_0^1\int_0^1 \left((t-t_0)^\alpha\|\omega\|_{C(J;L^{2p}(\Omega))} + \theta\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(t-t_0)}\rho\right)^{p-2} d\eta\theta d\theta \cdot \\
& \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}(s-t_0)^{-p\alpha} ds \\
=\ & p(p-1)C_{2p,\alpha}^2 e^{\sigma(t-t_0)}\rho^2 \int_0^1\int_0^1 \left((t-t_0)^\alpha\|\omega\|_{C(J;L^{2p}(\Omega))} + \theta\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(t-t_0)}\rho\right)^{p-2} d\eta\theta d\theta \cdot \\
& (t-t_0)^{1-p\alpha}B(1-\alpha, 1-p\alpha). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

次に $g_2(s)$ は (10) を用いると

$$
\begin{aligned}
(t-t_0)^\alpha \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\|g_2(s)\|_{L^2} ds &\le \delta(t-t_0)^\alpha \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}e^{-\sigma(t-t_0)} ds \\
&= \delta(t-t_0)\int_0^1 r^{-\alpha}e^{-\sigma(t-t_0)(1-r)} dr \le \frac{\delta(t-t_0)}{1-\alpha}. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

よって, (13), (14), (15) から

$$
\begin{aligned}
&\|T(v)\|_{X_\alpha} \\
\leq\ & \sup_{t\in J}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \left\{1+\left(\frac{t-t_0}{1-\alpha}\right)\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-t_0)\right)\right\}\left(\|v_0\|_{L^2}+(t-t_0)^\alpha\int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\|g(v(s))\|_{L^2}ds\right) \\
\leq\ & \sup_{t\in J}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \left\{1+\left(\frac{t-t_0}{1-\alpha}\right)\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-t_0)\right)\right\}\cdot \\
& \left(\varepsilon_0+(t-t_0)^\alpha\int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\|g_1(s)\|_{L^2}ds+(t-t_0)^\alpha\int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\|g_2(s)\|_{L^2}ds\right) \\
\leq\ & \sup_{t\in J}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \left\{1+\left(\frac{t-t_0}{1-\alpha}\right)\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-t_0)\right)\right\}\left(\varepsilon_0+p(p-1)C_{2p,\alpha}^2 e^{\sigma(t-t_0)}\rho^2\cdot\right. \\
& \left.\int_0^1\int_0^1\left((t-t_0)^\alpha\|\omega\|_{C(J;L^{2p}(\Omega))}+\theta\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(t-t_0)}\rho\right)^{p-2}d\eta d\theta (t-t_0)^{1-p\alpha}B(1-\alpha,1-p\alpha)+\frac{\delta(t-t_0)}{1-\alpha}\right) \\
\leq\ & \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha\left\{1+\frac{\tau\sqrt{C_\omega}}{1-\alpha}\sinh\left(\tau\sqrt{C_\omega}\right)\right\}\left(\varepsilon_0+p(p-1)C_{2p,\alpha}^2e^{\sigma\tau}\rho^2\right. \\
& \left.\left(\tau^\alpha\|\omega\|_{C(J;L^{2p}(\Omega))}+C_{2p,\alpha}e^{\sigma\tau}\rho\right)^{p-2}\tau^{1-p\alpha}B(1-\alpha,1-p\alpha)+\frac{\delta\tau}{1-\alpha}\right) \\
=\ & W(\tau)\left(\varepsilon_0+L_\omega(\rho)\rho^2+\frac{\delta\tau}{1-\alpha}\right). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

定理の仮定 (11) と (16) より $\|T(v)\|_{X_\alpha}<\rho$ である.

次は縮小性をチェックする. $v_i\in X_\alpha$ s.t. $\|v_i\|_{X_\alpha}\leq\rho$ $(i=1,2)$ として補題 8 より

$$
\begin{aligned}
\left\|\Delta_\mu^\alpha\left(T(v_1(t))-T(v_2(t))\right)\right\|_{L^2} &\leq \int_{t_0}^t\left\|\Delta_\mu^\alpha U(t,s)\left(g(v_1(s))-g(v_2(s))\right)\right\|_{L^2}ds \\
&\leq\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha\left\{1+\left(\frac{t-t_0}{1-\alpha}\right)\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-t_0)\right)\right\}\int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\|g(v_1(s))-g(v_2(s))\|_{L^2}ds. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

そして $g(v_1(s))-g(v_2(s))=e^{-\sigma(s-t_0)}\left\{\left(\omega+e^{\sigma(s-t_0)}v_1\right)^p-\left(\omega+e^{\sigma(s-t_0)}v_2\right)^p-p\omega^{p-1}e^{\sigma(s-t_0)}(v_1-v_2)\right\}$ より, 補題 9 において $z_i=e^{\sigma(s-t_0)}v_i$, $(i=1,2)$ とおくと次が成立する.

$$
\begin{aligned}
\|g(v_1(s))-g(v_2(s))\|_{L^2}\leq & p(p-1)C_{2p,\alpha}^2e^{\sigma(s-t_0)}\int_0^1\int_0^1\left(\|\omega\|_{L^{2p}}+\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(s-t_0)}\left\|\Delta_\mu^\alpha(\theta v_1+(1-\theta)v_2)\right\|_{L^2}\right)^{p-2}d\eta \\
&\left\|\Delta_\mu^\alpha(\theta v_1+(1-\theta)v_2)\right\|_{L^2}d\theta\left\|\Delta_\mu^\alpha(v_1-v_2)\right\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

$\|v_i\|_{X_\alpha}\leq\rho$ $(i=1,2)$ より $\theta\in[0,1]$ に対して $\|\theta v_1+(1-\theta)v_2\|_{X_\alpha}\leq\rho$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\|g(v_1(s))-g(v_2(s))\|_{L^2}ds \\
\leq\ & \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\left\{p(p-1)C_{2p,\alpha}^2e^{\sigma(s-t_0)}\int_0^1\int_0^1\left(\|\omega\|_{L^{2p}}+\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(s-t_0)}\left\|\Delta_\mu^\alpha(\theta v_1+(1-\theta)v_2)\right\|_{L^2}\right)^{p-2}d\eta\cdot\right. \\
&\left.\left\|\Delta_\mu^\alpha(\theta v_1+(1-\theta)v_2)\right\|_{L^2}d\theta\left\|\Delta_\mu^\alpha(v_1-v_2)\right\|_{L^2}\right\}ds \\
\leq\ & p(p-1)C_{2p,\alpha}^2e^{\sigma(t-t_0)}\rho\int_0^1\left((t-t_0)^\alpha\|\omega\|_{C(J;L^{2p}(\Omega))}+\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(t-t_0)}\rho\right)^{p-2}d\eta\cdot \\
&(t-t_0)^{1-(p+1)\alpha}B(1-\alpha,1-p\alpha)\|v_1-v_2\|_{X_\alpha}. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

従って (17), (18) より

$$
\begin{aligned}
&\|T(v_1)-T(v_2)\|_{X_\alpha}\\
\le\ & \sup_{t\in J}(t-t_0)^\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha\left\{1+\left(\frac{t-t_0}{1-\alpha}\right)\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-t_0)\right)\right\}\int_{t_0}^t(t-s)^{-\alpha}\|g(v_1(s))-g(v_2(s))\|_{L^2}ds\\
\le\ & \sup_{t\in J}(t-t_0)^\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha\left\{1+\left(\frac{t-t_0}{1-\alpha}\right)\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-t_0)\right)\right\}\cdot\\
& p(p-1)C_{2p,\alpha}^2e^{\sigma(t-t_0)}\rho\int_0^1\left((t-t_0)^\alpha\|\omega\|_{C(J;L^{2p}(\Omega))}+\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(t-t_0)}\rho\right)^{p-2}d\eta\cdot\\
& (t-t_0)^{1-(p+1)\alpha}B(1-\alpha,1-p\alpha)\|v_1-v_2\|_{X_\alpha}\\
\le\ & \sup_{t\in J}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha\left\{1+\left(\frac{t-t_0}{1-\alpha}\right)\sqrt{C_\omega}\sinh\left(\sqrt{C_\omega}(t-t_0)\right)\right\}\cdot\\
& p(p-1)C_{2p,\alpha}^2e^{\sigma(t-t_0)}\rho\int_0^1\left((t-t_0)^\alpha\|\omega\|_{C(J;L^{2p}(\Omega))}+\eta C_{2p,\alpha}e^{\sigma(t-t_0)}\rho\right)^{p-2}d\eta\cdot\\
& (t-t_0)^{1-p\alpha}B(1-\alpha,1-p\alpha)\|v_1-v_2\|_{X_\alpha}\\
\le\ & \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha\left\{1+\frac{\tau\sqrt{C_\omega}}{1-\alpha}\sinh\left(\tau\sqrt{C_\omega}\right)\right\}\cdot\\
& p(p-1)C_{2p,\alpha}^2e^{\sigma\tau}\rho\left(\tau^\alpha\|\omega\|_{C(J;L^{2p}(\Omega))}+C_{2p,\alpha}e^{\sigma\tau}\rho\right)^{p-2}\tau^{1-p\alpha}B(1-\alpha,1-p\alpha)\|v_1-v_2\|_{X_\alpha}\\
=\ & W(\tau)L_\omega(\rho)\rho\|v_1-v_2\|_{X_\alpha}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

定理の仮定 (11) から $W(\tau)L_\omega(\rho)\rho<1$ であることが分かり, T の縮小性も示せた. □

本稿は主結果である定理 1 の証明の詳細を掲載することを優先し作成した. そのため定理 1 を用いた数値結果を掲載する余白を残すことができなかったが, 不動点形式 (7) が Newton 形式の不動点形式となっていることから, 解析半群を用いる不動点形式化よりも精密な包含ができるようになることが分かる. 定理 1 を用いたタイトな包含結果は多数得られているため今後, 紹介していきたい. 最後に本研究の今後の課題が長時間に渡る解の包含であることを注意したい. 長時間に渡る解の包み込みはいわゆる Wrapping effect による評価の悪化が考えられる. 現状では半群の拡散効果に対応する項が若干の増大を抑えることに成功しているが, より効果的な評価の見直しが必要である. 例えば, 時間局所的に解の検証が完了したら, 初期関数から現時刻までの解を再構成するなど, Wrapping effect による評価の増大を抑える技巧を今後検討していく.

謝辞

本研究は, 科研費 15K17596, 15K04946 ならびに JST, CREST の支援を受けたものである.

参考文献

[1] P. Quittner, P. Souplet, *Superlinear parabolic problems blow-up, global existence and steady states*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2007.

[2] H. Tanabe, *On the equations of evolution in a Banach space*, Osaka Mathematical Journal, 12:2 (1960), pp. 363–376.

[3] P. E. Sobolevskii, *On equations of parabolic type in Banach space with unbounded variable operator having a constant domain*, Akad. Nauk Azerbaidzan. SSR Doki, 17:6 (1961) (in Russian).

[4] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer, New York, 1983.

[5] H. Fujita, N. Saito, T. Suzuki, *Operator theory and numerical methods*, North Holland, 2001.

[6] A. Yagi, *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.