数理解析研究所講究録
第 1995 巻 2016 年 66-74

HDG methods with reduced stabilization

早稲田大学理工学術院　及川一誠
Faculty of Science and Engineering, Waseda University
Issei Oikawa

1 はじめに

本稿では，次数低減 Hybridized Discontinuous Galerkin (HDG) 法の研究結果 [5, 6] の概要について述べる．次数低減とは，安定化項において，L^2 直交射影を施して近似多項式の次数を下げるということを意味している．HDG 法における次数低減安定化を初めて提案したのは，Lehrenfeld [4] であるといわれている．筆者も Lehrenfeld とは独立して，同様の次数低減スキームを得て，さらに数学解析を行った [5, 6].

HDG 法では，要素内部の近似関数 u_h と，要素間境界上の近似関数 $\hat{u}_h$ の二種類を用いて定式化を行う．u_h は各要素ごとに $\hat{u}_h$ のみに依存するため，消去可能であるという特徴がある．その結果，最終的な未知関数は $\hat{u}_h$ だけとなり，未知数の個数は $\hat{u}_h$ の近似空間の次元に等しくなる．一般に，u_h よりも $\hat{u}_h$ の方が，近似空間の次元は小さいので，HDG 法は不連続 Galerkin 法よりも効率的な手法といえる．従来の HDG 法では，u_h と $\hat{u}_h$ の近似多項式次数を同じに揃えるのが自然であり，実際に，誤差の収束次数はこのときに最善となる．ところが最近，次数低減安定化を導入し，u_h の近似多項式次数を $\hat{u}_h$ の次数よりも 1 つだけ上げることで，誤差の収束次数をさらに 1 つ上げられることがわかった．また，非適合有限要素法との関連性についても明らかになった．

2 Poisson 方程式に対する次数低減 HDG 法

Ω は $\mathbb{R}^n(n=2,3)$ 内の有界な凸多角形あるいは多面体領域とする．Poisson 方程式の斉次 Dirichlet 境界値問題を考える:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

ただし，$f \in L^2(\Omega)$ は与えられた関数である．ここで，HDG 法のスキームを記述するために，記号を導入しておく．$\{\mathcal{T}_h\}_h$ を shape-regular な Ω のメッシュの族とする．h はメッシュサイズを意味する．$\mathcal{T}_h$ の各要素の辺の集合を $\mathcal{E}_h := \{e \subset \partial K : K \in \mathcal{T}_h\}$ と表す．$n=3$ の場合は辺ではなく面と呼ぶべきであるが，ここでは簡単のため，いずれの場合も辺と呼ぶことにする．すべての辺の和集合を $\Gamma_h := \bigcup_{e\in\mathcal{E}_h} e$ と表す．Γ_h はしばしば skelton と呼ばれる．HDG 法では u と $u|_{\Gamma_h}$ に対して二つの近似関数を導入し，それぞれ，$u_h \in V_h, \hat{u}_h \in \hat{V}_h$ と記す．$\hat{u}_h$ は approximate trace と呼ばれる．ここで，V_h 及び $\hat{V}_h$ は，それぞれ，区分 Sobolev 空間 $H^2(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^2(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$, $L^2_D(\Gamma_h) = \{\hat{v} \in L^2(\Gamma_h) : \hat{v} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ の有限次元部分空間である．通常は，V_h として element-wise k 次多項式 $P_k(\mathcal{T}_h)$ を用い，$\hat{V}_h$ としては edge-wise k 次多項式 $P_k(\mathcal{E}_h)$ を用いる．Ω 上の L^2 内積は $(\cdot,\cdot)_\Omega$ と表し，各要素毎あるいは各辺毎の内積の記号を以下のように定義する．

$$(u,v)_{\mathcal{T}_h} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K uv dx, \quad \langle u,v\rangle_{\partial\mathcal{T}_h} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} uv ds.$$

2.1 従来手法

Poisson 方程式に対する従来の HDG 法は次の通りである．導出については [7] を参照されたい．Find $\{u_h, \hat{u}_h\} \in P_k(\mathcal{T}_h) \times P_k(\mathcal{E}_h)$ s.t.

$$B_h^{\text{std}}(u_h, \hat{u}_h; v_h, \hat{v}_h) = (f, v_h)_\Omega \quad \forall\{v_h, \hat{v}_h\} \in P_k(\mathcal{T}_h) \times P_k(\mathcal{E}_h), \ (1)$$

ただし,

$$B_h^{\mathrm{std}}(u_h, \hat{u}_h; v_h, \hat{v}_h) = (\nabla u_h, \nabla v_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \boldsymbol{n} \cdot \nabla u_h, \hat{v}_h - v_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\ + \langle \boldsymbol{n} \cdot \nabla v_h, \hat{u}_h - u_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \\ + \langle \tau h_e^{-1}(\hat{u}_h - u_h), \hat{v}_h - v_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}. \tag{2}$$

ここで, $\boldsymbol{n}$ は要素間境界上の外向き単位法線ベクトルを表す. h_e は辺 e の長さである. $\tau > 0$ は安定化パラメータと呼ばれるもので, ある程度大きな値に設定する必要がある. 式 (2) の右辺の最後の項は安定化項と呼ばれる.

2.2 次数低減 HDG 法

本研究の主題である次数低減安定化のアイデアについて述べる. ここでは [5] における導出法を紹介する. P_k を $P_k(\mathcal{E}_h)$ への L^2 直交射影とする. ここでは, 天下り的であるが, 先に近似多項式の次数を 1 つずつ上げておく. つまり, $u_h \in P_{k+1}(\mathcal{T}_h), \hat{u}_h \in P_{k+1}(\mathcal{E}_h)$ として考える. 従来手法 (2) の右辺第 2 及び第 3 項目に注目すると, $\boldsymbol{n} \cdot \nabla u_h$ と $\boldsymbol{n} \cdot \nabla v_h$ は $P_k(\mathcal{E}_h)$ に属しているから, 次が成り立つ:

$$\langle \boldsymbol{n} \cdot \nabla u_h, \hat{v}_h - v_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \langle \boldsymbol{n} \cdot \nabla u_h, \mathsf{P}_k(\hat{v}_h - v_h) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h},$$
$$\langle \boldsymbol{n} \cdot \nabla v_h, \hat{u}_h - u_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \langle \boldsymbol{n} \cdot \nabla v_h, \mathsf{P}_k(\hat{u}_h - u_h) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}.$$

これにあわせて approximate trace を $\hat{u}_h = \mathsf{P}_k \hat{u}_h + (\mathsf{I} - \mathsf{P}_k)\hat{u}_h$ と分解して考えてみると, u_h と $\mathsf{P}_k \hat{u}_h$ とは直接的に関係しているが, u_h と $(\mathsf{I} - \mathsf{P}_k)\hat{u}_h$ とは安定化項を介してのみ関係していることがわかる. したがって, $\hat{u}_h$ の近似多項式次数を $k+1$ 次から一つ下げて, k 次にすることに, 何らかの意味があると思われる. 単純に次数を下げて, $u_h \in P_{k+1}(\mathcal{T}_h), \hat{u}_h \in P_k(\mathcal{E}_h)$ の組み合わせにして, 従来手法 (2) で計算しただけでは, 誤差のオーダーは上がらず, 特に利点は生じない. そこで, 安定化項において L^2 直交射影を施して, u_h と $\hat{u}_h$ の次数を揃える. つまり, 以下のように安定化項を置き換える:

$$\langle \tau h_e^{-1}(\hat{u}_h - u_h), (\hat{v}_h - v_h) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} \longrightarrow \langle \tau h_e^{-1} \mathsf{P}_k(\hat{u}_h - u_h), \mathsf{P}_k(\hat{v}_h - v_h) \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}.$$

この次数低減安定化項を用いる手法が本稿で提案する次数低減 HDG 法である．具体的には次の通りである: Find $\{u_h, \hat{u}_h\} \in P_{k+1}(\mathcal{T}_h) \times P_k(\mathcal{E}_h)$ s.t.

$$B_h(u_h, \hat{u}_h; v_h, \hat{v}_h) = (f, v_h)_\Omega \quad \forall\{v_h, \hat{v}_h\} \in P_{k+1}(\mathcal{T}_h) \times P_k(\mathcal{E}_h), \tag{3}$$

ただし，

$$\begin{aligned} B_h(u_h, \hat{u}_h; v_h, \hat{v}_h) = (\nabla u_h, \nabla v_h)_{\mathcal{T}_h} &+ \langle \boldsymbol{n} \cdot \nabla u_h, \hat{v}_h - v_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &+ \langle \boldsymbol{n} \cdot \nabla v_h, \hat{u}_h - u_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &+ \langle \tau h_e^{-1} \mathsf{P}_k(\hat{u}_h - u_h), \mathsf{P}_k(\hat{v}_h - v_h) \rangle_{\partial\mathcal{T}_h}. \end{aligned} \tag{4}$$

従来手法との違いは，u_h の次数が $\hat{u}_h$ に比べ 1 つ高いことと，次数低減安定化項を用いていることの 2 点だけである．

2.3 誤差評価

誤差評価の結果を述べるために，norm をいくつか定義しておく．$|\cdot|_{1,K}, |\cdot|_{2,K}$ をそれぞれ $H^1(K)$, $H^2(K)$ の Sobolev seminorm とすると，区分 Sobolev seminorm は次のように定義される．

$$|v|_{1,h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{1,K}^2, \qquad |v|_{2,h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |v|_{2,K}^2.$$

要素間での関数の不連続量を測る seminorm として，次のものを導入する．

$$|(v, \hat{v})|_{\mathrm{j}}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h, e \subset \partial K} \frac{1}{h_e} \|\mathsf{P}_k(\hat{v} - v)\|_{0,e}^2.$$

二本線の norm は通常の L^2-norm である．この seminorm の特別な名前はないが，本稿では jump seminorm と呼ぶことにする．次数低減安定化項を用いている関係で，jump seminorm の中にも L^2 直交射影が施されていることに注意されたい．energy norm は，上記の seminorm を足しあわせたものとして定義される．

$$|\!|\!|(v, \hat{v})|\!|\!|^2 := |v|_{1,h}^2 + |v|_{2,h}^2 + |(v, \hat{v})|_{\mathrm{j}}^2.$$

厳密解 u が十分滑らかな場合の誤差評価結果は，表 1 の通りである．表中の各数字はメッシュサイズ h に関する収束次数および近似多項式次数を表している．例えば，提案手法では，$u_h \in P_{k+1}(\mathcal{T}_h), \hat{u}_h \in P_k(\mathcal{E}_h)$ の組み合わせでは $|||u - u_h||| \leq Ch^{k+1}$ という誤差評価が証明されているといった具合である．従来手法・提案手法ともに optimal な誤差評価が得られていることには変わりない．しかし，$\hat{u}_h$ を基準として考えた場合，本質的な近似空間は同じであるにもかかわらず，提案手法のほうが，1 つずつ高い収束次数を実現している．

表 1　Poisson 方程式: 誤差の収束次数と近似多項式次数.

	$\|\|\|u - u_h\|\|\|$	$\|\|u - u_h\|\|$	u_h	$\hat{u}_h$
従来手法	k	$k+1$	k	k
提案手法	$k+1$	$k+2$	$k+1$	k

2.4　非適合有限要素法との関連

単体分割かつ $k = 0$ の場合の次数低減 HDG 法と Crouzeix-Raviart の非適合有限要素法との関連性も明らかになっている．

定理 1 ([5, Theorem 1])．$\mathcal{T}_h$ を単体分割のメッシュとする．$\{u_h, \hat{u}_h\} \in P_1(\mathcal{T}_h) \times P_0(\mathcal{E}_h)$ を次数低減 HDG 法 (3) の解とする．u_{CR} を Crouzeix-Raviart の非適合有限要素解とする．Π_h を単体間の境界 (辺あるいは三角形) の重心における値を用いて，単体内部に延長する作用素とする．このとき，次が成り立つ．

$$\Pi_h \hat{u}_h = u_{CR}.$$

つまり，$\hat{u}_h$ と u_{CR} とは，各境界の重心で値が一致する．

$k \geq 1$ の場合，このような等式は成立しない．また，u_h と u_{CR} の間にも上記のような等式は成立しない．

3 Stokes 方程式に対する次数低減 HDG 法

以下の no-slip 境界条件を課した Stokes 方程式を考える.

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0} \text{ on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

ただし, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega) := [L^2(\Omega)]^n$ は与えられた関数とする. これ以降, ベクトル値の関数に関する記号は, 太字で表す.

3.1 次数低減 HDG 法

Stokes 方程式の HDG 法として, 既に多種多様なものが提案されている (cf. [2]). 本研究では, Egger-Waluga [3] による interior penalty タイプのスキームを基にした次数低減 HDG 法を提案する: Find $\{\boldsymbol{u}_h, \hat{\boldsymbol{u}}_h, p_h\} \in \boldsymbol{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h) \times \boldsymbol{P}_k(\mathcal{E}_h) \times P_k(\mathcal{T}_h)$ s.t. $\forall (\boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h, q_h) \in \boldsymbol{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h) \times \boldsymbol{P}_k(\mathcal{E}_h) \times P_k(\mathcal{T}_h)$,

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{u}_h, \hat{\boldsymbol{u}}_h; \boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h) + b_h(\boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h; p_h) &= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h)_\Omega, \\ b_h(\boldsymbol{u}_h, \hat{\boldsymbol{u}}_h; q_h) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

ただし,

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{u}_h, \hat{\boldsymbol{u}}_h; \boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h) &= (\nabla \boldsymbol{u}_h, \nabla \boldsymbol{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \boldsymbol{n} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h - \boldsymbol{v}_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &\quad + \langle \boldsymbol{n} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} \\ &\quad + \langle \tau h_e^{-1} \mathsf{P}_k(\hat{\boldsymbol{u}}_h - \boldsymbol{u}_h), \mathsf{P}_k(\hat{\boldsymbol{v}}_h - \boldsymbol{v}_h) \rangle_{\partial\mathcal{T}_h}, \\ b_h(\boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h; p_h) &= -(\operatorname{div} \boldsymbol{v}_h, p_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle \hat{\boldsymbol{v}}_h - \boldsymbol{v}_h, p_h \boldsymbol{n} \rangle_{\partial\mathcal{T}_h}. \end{aligned}$$

従来手法との違いは, a_h の安定化項が次数低減されていることと, $\boldsymbol{u}_h$ と p_h の多項式次数がひとつだけ上がっていることである. [3] の結果を微修正すれば, 以下の離散 inf-sup 条件が得られる.

定理 2 ([6, Lemma 7]). 次をみたすような h に依存しない $\beta > 0$ が存在する:

$$\sup_{(\boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h) \in \boldsymbol{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h) \times \boldsymbol{P}_k(\mathcal{E}_h)} \frac{b_h(\boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h; q_h)}{|||(\boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h)|||} \geq \beta \|q_h\| \quad \forall q_h \in P_k(\mathcal{T}_h).$$

Stokes 方程式に対する HDG 法の energy norm は，Poisson 方程式の energy norm を単にベクトル値にしたものであるので，具体的な定義は省略する.

3.2 誤差評価

厳密解 $\boldsymbol{u}, p$ が十分滑らかな場合の誤差評価結果を，表 2 にまとめた. Poisson 方程式の場合と同様に，$\hat{\boldsymbol{u}}_h$ を基準として考えた場合，提案手法のほうが，流速・圧力の両方に関して，1 つずつ高い収束次数を実現している.

表 2 Stokes 方程式: 誤差の収束次数と近似多項式次数.

	$\lvert\lvert\lvert \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \rvert\rvert\rvert$	$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|$	$\|p - p_h\|$	$\boldsymbol{u}_h$	$\hat{\boldsymbol{u}}_h$	p_h
従来手法	k	$k+1$	k	k	k	$k-1$
提案手法	$k+1$	$k+2$	$k+1$	$k+1$	k	k

3.3 非適合有限要素法との関連

Poisson 方程式の場合と同様に，Crouzeix-Raviart 非適合有限要素法との関連性が明らかになっている. 流速の approximate trace だけでなく，圧力に関しても一致が見られる.

定理 3 ([6, Theorem 4]). $\mathcal{T}_h$ を単体分割のメッシュとする. $\{\boldsymbol{u}_h, \hat{\boldsymbol{u}}_h, p_h\} \in \boldsymbol{P}_1(\mathcal{T}_h) \times \boldsymbol{P}_0(\mathcal{E}_h) \times P_0(\mathcal{T}_h)$ を次数低減 HDG 法 (5) の解とし，$\{\boldsymbol{u}_{CR}, p_{CR}\}$ を Crouzeix-Raviart の非適合有限要素解とする. $\boldsymbol{\Pi}_h$ を単体の境界の重心における値を用いた延長作用素する. このとき,

次が成り立つ．

$$\boldsymbol{\Pi}_h \hat{\boldsymbol{u}}_h = \boldsymbol{u}_{CR}, \quad p_h = p_{CR}.$$

$k \geq 1$ の場合は，上記のような等式は成り立たない．しかし，安定化パラメータ τ を $+\infty$ に飛ばしたとき，Gauss-Legendre の非適合有限要素法 [1] の解 $\{\boldsymbol{u}_h^*, p_h^*\} \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h^{k+1} \times P_k(\mathcal{T}_h)$ に τ^{-1} のオーダーで収束することがわかっている．ここで，$\widetilde{\boldsymbol{V}}_h^{k+1}$ は Gauss-Legendre 非適合有限要素空間である．

定理 4 ([6, Theorem 6])**.** 安定化パラメータ τ は十分大きいとする．$\{\boldsymbol{u}_h^\tau, p_h^\tau\}$ を次数低減 HDG 法 (5) の解とする．このとき，次が成り立つ．

$$|\boldsymbol{u}_h^* - \boldsymbol{u}_h^\tau|_{1,h} + \|p_h^* - p_h^\tau\| \leq C\tau^{-1}\|\boldsymbol{f}\|.$$

収束速度が $O(\tau^{-1})$ であることを示すには，次の補題 5 のような逆不等式に相当するものが本質的に必要となる．

補題 5 ([6, Lemma 8])**.** 以下をみたすような $C > 0$ が存在する: 任意の $\{\boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h\} \in \boldsymbol{P}_{k+1}(\mathcal{T}_h) \times \boldsymbol{P}_k(\mathcal{E}_h)$ に対して，

$$\inf_{\widetilde{\boldsymbol{w}}_h \in \widetilde{\boldsymbol{V}}_h^{k+1}} |\!|\!|(\boldsymbol{v}_h - \widetilde{\boldsymbol{w}}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h - \mathsf{P}_k \widetilde{\boldsymbol{w}}_h)|\!|\!|_h \leq C|(\boldsymbol{v}_h, \hat{\boldsymbol{v}}_h)|_{\mathrm{j}}.$$

ただし，$|\!|\!|(\boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{v}})|\!|\!|_h^2 = |\boldsymbol{v}|_{1,h}^2 + |(\boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{v}})|_{\mathrm{j}}^2$ と定義する．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 24224004 および 26800089 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Á. Baran and G. Stoyan. Gauss-Legendre elements: a stable, higher order non-conforming finite element family. *Computing*, 79(1):1–21, 2007.

[2] B. Cockburn and K. Shi. Devising **HDG** methods for Stokes flow: an overview. *Comput. & Fluids*, 98:221–229, 2014.

[3] H. Egger and C. Waluga. *hp* analysis of a hybrid DG method for Stokes flow. *IMA J. Numer. Anal.*, 33(2):687–721, 2013.

[4] C. Lehrenfeld. Hybrid Discontinuous Galerkin methods for solving incompressible flow problems. *PhD Thesis: RWTH Aachen University*, 2010.

[5] I. Oikawa. A hybridized discontinuous Galerkin method with reduced stabilization. *J. Sci. Comput.*, 65(1):327–340, 2015.

[6] I. Oikawa. Analysis of a reduced-order HDG method for the Stokes equations. *J. Sci. Comput.*, in press.

[7] I. Oikawa and F. Kikuchi. Discontinuous Galerkin FEM of hybrid type. *JSIAM Lett*, 2:49–52, 2010.