数理解析研究所講究録
第 1995 巻 2016 年 17-26

滑らかな領域における有限要素法の $W^{1,\infty}$ 誤差評価

$W^{1,\infty}$-error Analysis for the Finite Element Method in a Smooth Domain

柏原 崇人 (東京工業大学大学院理工学研究科)[*1]
Takahito Kashiwabara (Tokyo Institute of Technology)

1 概要と主結果

有限要素法による定式化は変分法と関連が深いことから，エネルギーノルム（たとえば $-\Delta u=f$ の場合は $\|\nabla u\|_{L^2}$）を用いた解析との相性がよく，誤差評価もエネルギーノルムによってなされることが多い．一方で，非線形方程式への応用を鑑みると，エネルギーノルム以外の尺度で誤差を測りたい場合もしばしばある．特に有用性が高いと思われる $L^\infty, W^{1,\infty}$ ノルム誤差評価に関しては Nitsche, Schatz, Wahbin, Rannacher, Scott ら（たとえば [6, 7, 9]）による多くの先行研究があり，最良オーダー収束の証明が確立されているように思われる．

ところが，これらの先行研究では領域や厳密解の滑らかさに関してやや微妙な事情を抱えている．まず，領域が厳密に三角形分割されていることを前提とするものが多いが，実際の数値計算でこの状況が実現可能なのは，多面体領域の場合ということになる[*2]．その場合，多面体領域の角点から生じる特異性のせいで，領域が凸だとしても $W^{1,\infty}$ ノルムでは最良オーダー収束は得られなくなる．この困難を避けるには滑らかな領域を考えることになるが，今度は領域が厳密に三角形分割できなくなる（つまり $\Omega\neq\Omega_h$ となる）ことから生じる，“領域の摂動” による誤差を評価する必要に迫られる．このことを考慮した誤差評価は，凸領域かつ斉次ディリクレ境界条件のもとででしか考えられていないようである ([1, 11])．そこで本研究では，一般の滑らかな領域で非斉次ノイマン条件を課したポアソン方程式に対して，$W^{1,\infty}$ ノルムや L^∞ ノルムによる誤差評価を示す．

主定理を述べるために，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geq 2)$ を C^∞ 級の有界領域とする．ノイマン境界条件問題 $-\Delta u+u=f$ in Ω, $\partial u/\partial n=\tau$ on $\Gamma:=\partial\Omega$（n は Γ 上の外向き単位法線ベクトル），あるいは弱形式

$$\text{find } u\in H^1(\Omega) \text{ such that} \qquad a(u,v)=(f,v)_\Omega+(\tau,v)_\Gamma \qquad \forall v\in H^1(\Omega)$$

の解 u を考える．ただし，$G\subset\mathbb{R}^N$ に対して

$$a_G(u,v)=\int_G\nabla u\cdot\nabla v\,dx+\int_G uv\,dx, \qquad (f,v)_G=\int_G fv\,dx, \qquad (\tau,v)_{\partial G}=\int_{\partial G}\tau v\,d\gamma$$

とおき，$a=a_\Omega$ と書いた．データに関しては，少なくとも $f\in L^\infty(\Omega)$ と $\tau\in L^\infty(\Gamma)$ を仮定しておく．

$\{\mathcal{T}_h\}_{h\downarrow 0}$ を Ω の準一様な（フラットな三角形による）三角形分割とする．近似多面体 $\Omega_h:=\mathrm{int}(\bigcup_{T\in\mathcal{T}_h}T)$ の境界 $\Gamma_h:=\partial\Omega_h$ の各頂点は Γ 上にあるものとする．$\mathcal{T}_h$ に付随する P1 有限要素空間を V_h と書くとき，

$$\text{find } u_h\in V_h \text{ such that} \qquad a_h(u_h,v_h)=(\tilde{f},v_h)_{\Omega_h}+(\tilde{\tau},v_h)_{\Gamma_h} \qquad \forall v_h\in V_h$$

の解 u_h を考える．ただし，$a_h:=a_{\Omega_h}$ であり，$\tilde{f},\tilde{\tau}$ はそれぞれ f,τ の（滑らかさを保つ）任意の拡張である．

[*1] tkashiwa@math.titech.ac.jp

[*2] 近年，滑らかな領域を厳密に三角形分割する実用的な有限要素法 (Isogeometric Analysis) の開発も進んでいるが，ここでは伝統的な有限要素法の設定に則るものとする．

以上の設定のもとで，本稿では次の定理を示す：

定理 1.1. $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ ならば，その任意の（滑らかさを保つ）拡張 $\tilde{u}$ に対して次が成り立つ：

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \le Ch^2|\log h|\,\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}, \qquad \|\nabla(\tilde{u} - u_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \le Ch\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}.$$

注意 1.1. 上記の結果は，[8, p. 359] で掲げられた未解決問題と密接に関係している．実際，本稿の議論を微修正することにより，[8] のスキームに対する誤差評価を，滑らかな領域に拡張することができ，特に最良収束オーダー $O(h)$ が得られると期待される（多面体領域を扱っている [8] では，角点から生じる特異性のせいで，収束オーダーは $O(h^{1-d/p})$ とロスを生じている）．

2 準備

2.1 領域の摂動に関する評価（[4, Appendix] 参照）

Γ の符号付き距離関数を $d(x) = -\mathrm{dist}(x, \Gamma)$ if $x \in \Omega$, $d(x) = \mathrm{dist}(x, \Gamma)$ if $x \in \Omega^c$ で定める．$\Gamma = \partial\Omega$ の曲率のみに依存する $\delta_0 > 0$ が存在して，管状近傍 $\Gamma(\delta_0) := \{x \in \mathbb{R}^N : |d(x)| < \delta_0\}$ において分解

$$x = \pi(x) + d(x)n(\pi(x)), \quad \pi(x) \in \Gamma$$

が一意に定まる（[2, p. 355]）．メッシュサイズ h が十分小さければ，$\pi|_{\Gamma_h} : \Gamma_h \to \Gamma$ は同相写像となる．逆写像 $\pi^* : \Gamma \to \Gamma_h$ は $\bar{x} \mapsto \bar{x} + t^*(\bar{x})n(\bar{x})$ の形で表され，$t^* : \Gamma \to \mathbb{R}$ は $\|t^*\|_{L^\infty(\Gamma)} \le Ch^2 =: \delta$ 及び $\|t^*\|_{W^{1,\infty}(\Gamma)} \le Ch$ を満たす．さらに，領域の摂動に関する面積積分や体積積分の評価として，$p \in [1, \infty]$ に対して次が得られる：

$$\left|\int_\Gamma f\,d\gamma - \int_{\Gamma_h} f \circ \pi\,d\gamma_h\right| \le C\delta\|f\|_{L^1(\Gamma)}, \tag{2.1}$$

$$\|f - f \circ \pi\|_{L^p(\Gamma_h)} \le C\delta^{1-1/p}\|\nabla f\|_{L^p(\Gamma(\delta))}, \tag{2.2}$$

$$\|f\|_{L^p(\Gamma(\delta))} \le C\delta^{1/p}\|f\|_{L^p(\Gamma)} + C\delta\|\nabla f\|_{L^p(\Gamma(\delta))}. \tag{2.3}$$

(2.1)–(2.2) より，(2.3) の右辺の $\|f\|_{L^p(\Gamma)}$ を $\|f\|_{L^p(\Gamma_h)}$ に置きかえた評価も成り立つ．また，n_h を Γ_h に対する外向き単位法線ベクトルとするとき，$\|n_h - n \circ \pi\|_{L^\infty(\Gamma_h)} \le Ch$ が成り立つ．

2.2 拡張写像

π を用いて $f \in W^{1,p}(\Omega_h)$ を $P_h f \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ に拡張しよう $(1 \le p \le \infty)$．ここで，$\tilde{\Omega} := \Omega_h \cup \Gamma(\delta) = \Omega \cup \Gamma(\delta)$ である．$x \in \Gamma(\delta)$ における $P_h f(x)$ の値を定めればよいが，$x = \bar{x} + tn(\bar{x})$ $(\bar{x} \in \Gamma, t \in (-\delta, \delta))$ と分解して，Γ_h（つまり，$t = t^*(\bar{x})$）に関する折り返しにより $P_h f$ を構成する：

$$P_h f(x) = \begin{cases} f(\bar{x} + tn(\bar{x})) & \text{if} \quad -\delta < t \le t^*(\bar{x}), \\ f(\bar{x} + (2t^*(\bar{x}) - t)n(\bar{x})) & \text{if} \quad t^*(\bar{x}) \le t < \delta. \end{cases}$$

このとき，$P_h f \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ となり，特に

$$\|P_h f\|_{L^p(\Gamma(\delta))} \le C\|f\|_{L^p(\Omega_h \cap \Gamma(3\delta))}, \quad \|\nabla P_h f\|_{L^p(\Gamma(\delta))} \le C\|\nabla f\|_{L^p(\Omega_h \cap \Gamma(3\delta))}$$

が成り立つ（ただし，この拡張の安定性は以下の証明では用いない）．

さらに，$f \in W^{2,p}(\Omega)$ の拡張 $Pf \in W^{2,p}(\tilde{\Omega})$ を

$$Pf(x) = \begin{cases} f(\bar{x} + tn(\bar{x})) & \text{if} \quad -\delta < t \le 0, \\ 3f(\bar{x} - tn(\bar{x})) - 2f(\bar{x} - 2tn(\bar{x})) & \text{if} \quad 0 \le t < \delta, \end{cases}$$

で定めると（$t = 0$ で 1 階微分まで連続につながることに注意），次の安定性が成り立つ：

$$\|Pf\|_{L^p(\Gamma(\delta))} \le C\|f\|_{L^p(\Omega\cap\Gamma(\delta))}, \tag{2.4}$$

$$\|\nabla Pf\|_{L^p(\Gamma(\delta))} \le C\|\nabla f\|_{L^p(\Omega\cap\Gamma(\delta))}, \tag{2.5}$$

$$\|\nabla^2 Pf\|_{L^p(\Gamma(\delta))} \le C(\|\nabla^2 f\|_{L^p(\Omega\cap\Gamma(\delta))} + \|\nabla f\|_{L^p(\Omega\cap\Gamma(\delta))}). \tag{2.6}$$

さらに，次の意味で局所的な安定性も成り立つ：

$$\|Pf\|_{L^\infty(\Gamma(\delta)\cap G)} \le C\|f\|_{L^\infty(\Omega\cap\Gamma(\delta)\cap G_{2\delta})},$$
$$\|\nabla Pf\|_{L^\infty(\Gamma(\delta)\cap G)} \le C\|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega\cap\Gamma(\delta)\cap G_{2\delta})},$$
$$\|\nabla^2 Pf\|_{L^\infty(\Gamma(\delta)\cap G)} \le C(\|\nabla^2 f\|_{L^\infty(\Omega\cap\Gamma(\delta)\cap G_{2\delta})} + \|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega\cap\Gamma(\delta)\cap G_{2\delta})}).$$

ただし，G は任意の集合で，$G_{2\delta} := \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, G) < 2\delta\}$ である．

2.3 スケール

$z \in \Omega_h$ を固定し，z を中心とする球及び円環を

$$B(z;r) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - z| < r\}, \quad A(z;r,R) = \{x \in \mathbb{R}^N : r < |x - z| < R\}$$

と書くことにする．主定理の証明では，$u(z) - u_h(z)$ に対する（z に依らない）上からの評価を導く．そのために，z からの距離に関して，次のようにスケール（代表長さ）を設定する：

- 最小解像スケール: h,
- 最小ストライドスケール: Kh,
- 最大スケール: $d_0 = \operatorname{diam}\Omega_h$,
- 中間スケール: $d_j = 2^{-j}d_0\,(j = 1, \cdots, J)$，ただし $J := (\log \frac{d_0}{Kh}/\log 2$ の整数部分$) \approx |\log h|$.

このとき，

$$\Omega_h = \Big(\Omega_h \cap B(z;d_J)\Big) \cup \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_h \cap A(z;d_j,d_{j-1}) =: (\Omega_h \cap A_{J+1}) \cup \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_h \cap A_j.$$

つまり，Ω_h のうち，z と距離が d_J 以内の部分を「z と近い所」とみなし，それ以外の部分を，d_J を起点として幅（=ストライド）が 2 倍ずつ増えていく円環の族に分割したことになる．$Kh/2 \le d_J \le Kh$ であることから，K は起点のストライド幅とメッシュサイズの比を表しており，“resolution-stride ratio” と呼ぶことにする．後に，この K は $h \to 0$ において $O(1)$ に保ちつつ，十分大きな値に取る．

以下の議論で，「局所化の影響が少し広がる」ことを考慮する必要があるので，そのために

$$A'_j := A(z;d_{j+1},d_{j-2}), \quad A''_j := A(z;d_{j+2},d_{j-3})$$

という記号を準備しておく．ただし，$d_{J+1} = d_J,\ j > J+1$ のとき $d_j = -1$，$j < 1$ のとき $d_j = d_0$ であるものとする．A'_j, A''_j のスケールは本質的に A_j と同じ（つまり d_j）であることに注意する．

2.4 カットオフ関数（[10] 参照）

各スケールに応じた局所化のためのカットオフ関数を導入する．

- 最小解像スケール h:
  $z \in T$ となる $T \in \mathcal{T}_h$ に対して，T に台を持つ正則化デルタ関数 $\eta = \eta_z \in C_0^\infty(T)$ を考える．つまり，$(\eta, v_h)_T = v_h(z)$ 及び $(\eta, \nabla v_h)_T = \nabla v_h(z) \forall v_h \in P_1(T)$ と，
  $$\|\eta\|_{L^\infty(T)} \le Ch^{-N}, \qquad \|\nabla \eta\|_{L^\infty(T)} \le Ch^{-N-1}$$
  を満たすということである．さらに，$\mathrm{dist}\,(\mathrm{supp}\,\eta, \partial T) \ge Ch$ なので，$\Omega \triangle \Omega_h \subset \Gamma(\delta)$ より
  $$\mathrm{supp}\,\eta \subset \Omega \cap \Omega_h$$
  とできることに注意する．
- 中間スケール $d_j\,(j = 1, \cdots, J+1)$:
  $\omega_j \in C_0^\infty(A(z; \frac{7}{8}d_j, \frac{9}{8}d_{j-1}))$ を $\omega_j \equiv 1$ in A_j, $0 \le \omega \le 1$ in A_j' かつ，
  $$\|\nabla \omega_j\|_{L^\infty(\Omega_h \cap A_j')} \le Cd_j^{-1}, \qquad \|\nabla^2 \omega_j\|_{L^\infty(\Omega_h \cap A_j')} \le Cd_j^{-2}$$
  を満たすように取る．

$I_h : C(\overline{\Omega_h}) \to V_h$ を通常のラグランジュ補間とするとき，ω_j とメッシュ $\mathcal{T}_h$ の間の適合性条件として次が成り立つ．

補題 2.1. K が十分大きければ，任意の $v_h \in V_h$ に対して，$I_h(\omega_j v_h)$ の台は A_j' に含まれる．

Proof. 任意の $T' \in \mathcal{T}_h$ で $T' \cap \mathrm{supp}\,\omega_j \neq \emptyset$ となるものに対して，$T' \subset A_j'$ を示せばよい．$K \ge 16$ ならば $h \le \frac{1}{8}d_j$ なので，$\mathrm{supp}\,\omega_j \subset A(z; \frac{7}{8}d_j, \frac{9}{8}d_{j-1})$ より $T' \subset A(z; \frac{6}{8}d_j, \frac{10}{8}d_{j-1}) \subset A_j'$ が従う．□

2.5 グリーン関数

$-\Delta u + u = f$ in Ω, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ on Γ の任意の解 u は，グリーン関数 G を用いて
$$u(x) = \int_\Omega G(x-y) f(y)\, dy \qquad \forall x \in \Omega$$
と表示される．G の発散（減衰）の程度に関して，次の評価が成り立つ ([5]):
$$|\nabla^k G(x-y)| \le C|x-y|^{-k-N+2}, \qquad k = 0, 1, \cdots. \tag{2.7}$$
ただし，$k = 0, N = 2$ のときは $|G(x-y)| \le C\big|\log|x-y|\big|$ である．

3 定理の証明：$\|\nabla(\tilde{u} - u_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)}$ の誤差評価

証明を 5 段階に分けるが，その前に $z \in \Omega_h$ を任意に取り，z に付随した正則化デルタ関数 $\eta = \eta_z$ を考える．さらに，任意の単位ベクトル $\nu \in \mathbb{R}^N$ を取り，その方向への一階微分 $\partial = \partial_\nu$ を考える．定理を示すには，
$$\partial \tilde{u}(z) - \partial u_h(z) = (\partial \tilde{u} - \partial I_h \tilde{u})(z) + (\partial I_h \tilde{u} - \partial \tilde{u}, \eta)_T - (\tilde{u} - u_h, \partial \eta)_T \tag{3.1}$$

を（z, ν に依らずに）$Ch\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$ で押さえればよい．右辺の最初の 2 項は補間誤差評価と拡張の安定性から直ちにそうできるので，後は右辺の第 3 項が $Ch\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$ で評価できることを示せば十分である．

3.1 Step 1: $\|g - g_h\|_{W^{1,1}}$ の誤差評価に帰着させる

$g \in C^2(\overline{\Omega})$ を $-\Delta g + g = \partial\eta$ in Ω, $\frac{\partial g}{\partial n} = 0$ on Γ の解とする．弱形式で言えば

$$a(v, g) = (v, \partial\eta)_\Omega \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.2}$$

これに対応した有限要素解を $g_h \in V_h$ とする：

$$a_h(v_h, g_h) = (v_h, \partial\eta)_{\Omega_h} \qquad \forall v_h \in V_h.$$

もし $\Omega = \Omega_h$ ならば，ガラーキン直交性を 2 回用いて $(u - u_h, \partial\eta)_T = a(u - u_h, g) = a(u - v_h, g - g_h)$ がすぐに得られるが，今は $\Omega \neq \Omega_h$ のためそうならない．しかしながら，次の等式が成り立つ：

補題 3.1. 任意の $v_h \in V_h$ に対して次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}(\tilde{u} - u_h, \partial\eta)_{\Omega_h} = a_h(\tilde{u} - v_h, Pg - g_h)& \\ - (\tilde{u} - v_h, -\Delta Pg + Pg)_{\Omega_h\setminus\Omega} &- \left(\tilde{u} - v_h, \frac{\partial Pg}{\partial n_h}\right)_{\Gamma_h} \\ + (\Delta\tilde{u} - \tilde{u} + \tilde{f}, Pg - g_h)_{\Omega_h\setminus\Omega} &- \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n_h} - \tau, Pg - g_h\right)_{\Gamma_h} \\ + (f, g)_{\Omega\setminus\Omega_h} - (\tilde{f}, Pg)_{\Omega_h\setminus\Omega} &+ (\tau, g)_\Gamma - (\tilde{\tau}, Pg)_{\Gamma_h} + a_{\Omega_h\setminus\Omega}(\tilde{u}, Pg) - a_{\Omega\setminus\Omega_h}(u, g).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Proof. $\operatorname{supp}\eta \subset \Omega \cap \Omega_h$ なので，試験関数として $v = u - P_h u_h \in H^1(\Omega)$ を取ることにより，

$$\begin{aligned}&(\tilde{u} - u_h, \partial\eta)_{\Omega_h} = (u - P_h u_h, \partial\eta)_\Omega = a(u - P_h u_h, g) \\ &= a_h(\tilde{u} - u_h, Pg) + a_{\Omega\setminus\Omega_h}(u - P_h u_h, g) - a_{\Omega_h\setminus\Omega}(\tilde{u} - u_h, Pg) \qquad (\because \textstyle\int_\Omega = \int_{\Omega_h} + \int_{\Omega\setminus\Omega_h} - \int_{\Omega_h\setminus\Omega}) \\ &= a_h(\tilde{u} - v_h, Pg - g_h) \\ &\quad + a_h(v_h - u_h, Pg - g_h) + a_{\Omega\setminus\Omega_h}(u - P_h u_h, g) - a_{\Omega_h\setminus\Omega}(\tilde{u} - u_h, Pg) \\ &\quad + a_h(\tilde{u} - u_h, g_h)\end{aligned} \tag{3.4}$$

を得る．(3.4) の右辺第 2 項を次のように変形する：

$$\begin{aligned}a_h(v_h - u_h, Pg - g_h) &= \underbrace{a(P_h(v_h - u_h), g)}_{=(P_h(v_h - u_h), \partial\eta)_\Omega} - \underbrace{a_h(v_h - u_h, g_h)}_{=(v_h - u_h, \partial\eta)_{\Omega_h}} + a_{\Omega_h\setminus\Omega}(v_h - u_h, Pg) - a_{\Omega\setminus\Omega_h}(P_h(v_h - u_h), g) \\ &= a_{\Omega_h\setminus\Omega}(v_h - u_h, Pg) - a_{\Omega\setminus\Omega_h}(P_h v_h - P_h u_h, g). \qquad (\because \operatorname{supp}\eta \subset \Omega \cap \Omega_h)\end{aligned}$$

これを (3.4) に代入し直すと，$P_h u_h$ と u_h の項がちょうど打ち消し合うから，

$$\begin{aligned}((3.4)\text{ の右辺の 2 行目}) &= a_{\Omega\setminus\Omega_h}(u - P_h v_h, g) - a_{\Omega_h\setminus\Omega}(\tilde{u} - v_h, Pg) \\ &= (u - P_h v_h, \underbrace{-\Delta g + g}_{=\partial\eta=0})_{\Omega\setminus\Omega_h} - (\tilde{u} - v_h, -\Delta Pg + Pg)_{\Omega_h\setminus\Omega} - \left(\tilde{u} - v_h, \frac{\partial Pg}{\partial n_h}\right)_{\Gamma_h}\end{aligned}$$

となって（ここで部分積分を用いた），(3.3) の右辺の 2 行目が得られる．

次に，(3.4) の右辺第 5 項を次のように変形する：

$$a_h(\tilde{u}-u_h, g_h) = a(u, P_h g_h) - a_h(u_h, g_h) + a_{\Omega_h\setminus\Omega}(\tilde{u}, g_h) - a_{\Omega\setminus\Omega_h}(u, P_h g_h).$$

右辺の最初の 2 項は

$$\begin{aligned}
&(f, P_h g_h)_{\Omega\setminus\Omega_h} - (\tilde{f}, g_h)_{\Omega_h\setminus\Omega} + (\tau, P_h g_h)_\Gamma - (\tilde{\tau}, g_h)_{\Gamma_h}\\
&= (\tilde{f}, Pg - g_h)_{\Omega_h\setminus\Omega} - (f, g - P_h g_h)_{\Omega\setminus\Omega_h} + (\tilde{\tau}, Pg - g_h)_{\Gamma_h} - (\tau, g - P_h g_h)_\Gamma\\
&\qquad - (\tilde{f}, Pg)_{\Omega_h\setminus\Omega} + (f, g)_{\Omega\setminus\Omega_h} - (\tilde{\tau}, Pg)_{\Gamma_h} + (\tau, g)_\Gamma
\end{aligned}$$

に等しく，後ろの 2 項は

$$\begin{aligned}
&a_{\Omega\setminus\Omega_h}(u, g - P_h g_h) - a_{\Omega_h\setminus\Omega}(\tilde{u}, Pg - g_h) - a_{\Omega\setminus\Omega_h}(u, g) + a_{\Omega_h\setminus\Omega}(\tilde{u}, Pg)\\
&= (\underbrace{-\Delta u + u}_{=f}, g - P_h g_h)_{\Omega\setminus\Omega_h} + \Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=\tau}, g - P_h g_h\Big)_\Gamma + (\Delta\tilde{u} - \tilde{u}, Pg - g_h)_{\Omega_h\setminus\Omega} - \Big(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_h}, Pg - g_h\Big)_{\Gamma_h}\\
&\qquad - a_{\Omega\setminus\Omega_h}(u, g) + a_{\Omega_h\setminus\Omega}(\tilde{u}, Pg)
\end{aligned}$$

等しいので，結局次を得る：

$$\begin{aligned}
a_h(\tilde{u}-u_h, g_h) &= (\Delta\tilde{u} - \tilde{u} + \tilde{f}, Pg - g_h)_{\Omega_h\setminus\Omega} - \Big(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_h} - \tau, Pg - g_h\Big)_{\Gamma_h}\\
&\quad + (f, g)_{\Omega\setminus\Omega_h} - (\tilde{f}, Pg)_{\Omega_h\setminus\Omega} + (\tau, g)_\Gamma - (\tilde{\tau}, Pg)_{\Gamma_h} + a_{\Omega_h\setminus\Omega}(\tilde{u}, Pg) - a_{\Omega\setminus\Omega_h}(u, g).
\end{aligned}$$

以上を総合して，(3.3) を得る． □

以下，$v_h = I_h\tilde{u}$ として (3.3) の右辺の各項を評価する．

- 第 1 項：補間誤差評価と拡張の安定性より，$a_h(\tilde{u}-u_h, Pg - g_h) \le Ch\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}\|Pg - g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)}$.
- 第 2 項：補間誤差評価より，$\|\tilde{u} - v_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \le Ch^2\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$ である．次に，$\Omega_h\setminus\Omega \subset \Gamma(\delta)$ と拡張作用素 P の安定性 (2.4)–(2.6) より，

$$\|-\Delta Pg + Pg\|_{L^1(\Omega_h\setminus\Omega)} \le C\|Pg\|_{W^{2,1}(\Gamma(\delta))} \le C\|g\|_{W^{2,1}(\Omega\cap\Gamma(\delta))}$$

となるが，ここでは主要部 $\|\nabla^2 g\|_{L^1(\Omega\cap\Gamma(\delta))}$ の評価のみ与える．$\operatorname{supp}\eta \cap \Gamma(\delta) = \emptyset$ なのでグリーン関数の評価 (2.7) が使えて，

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2 g\|_{L^1(\Omega\cap\Gamma(\delta))} &= \sum_{j=1}^{J+1}\int_{\Omega\cap\Gamma(\delta)\cap A_j}\left|\int_{\operatorname{supp}\eta}\partial\nabla^2 G(x-y)\eta(y)\,dy\right|dx\\
&\le C\sum_{j=1}^{J+1}\operatorname{meas}(\Gamma(\delta)\cap A_j)\operatorname{meas}(\operatorname{supp}\eta)\,d_j^{-N-1}h^{-N}\\
&\le C\sum_{j=1}^{J+1}(\delta d_j^{N-1})h^N d_j^{-N-1}h^{-N} \le Ch^2\sum_{j=1}^{J+1}d_j^{-2} \le Ch^2 d_J^{-2} \le C
\end{aligned}$$

を得る．以上より，$|(\tilde{u} - v_h, -\Delta Pg + Pg)_{\Omega_h\setminus\Omega}| \le Ch^2\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$ となる．

- 第 3 項：補間誤差評価より $\|\tilde{u}-v_h\|_{L^\infty(\Gamma_h)} \le Ch^2\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$. 一方で $\frac{\partial g}{\partial n}=0$ on Γ より，Section 2.1 の結果を用いると

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial Pg}{\partial n_h}\right\|_{L^1(\Gamma_h)} &\le \|\nabla Pg\cdot(n_h-n\circ\pi)\|_{L^1(\Gamma_h)}+\big\|(\nabla Pg-(\nabla Pg)\circ\pi)\cdot n\circ\pi\big\|_{L^1(\Gamma_h)}+\|\underbrace{(\nabla g\cdot n)}_{=0}\circ\pi\|_{L^1(\Gamma_h)}\\ &\le Ch\|\nabla Pg\|_{L^1(\Gamma_h)}+C\|\nabla^2 Pg\|_{L^1(\Gamma(\delta))}\end{aligned}$$

となるが，第 2 項でやったことから $\|\nabla^2 Pg\|_{L^1(\Gamma(\delta))}\le C$ となる．一方で，

$$\begin{aligned}\|\nabla Pg\|_{L^1(\Gamma_h)} &= \sum_{j=1}^{J+1}\|\nabla Pg\|_{L^1(\Gamma_h\cap A_j)} \le \sum_{j=1}^{J+1}\|\nabla Pg\|_{L^\infty(\Gamma_h\cap A_j)}\,\mathrm{meas}(\Gamma_h\cap A_j)\\ &\le C\sum_{j=1}^{J+1}\|\nabla g\|_{L^\infty(\Omega\cap\Gamma(\delta)\cap A(z;d_j-2\delta,d_{j-1}+2\delta))}\,\mathrm{meas}(\Gamma_h\cap A_j)\\ &= C\sum_{j=1}^{J+1}\sup_{x\in\Omega\cap\Gamma(\delta)\cap A(z;d_j-2\delta,d_{j-1}+2\delta))}\left|\int_{\mathrm{supp}\,\eta}\partial\nabla G(x-y)\eta(y)\,dy\right|\mathrm{meas}(\Gamma_h\cap A_j)\\ &\le C\sum_{j=1}^{J+1}d_j^{-N}h^{-N}h^N d_j^{N-1}\le Ch^{-1} \qquad (3.5)\end{aligned}$$

と評価できるから，結局 $|-(\tilde{u}-v_h,\frac{\partial Pg}{\partial n_h})_{\Gamma_h}|\le Ch^2\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$ となる．

残りの項の評価も上と同様にできるが，紙面の都合上，詳細は省略する．各項の評価を (3.3) に代入すると，

$$|(\tilde{u}-u_h,\partial\eta)_{\Omega_h}|\le Ch(\|Pg-g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)}+1)\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$$

が結論される．従って，定理の証明は $\|Pg-g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)}\le C$ を示すことに帰着された．

3.2 Step 2: $H^1(\Omega_h\cap A_{J+1})$ 評価

ヘルダー不等式より，$\|Pg-g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)}$ は重み付き H^1 ノルムで押さえられる：

$$\begin{aligned}\|Pg-g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)} &= \sum_{j=1}^{J+1}\|Pg-g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h\cap A_j)} \le \sum_{j=1}^{J+1}\|Pg-g_h\|_{H^1(\Omega_h\cap A_j)}|\mathrm{meas}(\Omega_h\cap A_j)|^{1/2}\\ &\le Cd_J^{N/2}\|Pg-g_h\|_{H^1(\Omega_{hJ+1})}+C\sum_{j=1}^{J}d_j^{N/2}\|Pg-g_h\|_{H^1(\Omega_h\cap A_j)}.\end{aligned}$$

右辺第 2 項は Step 3 以降に後回しにして，右辺第 1 項を考える．通常の H^1 誤差評価より，

$$\|Pg-g_h\|_{H^1(\Omega_h\cap A_{J+1})}\le\|Pg-g_h\|_{H^1(\Omega_h)}\le Ch\|g\|_{H^2(\Omega)}\le Ch\|\partial\eta\|_{L^2(\Omega)}\le Ch\cdot h^{-1-N/2}$$

が成り立つから，

$$d_J^{N/2}\|Pg-g_h\|_{H^1(\Omega_{hJ+1})}\le C(d_Jh^{-1})^{N/2}=CK^{N/2}$$

を得る．よって，

$$\|Pg-g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)}\le CK^{N/2}+C\sum_{j=1}^{J}d_j^{N/2}\|Pg-g_h\|_{H^1(\Omega_h\cap A_j)} \qquad (3.6)$$

となることがわかった．

3.3 Step 3: $H^1(\Omega_h \cap A_j)\,(j < J+1)$ 評価

$\omega_j \equiv 1$ in $\Omega_h \cap A_j$ を思い出すと，ライプニッツ則より，任意の $v_h \in V_h$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|Pg - g_h\|^2_{H^1(\Omega_h \cap A_j)} &\le \int_{\Omega_h} \omega_j (Pg - g_h)^2\,dx + \int_{\Omega_h} \omega_j |\nabla (Pg - g_h)|^2\,dx \\
&= a_h(\omega_j(Pg - g_h) - v_h, Pg - g_h) + a_h(v_h, Pg - g_h) \\
&\quad - \int_{\Omega_h} \nabla \omega_j (Pg - g_h) \cdot \nabla (Pg - g_h)\,dx
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$a_h(v_h, Pg - g_h)$ は，Lemma 3.1 と同様にして領域の摂動に関わる項で表せる．その結果，

$$
\begin{aligned}
\|Pg - g_h\|^2_{H^1(\Omega_h \cap A_j)} \le a_h(\omega_j(Pg - g_h) - v_h, Pg - g_h) &- \int_{\Omega_h} \nabla \omega_j (Pg - g_h) \cdot \nabla (Pg - g_h)\,dx \\
&+ (v_h, -\Delta Pg + Pg)_{\Omega_h \setminus \Omega} + \Big(v_h, \frac{\partial Pg}{\partial n_h}\Big)_{\Gamma_h}.
\end{aligned}
$$

を得る．以下，$v_h = I_h\big(\omega_j(Pg - g_h)\big)$ とおいて右辺の各項を L^2-L^2 で評価する．

- 第 1 項は，Lemma 2.1 より $a_{\Omega_h \cap A_j'}\big(\omega_j(Pg - g_h) - I_h(\omega_j(Pg - g_h)), Pg - g_h\big)$ に等しいから，

$$
\|\omega_j(Pg - g_h) - I_h(\omega_j(Pg - g_h))\|_{H^1(\Omega_h)} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A_j')}
$$

で押さえられる．左の $H^1(\Omega_h)$ ノルムは補間誤差評価より $Ch\Big(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\omega_j(Pg - g_h)|^2_{H^2(T)}\Big)^{1/2}$ で押さえられるが，1 次多項式の 2 階微分は 0 であることに注意すると，

$$
|\omega_j(Pg - g_h)|^2_{H^2(T)} \le C\big(\|\nabla^2 \omega_j (Pg - g_h)\|^2_{L^2(T)} + \|\nabla \omega_j \nabla (Pg - g_h)\|^2_{L^2(T)} + \|\omega_j \nabla^2 Pg\|^2_{L^2(T)}\big)
$$

となることがわかるので，次を得る：

$$
\begin{aligned}
&\|\omega_j(Pg - g_h) - I_h(\omega_j(Pg - g_h))\|_{H^1(\Omega_h)} \\
&\le Ch\big(\|\nabla^2 Pg\|_{L^2(\Omega_h \cap A_j')} + d_j^{-1} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A_j')} + d_j^{-2} \|Pg - g_h\|_{L^2(\Omega_h \cap A_j')}\big).
\end{aligned}
$$

ここで，$\|\nabla^2 Pg\|_{L^2(\Omega_h \cap A_j')} \le C\|g\|_{H^2(\Omega \cap A(z; d_{j+1} - 2\delta, d_{j-1} + 2\delta))}$ の主要部は $\|\nabla^2 g\|_{L^2(\Omega \cap A(z; d_{j+1} - 2\delta, d_{j-1} + 2\delta))}$ で，それは

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^2 g\|_{L^2(\Omega \cap A(z; d_{j+1} - 2\delta, d_{j-1} + 2\delta))} &\le \|\nabla^2 g\|_{L^\infty(\Omega \cap A_j')} |\mathrm{meas}(\Omega_h \cap A_j')|^{1/2} \\
&= \sup_{x \in \Omega \cap A_j'} \left| \int_{\mathrm{supp}\,\eta} \partial \nabla^2 G(x - y) \eta(y)\,dy \right| |\mathrm{meas}(\Omega_h \cap A_j')|^{1/2} \\
&\le C d_j^{-N-1} h^{-N} h^N d_j^{N/2} = C d_j^{-1-N/2}
\end{aligned}
$$

と評価される．

その他の項の評価は省略する．最終的に次の局所 H^1 誤差評価が結論される：

$$
\begin{aligned}
&\|Pg - g_h\|^2_{H^1(\Omega_h \cap A_j)} \\
&\le C(h d_j^{-1}) d_j^{-N/2} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A_j')} + Ch d_j^{-1} \|Pg - g_h\|^2_{H^1(\Omega_h \cap A_j')} \\
&\quad + C d_j^{-1} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A_j')} \|Pg - g_h\|_{L^2(\Omega_h \cap A_j')} \\
&\quad + C h^{1/2} (d_j^{-N} + d_j^{-N/2} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A_j')} + d_j^{-1-N/2} \|Pg - g_h\|_{L^2(\Omega_h \cap A_j')}). \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

3.4 Step 4: $L^2(\Omega_h \cap A'_j)$ 評価

(3.7) の右辺に現れた $\|Pg - g_h\|_{L^2(\Omega_h \cap A'_j)}$ を $H^1(\Omega_h \cap A''_j)$ ノルムと重み付き $W^{1,1}(\Omega_h)$ ノルムで押さえたい．そのために，任意の $\phi \in C_0^\infty(\Omega_h \cap A'_j)$ で $\|\phi\|_{L^2(\Omega_h \cap A'_j)} = 1$ を満たすものに対して，$|(\phi, Pg - g_h)_{\Omega_h}|$ を評価する．Aubin–Nitsche のトリックに則って，$w \in H^2(\Omega)$ を $-\Delta w + w = \phi$ in Ω, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ on Γ，つまり

$$a(w, v) = (\phi, v)_\Omega \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

の解とする．Lemma 3.1 と同様にして，任意の $w_h \in V_h$ に対して次の等式が成り立つことがわかる：

$$\begin{aligned}(\phi, Pg - g_h)_{\Omega_h} = a_h(Pw - w_h, Pg - g_h) &+ (\Delta Pw - Pw + \phi, Pg - g_h)_{\Omega_h \setminus \Omega} - \left(\frac{\partial Pw}{\partial n_h}, Pg - g_h\right)_{\Gamma_h} \\ &+ (Pw - w_h, \Delta Pg - Pg)_{\Omega_h \setminus \Omega} - \left(Pw - w_h, \frac{\partial Pg}{\partial n_h}\right)_{\Gamma_h} \\ &+ a_{\Omega_h \setminus \Omega}(Pw, Pg) - a_{\Omega \setminus \Omega_h}(w, g). \end{aligned} \tag{3.8}$$

以下，$w_h = I_h Pw$ として，(3.8) の右辺の各項を，$\Omega_h \cap A''_j$ においては L^2 楕円型正則性を用いて L^2–L^2 で，$\Omega_h \setminus A''_j$ においてはグリーン関数の減衰評価を用いて L^∞–L^1 で評価する．このとき，たとえば第 1 項は

$$\begin{aligned}&|a_h(Pw - w_h, Pg - g_h)| \\ &\le \|Pw - I_h Pw\|_{H^1(\Omega_h \cap A''_j)} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A''_j)} + \|Pw - I_h Pw\|_{W^{1,\infty}(\Omega_h \setminus A''_j)} \|Pg - g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h \setminus A''_j)} \\ &\le Ch\|Pw\|_{H^2(\Omega_h)} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A''_j)} + Ch\|Pw\|_{W^{2,\infty}(\{x \in \Omega_h : |x - z| \le d_{j+2} + h \text{ or } |x - z| \ge d_{j-3} - h\})} \|Pg - g_h\|_{W^{1,1}(\Omega)} \\ &\le Ch\|w\|_{H^2(\Omega)} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A''_j)} + Ch\|w\|_{W^{2,\infty}(\{x \in \Omega : |x - z| \le d_{j+2} + h + 2\delta \text{ or } |x - z| \ge d_{j-3} - h - 2\delta\})} \|Pg - g_h\|_{W^{1,1}(\Omega)} \\ &\le Ch\|\phi\|_{L^2(\Omega_h \cap A'_j)} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A''_j)} \\ &\qquad + Ch \sup_{|x - y| \ge d_{j+2} - h - 2\delta} |\nabla^2 G(x - y)| \, \|\phi\|_{L^2(\Omega_h \cap A'_j)} |\mathrm{meas}(\Omega_h \cap A'_j)|^{1/2} \|Pg - g_h\|_{W^{1,1}(\Omega)} \\ &\le Ch\|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A''_j)} + Chd_j^{-N/2} \|Pg - g_h\|_{W^{1,1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

と押さえられる．その他の項の評価は省略する．最終的に，

$$\|Pg - g_h\|_{L^2(\Omega_h \cap A'_j)} \le Ch\|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A''_j)} + Chd_j^{-N/2} \|Pg - g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)} + Chd_j^{-N/2} \tag{3.9}$$

を得る．

3.5 Step 5: Double absorbing argument

(3.9) を (3.7) に代入し，両辺に d_j^N をかけてから平方根を取ると，

$$\begin{aligned}&d_j^{N/2} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A_j)} \\ &\le C(hd_j^{-1})^{1/2} (d_j^{N/2} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A''_j)})^{1/2} + C(hd_j^{-1})^{1/2} d_j^{N/2} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A''_j)} + C(hd_j^{-1})^{1/2} \|Pg - g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)} \\ &\qquad + Ch^{1/4} \big(1 + (d_j^{N/2} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_h \cap A''_j)})^{1/2} + \|Pg - g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)}^{1/2}\big)\end{aligned}$$

を得る．

$j = 1, \cdots, J$ までの和を取り，$\Omega_h \cap A_{J+1}$ に被るところでは Step 2 で導いた $d_J^{N/2} \|Pg - g_h\|_{H^1(\Omega_{h J+1})} \le CK^{N/2}$ を使い，さらに $\sum_{j=0}^J hd_j^{-1} \le 2K^{-1}$, $\sum_{j=0}^J (hd_j^{-1})^{1/2} \le \sqrt{2} K^{-1/2}$，及び $J \le C|\log h|$ を用いると，

K を十分大きく取れば，重み付き H^1 ノルムを左辺に吸収できることがわかる．その結果，

$$\sum_{j=0}^{J} d_j^{N/2}\|Pg-g_h\|_{H^1(\Omega_h\cap A_j)} \le CK^{-1}+CK^{N/4}+CK^{(N-1)/2}+C+C(K^{-1/2}+h^{1/4}|\log h|)\|Pg-g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)}$$

が従う．これを (3.6) に代入すると

$$\|Pg-g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)} \le C(1+K^{-1}+K^{N/4}+K^{(N-1)/2}+K^{N/2})+C(K^{-1/2}+h^{1/4}|\log h|)\|Pg-g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)}$$

を得るので，もう一度 K を十分大きく取ると右辺の最後の項を吸収することができ，

$$\|Pg-g_h\|_{W^{1,1}(\Omega_h)} \le C$$

が結論される．Step 1 で述べたことより，これで $\|\nabla(\tilde{u}-u_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \le Ch\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$ が示された．

注意 3.1. $\|\tilde{u}-u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)}$ の誤差評価をするには，(3.1) の代わりに

$$\tilde{u}(z)-u(z)=(\tilde{u}-I_h\tilde{u})(z)+(I_h\tilde{u}-\tilde{u},\eta)_T+(\tilde{u}-u_h,\eta)_T,$$

及び (3.2) の代わりに $a(v,g)=(\eta,v)\,\forall v\in H^1(\Omega)$ を考えて，それ以外はほぼ同様の議論を行えばよい．ただし，この場合は Step 5 で j に関する和を取るときに，$|\log h|$ の係数が残ってしまう．P1 要素の場合は，この $|\log h|$ がついた評価がベストなものであることが知られている ([3]).

参考文献

[1] N. Y. Bakaev, V. Thomée, and L. B. Wahlbin, *Maximum-norm estimates for resolvents of elliptic finite element operators*, Math. Comp., 72 (2002), pp. 1597–1610.

[2] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations fo Second Order*, Springer, 1983.

[3] R. Haverkamp, *Eine aussage zur L_∞-stabilität und zur genauen konvergenzordnung der H_0^1-projektionen*, Numer. Math., 44 (1984), pp. 393–405.

[4] T. Kashiwabara, I. Oikawa, and G. Zhou, *Penalty method with P1/P1 finite element approximation for the Stokes equations under the slip boundary condition*, Numer. Math., doi: 0.1007/s00211-016-0790-5 (2016).

[5] J. P. Krasovskii, *Properties of Green's function and generalized solutions of elliptic boundary value problems*, Soviet Mathematics, 10^2 (1969), pp. 54–120.

[6] J. A. Nitsche and A. H. Schatz, *Interior estimates for Ritz–Galerkin methods*, Math. Comp., 28 (1974), pp. 937–958.

[7] R. Rannacher and R. Scott, *Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations*, Math. Comp., 38 (1982), pp. 437–445.

[8] N. Saito, *Conservative upwind finite-element method for a simplified Keller–Segel system modelling chemotaxis*, IMA J. Numer. Anal., 27 (2007), pp. 332–365.

[9] A. H. Schatz, *Pointwise error estimates and asymptotic error expansion inequalities for the finite element method on irregular grids: part I. Global esimates*, Math. Comp., 67 (1998), pp. 877–899.

[10] A. H. Schatz, I. H. Sloand, and L. B. Wahlbin, *Superconvergence in finite element methods and meshes that are locally symmetric with respecto to a point*, SIAM J. Numer. Anal., 33 (1996), pp. 505–521.

[11] A. H. Schatz and L. B. Wahlbin, *On the quasi-optimality in L_∞ of the $\mathring{H}^1$-projection into finite element spaces*, Math. Comp., 38 (1982), pp. 1–22.