数理解析研究所講究録
第 1998 巻 2016 年 150-160

Koyama-Nakajima L 関数の母関数表示

服部至宏 (室蘭工業大学・工)

1 概要

本講演では, Koyama-Nakajima の L 関数という組み合わせ論的ゼータ関数の行列式表示の形に着目してその母関数表示を導くことを主題とする. Koyama-Nakajima の L 関数というのは, オイラー積表示で定義されるが, その関数の行列式表示の形は,

$$\frac{1}{\det(I-A)}$$

を持つことが知られている. 行列式表示の形が $1/\det(I-A)$ となるとき, 次のような母関数表示を持つことが知られている:

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k}{k}u^k\right).$$

となる. この講演の主題を具体的に述べると, この N_k を "自然" に構成することである. ここで, "自然" な構成について, 組み合わせ論的ゼータ関数の 1 つの Artin-Mazur ゼータの場合を例に挙げ説明する. S_n を n 次対称群とする. $\sigma\in S_n, M_\sigma\in GL_n(\mathbb{C})$ に対して, Artin-Mazur ゼータ $Z_\sigma^{AM}(u)$ は, 次のような行列式表示を持つ事が知られている:

$$Z_\sigma^{AM}(u)=\frac{1}{\det(I-uM_\sigma)}.$$

そして先ほどと同様に次のような母関数表示をもつ:

$$Z_\sigma^{AM}(u)=\exp\left(\sum_{k\geq 1}\frac{N_k}{k}u^k\right).$$

Artin-Mazur ゼータでは, この N_k がある有限離散力学系の m 周期点の個数ということが知られている. つまり, 先ほど述べた, Koyama-Nakajima の L 関数でも "自然" に構成するということは, この Artin-Mazur ゼータと同様に力学系モデルによる解釈を与えることである. 力学系を作り, Koyama-Nakajima の L 関数の母関数表示に力学系による解釈を与え, 本稿を終える,

2 Artin-Mazur ゼータ

Artin-Mazur ゼータは母関数表示で以下のように定義される. まず, S_n を n 次対称群とする. X を n 点集合とすると, n 次対称群 S_n は X に作用する. また, $\sigma\in S_n$ とする. この時, 有限離散力学系 (X,σ) が得られ

る. これを $\mathbb{Z}$-力学系と呼ぶ. σ の固定点の集合を $\mathrm{Fix}(\sigma)$ とする:

$$\mathrm{Fix}(\sigma)=\{i\in X|\sigma(i)=i\}$$

また, $\mathrm{Cyc}(\sigma)$ は σ を互いに素な巡回置換の積にした時に表れる, その巡回置換の集合である. $c\in\mathrm{Cyc}(\sigma)$ のとき, $|c|$ とは巡回域に含まれる元の個数である. 例えば, 置換 σ に対して,

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$$

とする. $\sigma=(123)(45)$ という巡回置換の積で表すことができる. つまり, $\mathrm{Cyc}(\sigma)=\{(123),(45)\}$ となる. このとき, $c=(123)\in\mathrm{Cyc}(\sigma)$ とすると, $|c|=3$ となる. $M_\sigma=(\delta_{\sigma(i)j})_{i,j=1,\dots,n}$ とする. ここで, $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである.

例えば,

$$M_{(123)(45)}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

この M_σ を σ の行列表示と呼ぶ. Artin-Mazur ゼータは母関数表示で定義される, 次のような u を変数とする形式的べき級数とする:

$$Z_\sigma^{AM}(u)=\exp\left(\sum_{k\geq1}\frac{|\mathrm{Fix}(\sigma^k)|}{k}u^k\right)$$

すると, Artin-Mazur ゼータのオイラー積表示は次のようになることが知られている [1].

$$Z_\sigma^{AM}(u)=\prod_{c\in\mathrm{Cyc}(\sigma)}\frac{1}{1-u^{|c|}}$$

証明は次のようになる. まず, 対称群の元 σ を互いに素な巡回置換の積として分解したときに $\sigma=\sigma_1\dots\sigma_r$ と表すことにする. また, $\sigma_i=(i_{l(i-1)+1},\dots,i_{l(i-1)+l(i)})$ とする. ただし, $l(0)=0$ とする.

$$\begin{aligned}\sigma&=\sigma_1\dots\sigma_r\\&=(i_1,\dots,i_{l(1)})(i_{l(1)+1},\dots,i_{l(1)+l(2)})\dots(i_{l(1)+\dots+l(r-1)+1},\dots,i_n)\end{aligned}$$

ここで, $k\in\{1,2,\dots,n\}$ に対して, i_k を対応させる置換を π とおく. すなわち π は $(1,2,\dots,n)$ の $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ への並び替えである. この時, この写像 π を σ と組み合わせることに次のようになる:

$$\pi^{-1}\sigma\pi=(1,\dots,l(1))(l(1)+1,\dots,l(1)+l(2))(l(1)+,\dots,+l(r-1)+1,\dots,n).$$

ここで, C_l を, 長さ l の巡回置換 $\sigma=(12\dots.l)$ として表示した $M(\sigma)=M((12\dots.l))$ を用いて,

$$C_l=M((12\dots.l)) \tag{1}$$

と定義される行列とする. つまり,

$$C_l=\begin{pmatrix}0&&&1\\1&\ddots&\&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&0\end{pmatrix}.$$

である.$\pi^{-1}\sigma\pi$ は単調増加の形になったので,

$$\pi^{-1}\sigma\pi = (1, ..., l(1))(l(1)+1, ..., l(1)+l(2))(l(1)+, ..., +l(r-1)+1, ..., n).$$

は, 対角成分に置換行列が並んだ形になる:

$$M(\pi)^{-1}M(\sigma)M(\pi) = \mathrm{diag}(C_{l(1)}, C_{l(2)}, ..., C_{l(r)})$$

このとき,

$$\begin{aligned}\det(I - uM_\sigma) &= \det(I - M(\pi)^{-1}M(\tau)M(\pi)u) \\ &= \prod_{j=1}^{r} \det(1_{l(j)} - C_{l(j)}u)\end{aligned} \tag{2}$$

すなわち,

$$\det(I - uM_\sigma) = \prod_{p \in Cycle(\sigma)} (1 - u^{|p|})$$

となる. このことから

$$Z_\sigma^{AM}(u) = \frac{1}{\det(I - uM\sigma)}$$

が成立すれば以上のオイラー積表示が成り立つことがわかる. Artin-Mazur ゼータでは, このように, 母関数表示

$$Z_\sigma^{AM}(u) = \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{N_k}{k} u^k\right).$$

に対して, N_k が, $\mathbb{Z}$-力学系の固定点の個数となる. Koyama-Nakajima の L 関数においても, このような力学系モデルによる解釈における母関数表示を求めたい. そこで行列式表示の形に着目する. 冒頭で述べたように Artin-Mazur ゼータが次のような行列式表示を持つことが知られている [1].

$$Z_\sigma^{AM}(u) = \frac{1}{\det(I - uM\sigma)}$$

以下, 証明を行う. M_σ の固有値を $\alpha_1, ..., \alpha_n$ とおくと, M_σ はある正則行列 U によって,

$$U^{-1}M_\sigma U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化される.

$$Z_\sigma^{AM}(u) = \frac{1}{\det(I - uM\sigma)}$$

の右辺は,

$$
\begin{aligned}
\det(I-uM\sigma)^{-1} &= \det(I-U^{-1}M_\sigma Uu)^{-1}\\
&= (1-\alpha_1 u)^{-1}\cdots(1-\alpha_n u)^{-1}\\
&= \exp\left(\log(1-\alpha_1 u)^{-1}\cdots(1-\alpha_n u)^{-1}\right)\\
&= \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\log(1-\alpha_j u)\right)
\end{aligned}
$$

となる. ここで, 次のことが知られている [1].

$$
\log(1-x) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m} = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots \quad (|x|<1)
$$

これを用いて, 次のように等式変形できる.

$$
\begin{aligned}
\det(I-uM\sigma)^{-1} &= \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\log(1-\alpha_j u)\right)\\
&= \exp\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_j^m u^m}{m}\right)\\
&= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_1^m+\cdots+\alpha_n^m}{m}u^m\right)
\end{aligned}
$$

これを,Artin-Mazur ゼータの定義と比べると $|\mathrm{Fix}(\sigma^k)| = \alpha_1^m+\cdots+\alpha_n^m$ を示せばよいことがわかる. これは次の式より示せる.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^m+\cdots+\alpha_n^m &= \mathrm{tr}(U^{-1}M_\sigma^m U)\\
&= \mathrm{tr}(U^{-1}M_{\sigma^m}U)\\
&= \mathrm{tr}(M_{\sigma^m})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\delta_{i,\sigma^m(i)})\\
&= |\mathrm{Fix}(\sigma^k)|
\end{aligned}
$$

これより,

$$
Z_\sigma^{AM}(u) = \frac{1}{\det(I-uM\sigma)}
$$

が成立する. このように, 通常 Artin-Mazur のような力学系モデルは母関数表示で定義され, その結果として行列式表示が導出される. しかし, Koyama-Nakajima の L 関数はオイラー積表示で定義され, 行列式表示の形から母関数表示を求めることになるため, 今後の議論のひな形として, この Artin-Mazur ゼータを使って, 具体的に行列式表示に着目し, 母関数表示を導く導出過程を見る.

例えば,$\sigma=(123)(45)\in S_5$ における行列式表示を見てみる,

$$\frac{1}{\det(I-uM\sigma)}=\begin{vmatrix} 1 & -u & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -u & 0 & 0\\ -u & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -u\\ 0 & 0 & 0 & -u & 1\end{vmatrix}^{-1}$$
$$=\frac{1}{(1-u^2)(1-u^3)}$$

となる. つまり $\det(I-uM\sigma)=(1-u^2)(1-u^3)$ となる. つまり, 指数関数, 対数関数を用いて,

$$\begin{aligned}\det(I-uM\sigma)^{-1}&=\frac{1}{1-u^2}\frac{1}{1-u^3}\\&=\exp(-\log(1-u^2)(1-u^3))\\&=\exp(\sum_{k\geq 1}(\frac{2}{2k}u^{2k}+\frac{3}{3k}u^{3k}))\\&=\exp(\sum_{k\geq 1}\frac{|Fix(\sigma^k)|}{k}u^k)\end{aligned}$$

となる. ここで等式,

$$\exp(\sum_{k\geq 1}(\frac{2}{2k}u^{2k}+\frac{3}{3k}u^{3k}))=\exp(\sum_{k\geq 1}\frac{|Fix(\sigma^k)|}{k}u^k)$$

は一見では確認しにくいため, 実際に $\mathrm{Fix}(\sigma^k)$ の元の個数をみてみると,

$$\begin{array}{rccccccc}\sigma^k: & \sigma^1 & \sigma^2 & \sigma^3 & \sigma^4 & \sigma^5 & \sigma^6 & \cdots\\ |\mathrm{Fix}(\sigma^k)|: & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 & \cdots\end{array}$$

となる. 1 行目が作用する σ で, 2 行目は, その σ に対する固定点の個数である. このことから, 等式が正しいことがわかる. 以上の話を複素鏡映群に拡張し, Koyama-Nakajima の L 関数で母関数表示を求めることが本講演の目標である.

3 Koyama-Nakajima の L 関数

そこで, Koyama-Nakajima の L 関数を定義します. まず, 複素鏡映群を $G(m,n)=(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n\rtimes S_n$ とする. ここで S_n は n 次対称群で, $\sigma\in S_n$ とする. $\tau\in G(m,n)$, 1 の m 乗根 ξ に対して, τ を次のように記述できる:

$$\tau=(\xi^{s_1},\xi^{s_2},...,\xi^{s_n})\sigma$$

ただし, ここで, $s_i\in\{0,1,...,r-1\}$ で, $i=1,2,...,n$ である. また, 複素鏡映群から n 次一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ への写像を M として,

$$M(\tau)=M_\tau=(\xi^{s_i}\delta_{\sigma(i),j})_{i,j=1,2,...,n},$$

とする. このとき, 行列 $M(\tau)$ は τ の行列表示とよぶ. また, $p\in\mathrm{Cyc}(\sigma)$ に対して, $\int_p\tau=\sum_{i\in p}s_i$ とする. ここで, $i\in p$ とは, i が p の巡回域に含まれるという意味で, 例えば, $p=(123)$ のとき, $i=1,2,3$ である. $Cyc(\sigma)$ から 0 元を含まない複素数 $\mathbb{C}^\times$ への写像 χ を次のように定義する:

$$\chi_\tau:\mathrm{Cyc}(\sigma)\to\mathbb{C}^\times:p\mapsto\xi^{\int_p\tau},$$

たとえば,$\tau = (\xi^{s_1}, \xi^{s_2}, ..., \xi^{s_5})(123)(45)$ とする.$\sigma = (123)(45), \mathrm{Cyc}(\sigma) = \{(123), (45)\}$ となる. このとき,$\chi_\tau(123) = \xi^{s^1+s^2+s^3}, \chi_\tau(45) = \xi^{s^4+s^5}$ となる.

今まで導入したことから,Koyama-Nakajima の L 関数 $L_\tau(u)$ は次のようにオイラー積表示で定義される.

$$L_\tau(u) = \prod_{p \in \mathrm{Cyc}(\sigma)} (1 - \chi_\tau(p) u^{|p|})^{-1}.$$

ここで,Koyama-Nakajima の L 関数において次のことが知られている [2].

$$L_\tau(u) = \det(I - uM_\tau)^{-1}$$

証明は次のようになる. まず, 対称群の元 σ を互いに素な巡回置換の積として分解したときに $\sigma = \sigma_1 ... \sigma_r$ と表すことにする. また,$\sigma_i = (i_{l(i-1)+1}, ..., i_{l(i-1)+l(i)})$ とする. ただし,$l(0) = 0$ とする.

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 ... \sigma_r \\ &= (i_1, ..., i_{l(1)})(i_{l(1)+1}, ..., i_{l(1)+l(2)}) ... (i_{l(1)+...+l(r-1)+1}, ..., i_n)\end{aligned}$$

対称群 S_n から $\pi(k) = i_k (k = 1, 2, ..., n)$ となるような元 π をとる. この時,

$$\pi^{-1} \sigma \pi = (1, ..., l(1))(l(1)+1, ..., l(1)+l(2))(l(1)+, ..., +l(r-1)+1, ..., n)$$

となる. このことから,

$$M(\pi)^{-1} M(\tau) M(\pi) = \mathrm{diag}(C_{l(1)}, C_{l(2)}, ..., C_{l(r)})$$

となる. ただしここで $C_{l(k)}$ は, 整数 $t_1, .., t_n \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ によって以下のように定義する.

$$C_{l(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \xi^{t_{l(k-1)+1}} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \xi^{t_{l(k-1)+l(k)-1}} \\ \xi^{t_{l(k-1)+l(k)}} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

χ の定義より次のようになる.

$$\chi(C_{l(k)}) = \prod_{j=1}^{l(k)} \xi^{t_{l(k-1)+j}}.$$

このとき,

$$\begin{aligned}\det(I - uM_\tau) &= \det(I - M(\pi)^{-1} M(\tau) M(\pi) u) \\ &= \prod_{j=1}^{r} \det(1_{l(j)} - C_{l(j)} u) \\ &= \prod_{j=1}^{r} \det(1 - \chi(C_{l(j)}) u^{|j|}),\end{aligned}$$

すなわち,

$$\det(I - uM_\tau) = \prod_{p \in Cycle(\sigma)} (1 - \chi_\tau(p) u^{|p|})$$

となる.

このように,Koyama-Nakajima の L 関数は行列式表示が $1/\det(I-A)$ の形となる. つまり母関数表示が

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k}{k}u^k\right),\ N_k=\mathrm{tr}M_r^k$$

となる. 本文の目標は, この N_k に Artin-Mazur ゼータと同じ様に力学系モデルによる解釈を加えることである.

4 Lyndon 語

この行列式表示 $\frac{1}{\det(I-A)}$ という形に注目する. この形の行列式表示を持つ組み合わせ論的ゼータは,Lyndon 語により統一的に記述できる. 以下,Lyndon 語を定義する. まず, 空でない集合 S とその上の二項演算

$$\cdot : S\times S\longrightarrow S$$

が与えられたとき組 $(S,\cdot)$ が,S の各元 a,b,c に対して

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

という等式を満たす時, これを半群という. さらに半群が乗法単位元を持つとき, モノイドという.

Lyndon 語を次のように定義する. 有限個の非可換変数の集合 (アルファベット)

$$X=\{1<2<\cdots<n\}$$

を考える, ただし,X には記されているように全順序を与える.X^* をアルファベット X で生成される半群とする. 半群 X^* の元は X 上の語とよばれる. 語 $w\in X^*$ が素であり極小となるとき Lyndon 語であるという.

ここで, 語 w が素であるとは, w がより短い語 u のベキでかけないことである:

$$w\neq u^r$$

また, つぎに, 語 $w = i_1i_2...i_r$ が極小である事を定義する.w に対して, その循環置換類 $\mathrm{Re}(w) = \{i_1i_2...i_r, i_2i_3...i_ri_1, ..., i_ri_1...i_{r-1}\}$ とする.w が,$\mathrm{Re}(w)$ において, そのいずれよりも大きくないとき,w は極小であるという.

例えば, $w=213$ の時, $\mathrm{Re}(w)=\{213,132,321\}$ より,132 という w よりも辞書式順序の小さいものが存在するので,Lyndon 語ではない. また,$w=132132$ の時,$w=(132)^2$ となり, 素ではなくなるので, Lyndon 語ではない. $l=12313$ の時, $\mathrm{Re}(l)=\{12313,23131,31312,13123,31231\}$ の元の中で w は辞書式順序が最小で, さらに素である. よって l は Lyndon 語である. 以下アルファベット X 上の Lyndon 語全体を

$$L=L(X)$$

で表す.

5 Foata-Zeilberger の定理

先ほど, 行列式表示の形が $\frac{1}{\det(I-A)}$ をもつ組み合わせ論的ゼータは,Lyndon 語により統一的に記述できることを述べた. これは Foata-Zeilberger の定理によってわかる. そこで Foata-Zeilberger の定理を以下で紹介

する．全順序付けられたアルファベット $X=\{1<2<\cdots<n\}$ 上の Lyndon 語 $l\in L$ に対して，互いに可換な変数 [l] をあたえることにより，L で添字つけられる可換変数の族 $[L]$ を考える:

$$[L]=\{[l]|l\in L\}.$$

整数環 $\mathbb{Z}$ 上で生成される形式的ベキ級数環を R で表す．互いに果敢な成分を持つ n 次正方行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in X}$ に対し，これら n^2 個の成分 a_{ij} で生成される $\mathbb{Z}$ 上の形式的ベキ級数環を S で表す．$l=i_1i_2\cdots i_k$ とするとき，環 R の生成元 $[l]$ に対して，S の元 $\mathrm{circ}_A(l):=a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}...a_{i_ki_1}$ を対応させることにより，$\mathbb{Z}$-代数準同型

$$\phi_A:\ R\to S:[l]\mapsto \mathrm{circ}_A(l)$$

を得る:$\phi_A([l]):=\mathrm{circ}_A(l)$．$\Lambda\in R$ を $\Lambda=\prod_{l\in L}(1-[l])$ と定義する．このとき，環 S における等式

$$\phi_A(\Lambda)=\det(I-A)$$

が成立することが知られている．これが Foata-Zeilberger の定理である．ここで $\Lambda^{-1}=\prod_{l\in L}(1+[l]+[l]^2+...)$ となり可逆であることに注意すると，Foata-Zeilberger の定理より，

$$\phi_A(\Lambda^{-1})=\frac{1}{\det(I-A)}$$

となる．つまりこのことから行列式表示の形が $\frac{1}{\det(I-A)}$ をもつ組み合わせ論的ゼータは，Lyndon 語により統一的に記述できる

6 主結果

Koyama-Nakajima の L 関数においても Artin-Mazur ゼータと同様に力学系モデルによる解釈を得るために，ここで，新たな力学系を考える．X をアルファベットとする．$\tau\in G(r,n)$ とする．このとき，有限離散力学系 (X,σ) が得られるが，ここで w という以下の関数を定義する．

$$w:X\to R:i\mapsto\xi^{s_i},$$

この w を重みと呼び,Z 力学系に対して w を付け $(X,\sigma;w)$ という重み付き力学系を考える．ここで w_k を以下のように定義する．

$$w_k(i)=\begin{cases} w(\sigma^0(i))w(\sigma^1(i))...w(\sigma^{k-1}(i)) & (\sigma^k(i)=i\text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他})\end{cases}.$$

$\tau=(\xi^{s_1},\xi^{s_2},...,\xi^{s_5})(123)(45)$ とする．$\sigma=(123)(45)$ である．このとき，$w_1(1)=0,w_2(1)=0$ である．また，$\sigma^3(1)=1$ より，

$$\begin{aligned} w_3(1)&=w(\sigma^0(1))w(\sigma^1(1))w(\sigma^2(1))\\ &=w(1)w(2)w(3)\\ &=\xi^{s_1+s_2+s_3}\end{aligned}$$

となる．このように，$i\in X$ に対して以下のように重みが生じる．

$$i\ \xrightarrow{w(\sigma^0(i))}\ \sigma(i)^1\ \xrightarrow{w(\sigma^1(i))}\ \sigma(i)^2\ \longrightarrow\cdots\ \xrightarrow{w(\sigma^{k-1}(i))}\ \sigma(i)^k$$

このとき, 1 周期ごと, つまり, $\sigma^k(i) = i$ のときに, $w_k(i)$ という重みの積が表れるということがわかる. ただ注意してほしいのは矢印一つ一つに重みがかかっているが, $\sigma^k(i) = i$ 以外の点では, 重みは表れない. ここで以下のことが分かった. Koyama-Nakajima の L 関数の母関数表示

$$L_\tau(u) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{k} u^k\right)$$

において,

$$N_k = \sum_{i \in X} w_k(i)$$

となる. 以下, 証明に入る. まず, Koyama-Nakajima の L 関数において次のことが知られている [2].

$$L_\tau(u) = \det(I - uM_\tau)^{-1}$$

つぎに, Foata-Zeilberger の定理から以下のようになる:

$$\det(I - uM_\tau)^{-1} = \phi_{uM_\tau}(\Lambda^{-1}).$$

$\phi_{uM_\tau}(\Lambda^{-1})$ の定義から以下のようになる:

$$\phi_{uM_\tau}(\Lambda^{-1}) = \prod_{l \in \mathrm{Lyn}\, M_\tau} \frac{1}{1 - \phi_{uM_\tau}([l])}.$$

指数関数, 対数関数を用いて, 次のように記述できる:

$$\begin{aligned}\phi_{M_\tau}(\Lambda^{-1}) &= \exp\left(-\log \prod_{l \in \mathrm{Lyn} M_\tau} (1 - \phi_{uM_\tau}([l]))\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{l \in \mathrm{Lyn} M_\tau} \log(1 - \phi_{uM_\tau}([l]))\right).\end{aligned}$$

ここで, 次のように等式変形できる:

$$\exp\left(-\sum_{l \in \mathrm{Lyn} M_\tau} \log(1 - \phi_{uM_\tau}([l]))\right) = \exp\left(\sum_{l \in \mathrm{Lyn} M_\tau} \sum_{k \geq 1} \frac{(\phi_{uM_\tau}([l]))^k}{k}\right).$$

このとき, 定義より, $\phi_{uM_\tau}([l]) = \mathrm{circ}_{uM_\tau}(l)$ である. $\phi_{uM_\tau}([l])$ に対して, $\phi_{uM_\tau}([l]) = \pi_{M_\tau}(l) u^{|l|}$ とする. これより, 次のようになる:

$$\exp\left(\sum_{l \in \mathrm{Lyn} M_\tau} \sum_{k \geq 1} \frac{(\phi_{uM_\tau}([l]))^k}{k}\right) = \exp\left(\sum_{l \in \mathrm{Lyn} M_\tau} \sum_{k \geq 1} \frac{(\pi_{M_\tau}(l))^{|l|k}}{|l|k} u^{|l|k}\right).$$

つまり, 今までのことから次のように表すことができる:

$$\phi_{M_\tau}(\Lambda^{-1}) = \exp\left(\sum_{l \in \mathrm{Lyn} M_\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|l| \pi_{M_\tau}(l)^k}{|l|k} u^{|l|k}\right).$$

ここで $\pi_{M_\tau}(l)$ は重みである. たとえば, $\tau = (\xi^{s_1}, \xi^{s_2}, ..., \xi^{s_5})(123)(45)$ とすると, $\sigma = (123)(45)$ である. このとき, $l \in \mathrm{Lyn}M_\tau$ より $l = 123$ に対して, $\pi_{M_\tau}(123) = \xi^{s_1+s_2+s_3}$ となる. つまり, $\pi_{M_\tau}(123) = w_3(1)$ となる. このことから, つぎのようになる.

$$\phi_{M_\tau}(\Lambda^{-1}) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{i\in X} w_k(i)}{k} u^k\right)$$

よって, Koyama-Nakajima の L 関数の母関数表示は, 重み付き力学系による解釈ができる. つまり, この

$$L_\tau(u) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{k} u^k\right)$$

において, N_k というのは重み付き力学系の m 周期点の軌道の重みの総和となることが得られた.

たとえば, $\sigma = (123)(45), X = \{1,2,3,4,5\}$ のとき, $\tau = (a,b,c,d,e)\sigma \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$ とする. このとき τ の行列表示を A とする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \end{pmatrix}.$$

となる. ここで, $1 \in X$ に対して, σ^1 を作用させた時, 重みは $0. \sigma^2$ を作用させた時, 重みは $0. \sigma^3$ を作用させた時, 重みは $abc. \sigma^4$ を作用させた時, 重みは $0 \sigma^5$ を作用させた時, 重みは $0, \sigma^6$ を作用させた時, 重みは $(abc)^2$ となり, それ以降の重みはこの繰り返しとなる. 他の X の元に対しても同様に重みを考えることができる. よって

$$\phi_{uA}(\Lambda^{-1}) = \exp\left(\sum_{k\geq 1}\left(\frac{3(abc)^k}{3k} u^{3k}\right) + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{2(de)^k}{2k} u^{2k}\right)\right).$$

となる. ここで, この例を使って

$$L_\tau(u) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{k} u^k\right)$$

の証明を具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}
\phi_{uA}(\Lambda^{-1}) &= \prod_{l\in \mathrm{Lyn}A} \frac{1}{1-\mathrm{circ}_{uA}(l)}, \\
&= \frac{1}{1-abcu^3}\frac{1}{1-deu^2}, \\
&= \exp(-\log(1-abcu^3)(1-deu^2)), \\
&= \exp\left(\sum_{k\geq 1}\left(\frac{(abcu^3)^k}{k} + \frac{(deu^2)^k}{k}\right)\right), \\
&= \exp\left(\sum_{k\geq 1}\left(\frac{3(abc)^k}{3k} u^{3k}\right) + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{2(de)^k}{2k} u^{2k}\right)\right).
\end{aligned}$$

となる.

参考文献

[1] 黒川 信重, 小山 信也,『リーマン予想のこれまでとこれから』, 日本評論社, 2009.

[2] Shin-ya KOYAMA and Sachiko NAKAJIMA, "Zeta functions of generalized permutations with application to their factorization fomulas" , *Proceedings of the Japan Academy*, Ser.A, **88**, (2012), p115-p120.