数理解析研究所講究録
第 1998 巻 2016 年 133-149

組合せ論的ゼータの半群表示

森田英章(室蘭工業大学・工)

1 概要

表題のいう「組合せ論的ゼータ」とは, おもに有限グラフのゼータおよび有限離散力学系のゼータのことをいう. その他にも単体的複体のゼータや正則言語のゼータ, あるいは離散的確率過程のゼータなどもこの範疇に含まれる. いずれにしても, 離散的・組合せ論的設定の上に定義されるゼータ関数的な性質を満たす何か, として把握している. ここでいう「ゼータ関数的」の意味は, 次に挙げる諸性質の全てあるいはいくつかを満たすこと, もしくはそれに関し興味深い挙動を示すことを指す:

- オイラー積表示
- 指数的母関数表示
- 行列式表示
- 関数等式
- リーマン型予想
- 特殊値

今回の講演では, これらゼータ的性質のうち前三者, 特に行列式表示に焦点を当てて議論する. なかでも, 行列式表示が期待しうる最も簡明な形

$$\frac{1}{\det(I-A)}$$

を持つものを取り上げる. ここで A は考えている対象から状況に応じて適切に定義される正方行列であり, I は単位行列である. このようなゼータの典型例としては, まず

伊原ゼータ

が挙げられる. 実際, 本稿で展開される議論は, 伊原ゼータにまつわる組合せ論的話題をその元型としている. 伊原ゼータを始め, その諸々の発展形に関する結果を含み, かつ最近の量子ウォークとの関連にも触れた佐藤巌氏 (小山高専) による論説 [Sa] がある. こちらも参照していただきたい.

伊原ゼータ $Z^{\mathrm{I}}_{\Gamma}(u)$ は, 有限グラフ Γ に対して定義されるゼータ [I, Se, Su1, Su2, H, B] である. 行列式表示は Γ の辺行列 T_{Γ} を用いて

$$Z^{\mathrm{I}}_{\Gamma}(u)=\frac{1}{\det(I-uT_{\Gamma})}$$

で与えられる. また, 置換から定まる有限離散力学系上のゼータも基本的な組合せ論的ゼータである. n 次対称群 S_n は有限集合 $X=\{1,2,\ldots,n\}$ に作用し, 有限離散力学系 $\sigma:X\to X$ が得られる. これを $\mathbf{Z}$-力学系とよぶ (c.f., [KK1]). $\mathbf{Z}$-力学系 (X,σ) において, その k-周期点の個数 N_k を用いることにより, (X,σ) のアルチン=メイザー・ゼータ $Z^{\mathrm{AM}}_{\sigma}(u)$ が定義される [AM, KK1]. これも伊原ゼータと同様の行列式表示

$$Z^{\mathrm{AM}}_{\sigma}(u)=\frac{1}{\det(I-uM_{\sigma})}$$

を持つことが知られている (c.f., [KK1]). ただし, $M_{\sigma}=(\delta_{\sigma(i)j})_{i,j}$ は σ に対応する置換行列を表す.

以上のように, 組合せ論的な設定上定義されるゼータで, その行列式表示が期待しうる最も簡明な形 $1/\det(I-A)$ を持つものが本稿の対象である. そして, これらの組合せ論的ゼータが, 半群上で統一的に構築されることが, 本稿の基本的骨格を与える. このことは, フォアタとザイルベルガー [FZ1] らにより, 初めて与えられた見方である. ただし, 彼らの議論の対象は伊原ゼータに限られていた. しかし, そこでの議論の内容を概観すれば, その内容は本稿の対象となっている組合せ論的ゼータに遍く適用できることがわかる. 本稿では, 伊原ゼータの場合で彼らの議論の概要を眺め, そこで展開される手法がアルチン=メイザー・ゼータの行列式表示を簡明に与えることをみる.

そして最後に, 近年進展をみせる絶対数学 (c.f.,[KK2]) におけるゼータの元型の一つである

絶対ヴェイユ・ゼータ

も, 既出の例と同様にフォアタ=ザイルベルガーの議論の骨格の上で構成されることをみる. ただし, 絶対ヴェイユ・ゼータの行列式表示は, 本稿の対象としているものよりも, 幾

分一般的な形をしている. 一元体 $\mathbf{F}_1$ の N 次拡大体 $\mathbf{F}_{1^N}$ に対して, 絶対ヴェイユ・ゼータ $Z_{\mathbf{F}_{1^N}}(u)$ は定義される. その行列式表示は, ある行列 Φ_N を用いて

$$\frac{1}{\det(I - u\Phi_N)^{1/N}}$$

で表されることが示される (c.f. [KK2]).

このような行列式表示 $1/\det(I-A)^\beta$ をもつゼータに対しても, フォアタ＝ザイルベルガー流の構成を与えることができることを, 本稿の最後で触れる. 伊原ゼータに対するフォアタ＝ザイルベルガーの議論は, その理論的基盤の大部を

マクマホンの基本定理

に負う. マクマホンの基本定理は, 正方行列 A の成分を変数とする多変数形式的冪級数 $1/\det(I-A)$ の展開式を組合せ論的に記述する. これを複素数 β に対して

$$\frac{1}{\det(I-A)^\beta}$$

にまで拡張した定理が, 同じくフォアタ＝ザイルベルガーによって得られている [FZ2]. これに基づき, 伊原ゼータやアルチン＝メイザー・ゼータに対する議論の延長上に, 絶対ヴェイユ・ゼータを捉える試みに触れ, 本稿を終える.

2 伊原ゼータ

伊原ゼータは有限グラフに対して定義される組合せ論的ゼータである. 有限無向グラフ

$$\Gamma = (V, E)$$

をとる. ここに V は頂点集合, E は辺集合である. このとき, Γ の

被約素サイクル

に関するオイラー積として伊原ゼータは以下のように定義される. まず, グラフ Γ の各辺 $e \in E$ を任意に向き付け, その結果生じる有向辺を $\overrightarrow{e}$ で表す. 同時にその逆向きの辺 $\overleftarrow{e} := \overrightarrow{e}^{-1}$ も合わせて考える. そして, 頂点集合を $D(V) = V$, 辺集合を $D(E) = \{\overleftarrow{e}, \overrightarrow{e} \mid e \in E\}$ とする有向グラフ $(D(V), D(E))$ を

$$D(\Gamma)$$

で表す．(注意: $D(V) = V$, $|D(E)| = 2|E|$.) 以下, $D(E)$ の元を表すにあたり, はじめから向きを込めて考えることにして, 表記の際には矢印を排して単に e で表すことにするので注意されたい．さて, 辺 $e \in D(E)$ に対して, その始点を $o(e) \in V = D(V)$, 終点を $t(e) \in V$ で表そう．グラフ Γ の閉路とは, 辺の列 $c = e_1e_2\cdots e_n$ で, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $t(e_i) = o(e_{i+1})$ を満たすものをいう．(注意: $e_{n+1} := e_1$.) 長さ n の巡回置換 $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$ に対して, 閉路 $c.\sigma$ を $e_2\cdots e_ne_1$ により定義する．長さが等しい 2 つの閉路 $c = e_1e_2\cdots e_n$ と $c' = e'_1e'_2\cdots e'_n$ に対し, その同値性を $c' = c.(1, 2, \ldots, n)^k$ を満たす k の存在により定義する．すなわち

循環置換

で移り合うとき, 閉路 c, c' は同値であるとよび, その同値類を

サイクル

とよぶことにする．長さが異なる閉路は同値にはならない．

閉路 c を r 個連結しても再び閉路である．この閉路を c^r で表す．閉路 c が

素

であるとは, c がより短い閉路 c' の冪 $c = c'^k$ $(k > 1)$ により表されない場合にいう．また, 閉路 $c = e_1e_2\cdots e_n$ が

被約

であるとは, $e_{i+1} = e_i^{-1}$ を満たす $i = 1, \ldots, n$ が存在しない場合にいう．これら閉路に対する素や被約という概念は, 閉路の同一視と矛盾しないことに注意されたい．すなわち, サイクルに対しても, 素および被約という概念が自然に定義される．有向グラフ $D(\Gamma)$ の (相異なる) 被約素サイクル全体のなす集合を

$$\mathcal{P}_\Gamma$$

で表す．次のオイラー積で定義される u を変数とする形式的冪級数 $Z_\Gamma^{\mathrm{I}}(u)$ を, グラフ Γ の伊原ゼータとよぶ：

$$Z_\Gamma^{\mathrm{I}}(u) = \prod_{c \in \mathcal{P}_\Gamma} \frac{1}{1 - u^{|c|}}.$$

ただし, $|c|$ は閉路 $c = e_1e_2\cdots e_n$ の長さ n を表す．

例を挙げよう．頂点集合を $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, 辺集合を $E = \{\overline{v_1v_2}, \overline{v_1v_3}, \overline{v_2v_3}\}$ とする有限無向グラフ $\Gamma_0 = (V, E)$ を考える．ここで, $\overline{v_1v_2}$ は頂点 v_1 と頂点 v_2 を結ぶ無向辺を表

す. $\overline{v_1v_3}, \overline{v_2v_3}$ についても同様である. すなわち, Γ_0 は v_1, v_2, v_3 を頂点とする「三角形」である. また, $\overrightarrow{v_1v_2}$ により頂点 1 を始点とし, 頂点 2 を終点とする有向辺を表すことにする. その他, $\overrightarrow{v_1v_3}$ などについても同様に解釈する. すると $D(\Gamma_0) = (D(V), D(E))$ は次で与えられる有限有向グラフである：

$$D(V) = \{v_1, v_2, v_3\}(= V),$$
$$D(E) = \{\overrightarrow{v_1v_2}, \overrightarrow{v_2v_3}, \overrightarrow{v_3v_1}, \overrightarrow{v_1v_3}, \overrightarrow{v_3v_2}, \overrightarrow{v_2v_1}\}.$$

この $D(E)$ の六つの元に, 左から順に $1, 2, \ldots, 6$ と名前をつける. 例えば, 有向辺の列 123 は $D(\Gamma)$ の閉路の一つである. 同時に被約かつ素であることも容易に理解される. その他に 231, 312 も閉路であるが, これらはサイクルとして 123 と同一視される. あきらかに 231, 312 も被約素閉路である. 同様に被約素閉路 456 は 564, 645 と同一視される. そして

$$\mathcal{P}_{\Gamma_0} = \{123, 456\}$$

を得る. 従って, Γ_0 の伊原ゼータは

$$Z^I_{\Gamma_0}(u) = \frac{1}{(1-u^3)^2}$$

で与えられる.

次に, 伊原ゼータの母関数表示について述べる. グラフ Γ における長さ k の被約閉路の個数を

$$N_k$$

で表すことにする. 被約閉路全体は被約素閉路の積全体となる. このとき伊原ゼータの母関数表示は

$$Z^{\mathrm{I}}_{\Gamma}(u) = \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{N_k}{k} u^k\right)$$

で与えられることが知られている (e.g., [Sa]). 上のグラフ Γ_0 の場合を例にとり観察してみたい. Γ_0 の被約閉路の長さは, すべて 3 の倍数となることは明らかであろう. 長さ 3 の被約閉路は 123, 231, 312, および 456, 564, 645 なので, $N_3 = 6$ となる. 次に長さ 6 の被約閉路は 123123, 456456 およびその循環置換のみなので $N_6 = 6$ を得る. 閉路 123456 や 456123 は被約ではないことに注意してもらいたい. 同様に考えれば, 長さ $3k$ の被約閉路は $(123)^k, (456)^k$ およびその循環置換のみであるから, 任意の k に対して $N_{3k} = 6$ を得る. そして簡単な計算により, $Z^{\mathrm{I}}_{\Gamma_0}(u)$ の母関数表示は, オイラー積表示（定義）に一致することが確認できる.

最後に行列式表示に触れる．有限グラフ $\Gamma=(V,E)$ に対して，$|E|\times|E|$ 行列 $T=T_\Gamma=(t_{ee'})_{e,e'\in E}$ を

$$t_{ee'}=\begin{cases}1, & \text{ただし } t(e)=o(e'),\ \text{かつ } e'\neq e^{-1},\\ 0, & \text{上記以外の場合},\end{cases}$$

により定義する．この行列 T をグラフ Γ の

辺行列

とよぶ．そして伊原ゼータの行列式表示は

$$Z_\Gamma^{\mathrm{I}}(u)=\frac{1}{\det(I-uT_\Gamma)}$$

で与えられることが知られている [H]．例に挙げたグラフ Γ_0 の場合をみる．添字集合は $D(E)=\{1,2,\ldots,6\}$ として辺行列 T_{Γ_0} を具体的に構成すると

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

となる．行列式 $\det(I-uT_{\Gamma_0})$ を計算すれば $(1-u^3)^2$ となることは明らかである．

3 LFT と MMT

前節で概要を眺めた伊原ゼータや，後に触れるアルチン＝メイザー・ゼータは，ともに最も簡明な行列式表示 $1/\det(I-A)$ をもつ．一般に，単位的可換環 R に成分をもつ正方行列 A に対して，式 $1/\det(I-A)$ は原理的には必ずオイラー積表示をもつことが，フォアタとザイルベルガーらによって示されている．フォアタ＝ザイルベルガーの定理の証明は三段階からなる．これら各段階における議論は，それぞれ「リンドンの分解定理」，「マクマホンの基本定理」，そして「フォアタ＝ザイルベルガー全単射」に負う．本節では、このうちの二つ「リンドンの分解定理」と「マクマホンの基本定理」を準備しておく．

有限個の非可換変数の集合 (アルファベット)

$$X=\{1<2<\cdots<n\}$$

を考える. ただし, X には記されているように全順序をあたえておく. アルファベット X で生成される半群を X^* で表す. 半群 X^* の元は X 上の語とよばれる. 語 $w \in X^*$ が「素」かつ「極小」であるとき

リンドン語

とよぶ. ここで, 語 w が素であるとは, w がより短い語 u の冪 u^k で書けないことをいう. また, 語 $w = i_1 i_2 \cdots i_r$ が極小であるとは, w がその循環置換類 $\mathrm{Re}(w) = \{i_1 i_2 \cdots i_r, i_2 \cdots i_r i_1, \ldots, i_r, i_1 \cdots .i_{r-1}\}$ において、他者にいずれよりも大きくないときにいう. $X = \{1 < 2 < 3\}$ の場合で例をみてみよう. 語 $1212 = (12)^2$ は素ではないのでリンドンではない. 語 1312 は素であるが, $\mathrm{Re}(1312) = \{1312, 3121, 1213, 2131\}$ のなかで極小ではないのでリンドンではない. しかし 1213 は素でありかつ $\mathrm{Re}(1213) = \mathrm{Re}(1312)$ の中で極小であるのでリンドンである. 以下, アルファベット X 上のリンドン語全体を

$$L = L(X)$$

で表す.

リンドン語は半群 X^* における「素なるもの」とみなすことができる. 語 $w \in X^*$ に対して, リンドン語の列 $(l_1, l_2, \ldots, l_r)$ で次の二条件を満たすものがただ一つ存在する：

$$w = l_1 l_2 \cdots l_r, \quad l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_r.$$

これは半群における「素因数分解定理」である. これを

リンドンの分解定理

という [CFL](also [L]). 英語では Lyndon Factorization Theorem なので, 今後 LFT と省略することにしたい. また LFT の結果生じる $w \in X^*$ のリンドン語への分解 $w = l_1 l_2 \cdots l_r$ を w の

リンドン分解

とよび, またそこに現れる各リンドン語 l_i を, w の

リンドン因子

とよぶことにする. 例えば $X = \{1 < 2 < 3\}$ 上の語

$$w = 332312121312$$

のリンドン分解は

$$w = (3)(3)(23)(121213)(12)$$

である．ここで注意してもらいたいのは，$w = (3)(3)(2)(3)(1)(2)(1)(2)(1)(3)(1)(2)$ もリンドン語の積への分解であるが，リンドン分解ではない．LFT で求められているリンドン因子の間の順序関係が崩壊している．このように，$w \in X^*$ を単にリンドン語の積に分解する仕方は様々あれど，各リンドン語の間に非増大という条件を課せば，その分解の仕方が一意に定まるということが LFT の主張である．LFT はフォアタ=ザイルベルガーの定理の証明において，その第一段を担うことになる．

マクマホンの基本定理を一言で述べれば，式 $1/\det(I-A)$ の組合せ論的記述である．アルファベット $X = \{1 < 2 < \cdots < n\}$ を添字集合とし，$\mathbf{x} = \{x_i\}_{i\in X}$ を可換変数の集合とする．単位的可換環 R に成分をもつ n 次正方行列

$$A = (a_{ij})_{i,j\in X}$$

および非負整数からなる多重指数 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ に対して，多項式

$$P_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{i\in X}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n)^{k_i}$$

における単項式 $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ の係数を $G(\mathbf{k}) = G(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ で表す．このとき，等式 $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n_{\geq 0}} G(\mathbf{k}) = 1/\det(I-A)$ を

マクマホンの基本定理

とよぶ [Ma]．マクマホンの基本定理は英語で書くと MacMahon Master Theorem なので，今後は MMT と略すことにする．少し例をみてみよう．例えば $n = 2$ の場合に計算してみると，$1/\det(I-A)$ は $1 + (\operatorname{tr} A - \det A) + (\operatorname{tr} A - \det A)^2 + \cdots$ となる．そこで，$1/\det(I-A)$ で A の成分に関する斉一次成分を計算してみれば $a_{11} + a_{22}$ であることは容易に分かる．一方，$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n_{\geq 0}} G(\mathbf{k})$ における斉一次成分は $G(1,0) + G(0,1)$ であり，定義に従い計算すれば $G(1,0) = a_{11}$, $G(0,1) = a_{22}$ が確認できる．同様に斉二次成分に関しても $(\operatorname{tr} A)^2 - \det A = G(2,0) + G(1,1) + G(0,2)$ であればよい．実際，$G(2,0) = a_{11}^2$, $G(1,1) = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$, $G(0,2) = a_{22}^2$ である．

4 フォアタ=ザイルベルガー

全順序付けられたアファベット $X = \{1 < 2 < \cdots < n\}$ 上のリンドン語 $l \in L$ に対して，互いに可換な変数 $[l]$ を与えることにより，L で添字つけられる可換変数の族 $[L]$ を考

える : $[L] = \{[l] \mid l \in L\}$. 整数環 $\mathbf{Z}$ 上 $[L]$ で生成される形式的冪級数環を R で表す. 互いに可換な成分をもつ n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in X}$ に対し, これら n^2 個の成分 a_{ij} で生成される $\mathbf{Z}$ 上の形式的冪級数環を S で表す. 環 R の生成元 $[l]$ $(l = i_1 i_2 \cdots i_k)$ に対して, S の元 $\mathrm{circ}_A(l) := a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1}$ を対応させることにより, $\mathbf{Z}$-代数準同型

$$\varphi_A : R \to S$$

を得る: $\varphi_A([l]) := \mathrm{circ}_A(l)$ $(l \in L)$. 環 R の元

$$\Lambda$$

を $\Lambda = \prod_{l \in L}(1 - [l])$ で定義する. このとき, 環 S における等式 $\varphi_A(\Lambda) = \det(I - A)$ が成立する. これが

フォアタ＝ザイルベルガーの定理

の主張である [FZ1]. また, Λ は環 R の可逆元 ($\Lambda^{-1} = \prod_{l \in L} \prod_{k \geq 0} [l]^k$) であることに注意すれば, フォアタ＝ザイルベルガーの定理から,

$$\frac{1}{\det(I - A)} = \varphi_A(\Lambda^{-1})$$

が結論される. すなわち, フォアタ＝ザイルベルガーの定理 (FZT) は, 互いに可換な成分をもつ正方行列 A に対して, 式 $1/\det(I - A)$ に半群上で統一的な記述を与える定理であると解釈することができる.

伊原ゼータに対する彼らの議論は後ほどみることにして, ここでは FZT の証明の概要を述べておく. 先述の通り, 証明は三段からなる. 任意の $w \in X^*$ をとり, そのリンドン分解を $w = l_1 l_2 \cdots l_r$ とする. このとき環 R の元 $[l_1][l_2] \cdots [l_r]$ を

$$[w]$$

で表すことにする: $[w] = [l_1][l_2] \cdots [l_r]$. また, 今後 $\varphi_A([w]) = \mathrm{circ}_A(l_1)\mathrm{circ}_A(l_1) \cdots \mathrm{circ}_A(l_r)$ がたびたび現れることになるので, これを簡単に

$$\mathrm{dec}_A(w)$$

と表すことにしておきたい: $\mathrm{dec}_A(w) = \varphi_A([w]) = \mathrm{circ}_A(l_1)\mathrm{circ}_A(l_1) \cdots \mathrm{circ}_A(l_r)$. ちなみに, この dec は decreasing の略である. さて, 環 R の元 $\Lambda = \prod_{l \in L}(1 - [l])$ において, $[l]$ が

互いに可換であることから, L の全順序に関して小さいものを右に寄せるように並べ替えたものを $\prod_{l\in L}^{\leftarrow}(1-[l])$ で表すことにする. すると LFT より, $\prod_{l\in L}^{\leftarrow}(1-[l])^{-1}=\sum_{w\in X^*}[w]$ となるので,

$$\varphi_A(\Lambda^{-1})=\sum_{w\in X^*}\mathrm{dec}_A(w)$$

を得る. これが証明の第一段である.

第二段に進もう. 任意に $w=i_1i_2\cdots i_k\in X^*$ をとる. このとき, w の各文字 $j_1,j_2,\ldots,j_k$ を, 小さくない順に左から並べ直して得られる語を

$$\tilde{w}$$

であらわすことにする. 例えば, $X=\{1<2<3\}$ 上の語 $w=2231213$ に対しては, $\tilde{w}=1122233$ である. いま $w=j_1j_2\cdots j_k$ に対して, $\tilde{w}=i_1i_2\cdots i_k$ としよう. このとき, 環 S の元 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_kj_k}$ を

$$\mathrm{vert}_A(w)$$

により表すことにする: $\mathrm{vert}_A(w)=a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_kj_k}$. ちなみにこの vert は vertical の略である. 例えば, $w=2231213$ の場合であれば, $\mathrm{vert}_A(w)=a_{12}a_{12}a_{23}a_{21}a_{22}a_{31}a_{33}$ である. このように記号を設定すれば, MMT は次のように表せる：

$$\frac{1}{\det(I-A)}=\sum_{w\in X^*}\mathrm{vert}_A(w).$$

具体的に $n=2$ の場合に考えてみよう. 特に, 多重指数が $\mathbf{k}=(2,1)$ の場合を考えてみると, 多項式 $(a_{11}x_1+a_{12}x_2)^2(a_{21}x_1+a_2x_2)$ における単項式 $x_1^2x_2$ の係数 $G(2,1)$ を求めれば, それぞれ $x_1x_1x_2,x_1x_2x_1,x_2x_1x_1$ の係数の総和をとればよいので, $G(2,1)=a_{11}a_{11}a_{22}+a_{11}a_{12}a_{21}+a_{12}a_{11}a_{21}$ となる. これが $\mathrm{vert}_A(112)+\mathrm{vert}_A(121)+\mathrm{vert}_A(211)$ に一致することは容易に理解できる. いま, 多重指数 $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対して, 「重み」が $\mathbf{k}$ の語全体を

$$X^*(\mathbf{k})$$

で表すことにする. 例えば $\mathbf{k}=(2,1)$ のときは, $X^*(\mathbf{k})=\{112,121,211\}$ である. そしてここでの計算と同様に考えれば,

$$G(\mathbf{k})=\sum_{w\in X^*(\mathbf{k})}\mathrm{vert}_A(w)$$

が直ちに理解される.

以上では, $\varphi_A(\Lambda^{-1}) = \sum_{w\in X^*} \mathrm{dec}_A(w)$ と $1/\det(I-A) = \sum_{w\in X^*} \mathrm{vert}_A(w)$ であることを概観した. フォアタ=ザイルベルガーの定理は, これら両者が一致することを主張するものである. すなわち $\sum_{w\in X^*} \mathrm{vert}_A(w) = \sum_{w\in X^*} \mathrm{dec}_A(w)$ の成立を謳う定理である. その証明は全単射 $\Psi : X^* \to X^*$ で, $\mathrm{vert}_A(w) = \mathrm{dec}_A(\Psi(w))$ が任意の $w \in X^*$ に対して成立するものを構成することにより行われる. これが第三段である.

全単射 Ψ の構成を, 具体例を通じて概観しておく. アルファベット $X = \{1 < 2 < 3\}$ 上の語 $w = 33231322112$ に対して $\Psi(w)$ を構成しよう. まず $\mathrm{vert}_A(w)$ を考える. 全単射 Ψ の構成過程をみるには, $\mathrm{vert}_A(w)$ を次のように対語で表示すると状況が把握しやすい:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

第一行が $\tilde{w}$ で, 第二行が w である. すなわち, 対語

$$\begin{bmatrix} \tilde{w} \\ w \end{bmatrix}$$

を列ごとにみて, それぞれの列が行列 A の成分の添字を表していると考える. この対語 $\mathbf{w} = {}^t[\tilde{w}, w]$ を次のように分解する. 表記の簡便さのため, $\mathbf{w}$ の各列を左から順に $c_1, c_2, \ldots, c_{11}$ と名付けておく. 例えば, $c_1 = {}^t[1,3]$, $c_3 = {}^t[1,2]$ 等である. そこでまず, $\mathbf{w}$ の最左列 c_1 に着目する. 次に, c_1 より右にある列 c_k のなかで, c_1 の第二成分 3 を第一成分にもつ列のうち, k の値が最小のものを選ぶ. この例では $c_8 = {}^t[3,2]$ がそれにあたる. この時点で $\mathbf{w}$ から c_1 を取り除く. 今度は c_8 の右にある列 c_k のなかで, c_8 の第二成分 2 を第一成分にもつ列のうち, k の値が最小のものを選ぶ. ただし, 最後の列 (この例では第十一列) まで件の列 c_k がない場合は, $\mathbf{w} \setminus \{c_1\}$ の先頭に戻り, 再度条件に合う列を探す. いうなれば, 11 (w の長さ) を法として最小の k を探す. すると, この例では $c_4 = {}^t[2,3]$ がそれにあたる. そして $\mathbf{w} \setminus \{c_1\}$ から c_8 も取り除き, $\mathbf{w} \setminus \{c_1, c_8\}$ としておく. これを繰り返す. するとこれ以降は c_9 が選ばれる. ただし, c_9 においてはその第二成分が出発点であった c_1 の第一成分と等しく 1 となる. この時点で, それまで取り出された列からなる対語 $\mathbf{w}_1 = [c_1, c_8, c_4, c_9]$ と, 残りの列のなす対語 $\mathbf{w}_2 = [c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_{10}, c_{11}]$ に分ける:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

以上と同じ作業を $\mathbf{w}_2$ に対して施すことにより, $\mathbf{w}$ の分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

を得る. 次にこれらの五個の因子の第一行第一成分を比較し, それが大きいものを左へ移す. 第一行第一成分が同じ因子同士の入れ替えは行わない. すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

となる. そして $\Psi(w)$ はこれら各因子の第一行を続けて読むことにより得られる語

$$\Psi(w) = 23213231312$$

と定める. $\Psi(w)$ のリンドン分解は$(23)(2)(1323)(13)(12)$ であるから, $\mathrm{vert}_A(w) = \mathrm{dec}_A(\Psi(w))$ も容易に確認できる.

節の最後に Ψ に関する注意点を一つ述べておく. ここで紹介した全単射 Ψ の定義は, フォアタ=ザイルベルガー [FZ1] におけるものとは異なる. フォアタ=ザイルベルガーはここでいうところの Ψ^{-1} にあたるものを定義している. もし彼らの全単射 Φ がここでの Ψ^{-1} に一致していれば, $\Phi(\Psi(w)) = w$ となるはずであるが, 彼らの定義に従って $\Phi(\Psi(w))$ を計算すると 23312331122 となり, もとの w とは異なる.

5 伊原ゼータ再説

フォアタ=ザイルベルガーの定理 $1/\det(I-A) = \varphi_A(\Lambda^{-1})$ の右辺 $\varphi_A(\Lambda^{-1})$ は, Λ の定義から

$$\prod_{l\in L} \frac{1}{1-\mathrm{circ}_A(l)}$$

となる. ただし, A は可換環に成分をもつ正方行列とする. リンドンの分解定理により, リンドン語は半群における「素数」に対応していると考えられることから, これを式 $1/\det(I-A)$ の

オイラー積

とみなすことも不自然ではないであろう. すなわち, 可換成分をもつ任意の正方行列 A に対し, 式 $1/\det(I-A)$ にはオイラー積に対応する表式が常に存在することになる. 例えば, 伊原ゼータの場合は, このことはまさにそうなのであって, 式 $\prod_{l\in L} 1/(1-\mathrm{circ}_A(l))$ は,

そのオイラー積表示そのものになる．ここでは，やや単純にすぎる例ではあるが第2節で挙げた例「三角形」を用いて，これを観察しおおよその雰囲気をご覧いただきたい．

有限グラフ $\Gamma = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{\overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \overline{v_1v_3}\}$ に対し，$D(\Gamma)$ の辺行列 $T = (t_{ij})$ は

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられた．この行列に対して $\varphi_{uT}(\Lambda^{-1}) = \prod_{l \in L(X)} 1/(1 - \mathrm{circ}_{uT}(l))$ を計算してみよう．ただし，X は $D(\Gamma)$ の辺集合 $D(E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ にとる．右辺の分母において $\mathrm{circ}_{uT}(l)$ が 0 となるリンドン語 $l \in L(X)$ は積に寄与しないので，$\mathrm{circ}_{uT}(l) = u^{|l|}\mathrm{circ}_T(l)$ に注意すれば ($|l|$ はリンドン語 $l = i_1 i_2 \cdots i_r$ の長さ r を表す)，

$$L_T = L_T(X) := \{l \in L(X) \mid \mathrm{circ}_T(l) \neq 0\}$$

を決定すればよいことになる．以下，順次 L_T の元を決定していこう．まず 1 から始まるリンドン語で L_T に含まれるものを決定する．リンドン語 $l = i_1 i_2 \cdots i_r$ に対して，

$$\mathrm{circ}_T(l) = t_{i_1 i_2} t_{i_2 i_3} \cdots t_{i_r i_1}$$

であるから，$t_{i_1 i_2} \neq 0$ より $i_1 = 1$ であれば $i_2 = 2$ でなければならない．次に $t_{i_2 i_3} \neq 0$ より $i_2 = 2$ であれば $i_3 = 3$ でなければならない．そして $t_{i_3 i_4} \neq 0$ より $i_4 = 1$ でなければならない．これを繰り返せば，l は因子 123 の冪でなければならないことになるが，l は素なのだから $l = 123$ と決定される．従って，1 から始まる L_T の元は 123 しかない．次に 2 から始まる L_T の元を決定しよう．これは同じ議論を繰り返すと 231 が候補として挙がるが，これは極小ではないのでリンドン語ではない．よって 2 から始まる L_T の元は存在しない．同様に 3 から始まる L_T の元も存在しない．そこで，4 から始まる L_T の元を探してみよう．これも同じ議論を繰り返すことにより 456 が L_T に含まれることがわかり，同時に 5, 6 から始まる L_T の元が存在しないことがわかる．以上より

$$L_T = \{123, 456\}$$

が示され，L_T が Γ の被約素サイクルを与えていることが，すなわち $L_T = \mathcal{P}_\Gamma$ であることが理解される．また，$l \in L_T$ に対して $\mathrm{circ}_{uT}(l) = u^{|l|}$ であることに注意すれば，$Z_\Gamma^I(u)$ の

オイラー積表示

$$\varphi_{uT}(\Lambda^{-1}) = \prod_{c \in \mathcal{P}_\Gamma} \frac{1}{1-u^{|c|}}$$

が得られる.

この例では, 被約素サイクルの個数が二個となり, 議論が極端に簡明になったが, 一般には被約素サイクルの個数は無限個となるのが普通で, これは特殊に過ぎる例である. 例えば, この「三角形」の辺の中で一つでも二重辺とすれば, その途端に被約素サイクルの個数は無限個となる. ここでの例で被約素サイクルの個数が有限個となった理由は, 辺行列 T が

置換行列

となることにある. 置換行列を対称群の元と見てサイクル分解した際に現れる巡回置換が, Γ の被約素サイクルに対応する. 同様に考えれば, 置換 $\sigma \in S_n$ に対するアルチン=メイザー・ゼータ $Z_\sigma^{\mathrm{AM}}(u)$ の場合も, $\varphi_{uM_\sigma}(\Lambda^{-1})$ がオイラー積表示を直接与えていることがわかる.

6 絶対ヴェイユ・ゼータ

本稿ではここまで, 伊原ゼータやアルチン=メイザー・ゼータなど, 行列式表示が, 式 $1/\det(I-A)$ で与えられるゼータを扱い, それらがフォアタ=ザイルベルガーの定理のもと, 半群上で統一的に把握されることをみた. この最終節ではより一般に, 行列式表示が複素数 β に対して

$$\frac{1}{\det(I-A)^\beta}$$

で与えられるゼータを取り上げる. それが節の表題にある

絶対ヴェイユ・ゼータ

である. ここでは, 伊原ゼータやアルチン=メイザー・ゼータ同様, 絶対ヴェイユ・ゼータも半群上で構成されることを紹介する.

絶対ヴェイユ・ゼータは, 絶対ゼータの嚆矢として [DKK] において導入された. 一元体や絶対ゼータに関するその他の定義や結果については, すべて [KK2] を参照していただきたい. 本稿ではその行列式表示の形のみに興味があり, その叙述に必要な定義や記号の導入のみに留める. 一元体 $\mathbf{F}_1 = \{0,1\}$ の N 次拡大体 $\mathbf{F}_{1^N}$ は, 1 の N 乗根のなす乗法群

μ_N にゼロ元 0 を添加した集合 $\mu_N \cup \{0\}$ で定義される. ここでは, 絶対ヴェイユ・ゼータ $Z^{\mathrm{Weil}}_{\mathbf{F}_{1^N}}(u)$ を, 以下の u を変数とする形式的冪級数として定義する：

$$Z^{\mathrm{Weil}}_{\mathbf{F}_{1^N}}(u) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_1}(\mathbf{F}_{1^N}, \mathbf{F}_{1^m})|}{m} u^m\right).$$

その行列式表示は μ_{N^2} の自己同型 $\Phi_N : \mu_{N^2} \to \mu_{N^2} : \alpha \mapsto \alpha^{N+1}$ によって

$$Z^{\mathrm{Weil}}_{\mathbf{F}_{1^N}}(u) = \frac{1}{\det(1 - u\Phi_N)^{1/N}}$$

で与えられることが知られている (c.f.[KK2]).

このように, 絶対ヴェイユ・ゼータは行列式表示が $1/\det(I-A)^\beta$ で与えられるゼータの例となっている. 以下では, 式 $1/\det(I-A)^\beta$ が伊原ゼータなどの場合と同様に半群上で構成されることを紹介する. A は可換成分をもつ n 次正方行列とし, β は複素数とする. 全順序付けられたアルファベット $X = \{1 < 2 < \cdots < n\}$ に対して, 形式的冪級数環 R はこれまでと同様に定義する. また, 行列 A に対して, 形式的冪級数環 S も同様に定義する. 語 $w = i_1 i_2 \cdots i_r \in X^*$ に対しては, r 次対称群 S_r が, 文字の位置の入れ替えとして右から作用する：$w^\sigma := i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \cdots i_{\sigma(r)}$, $\sigma \in S_r$. いま, 重み $\mathbf{k} = (k_i) \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ をもつ語 $w \in X^*(\mathbf{k})$ に対して, 複素数

$$c_w(\beta)$$

を

$$\frac{1}{\mathbf{k}!} \sum_{\substack{\sigma \in S_{|\mathbf{k}|} \\ \bar{w}^\sigma = w}} \beta^{l(\rho(\sigma))}$$

により与える. ここで $\mathbf{k}! := k_1! k_2! \cdots k_n!$, $|\mathbf{k}| := k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ とおいている. また, $\sigma \in S_{|\mathbf{k}|}$ に対して, $\rho(\sigma)$ でその巡回型（サイクルタイプ）を, $l(\rho(\sigma))$ は分割 $\rho(\sigma)$ の長さである. 複素数体 $\mathbf{C}$ 上の線型写像

$$\varphi^{(\beta)}_A : R \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to S \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$$

を, $\varphi^{(\beta)}_A([w]) = c_w(\beta)\mathrm{dec}_A(w)$ で定義する. すると

$$\varphi^{(\beta)}_A(\Lambda^{-1}) = \frac{1}{\det(I-A)^\beta}$$

が得られる [Mo]. これが本稿の主定理である. 証明は [FZ2] にその基盤をおく. この定理によれば, 絶対ヴェイユ・ゼータ $Z^{\mathrm{Weil}}_{\mathbf{F}_{1^N}}(u)$ は $\varphi^{(1/N)}_{u\Phi_N}(\Lambda^{-1})$ と表示され, 伊原ゼータやアルチン＝メイザー・ゼータ同様, 半群上で構成されることになる.

References

[AM] M. Artin and B.Mazur, On periodic points, *Ann. Math.*, **81** (1965), 82-99.

[B] H. Bass, The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice, *Internat. J. Math.*, **3** (1992), 717-797.

[CFL] K. Chen, R. Fox and R. Lyndon, Free differential calculus IV - The quotient groups of the lower central series, *Ann. Math.*, **68** (1958), 81-95.

[DKK] A. Deitmar, S. Koyama and N. Kurokawa, Absolute zeta functions, *Proc. Japan Acad.*, **84A** (2008), 138-142.

[FZ1] D. Foata and D. Zeilberger, A combinatorial proof of Bass's evaluations of the Ihara-Selberg zeta function for graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **1** (1988), 425433.

[FZ2] D. Foata and D. Zeilberger, Laguerre polynomials, weighted derangements and positivity, *SIAM J. Disc. Math.*, **351** (1999), 2257-2274.

[H] K. Hashimoto, On the zeta- and L-functions of finite graphs, *Internat. J. Math.*, **1** (1990), 381-396.

[I] Y. Ihara, On discrete subgroups of the two projective linear group over p-adic fields, *J. Math. Soc. Japan*, **18** (1966), 219-235.

[KK1] 黒川信重-小山信也, リーマン予想のこれまでとこれから, 日本評論社, 2009.

[KK2] 黒川信重-小山信也, 絶対数学, 日本評論社, 2010.

[L] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Application **17**, Addison-Wesley, 1983.

[Ma] Major P. MacMahon, *Combinatorial Analysis, vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1915.

[Mo] H. Morita, The absolute Weil zeta function and Lyndon words, in preparation.

[Sa] 佐藤巖, グラフのゼータ関数とその行列式表示, 室蘭工業大学数理談話会報告集, 2011.

[Se] J. -P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[Su1] T. Sunada, *L*-functions in geometry and some applications, in Lecture Notes in Math., vol. 1201, pp. 266-284, Springer-Verlag, New York, 1986.

[Su2] 砂田利一, 基本群とラプラシアン, 紀伊国屋書店, 1988.