数理解析研究所講究録
第1998巻 2016年 119-132

Ish配置とShi配置の自由性

北海道大学　　陶山　大輔*
Hokkaido University　　Daisuke Suyama

概要

Shi配置はKazhdan-Lusztig cellについての研究の中でJ. Y. Shiによって導入された，超平面配置研究の中では比較的古くよく研究されている対象である．Ish配置はq,t-カタラン数の新しい解釈を与えるものとしてD. Armstrongによって近年導入された新しい対象である．D. ArmstrongとB. Rhoadesはこの二つの超平面配置の間に存在するいくつかの特異な共通点を指摘した論文の中で，Shi配置は自由配置だということが知られているが，Ish配置も自由配置であろうかという問題を提起した．本論文では，Ish配置が自由であることを示し，更に，Ish配置の部分配置として定義されるdeleted Ish配置が自由性を持つための必要十分条件を与える．本研究は阿部拓郎氏，辻栄周平氏との共同研究である．

1 序文

$\mathbb{K}$を標数0の体とし，$\{x_1,\ldots,x_\ell\}$をℓ次元ベクトル空間$\mathbb{K}^\ell$の双対空間$(\mathbb{K}^\ell)^*$の基底とする．また，$x\in(\mathbb{K}^\ell)^*$と$k\in\mathbb{K}$に対し，$\{x=k\}$でアフィン超平面$\{v\in\mathbb{K}^\ell\mid x(v)=k\}$を表すこととする．このとき，$A_{\ell-1}$型のコクセター配置$\mathrm{Cox}(\ell)$とは

$$\mathrm{Cox}(\ell)=\{\{x_i-x_j=0\mid 1\leq i<j\leq\ell\}\}$$

のことであり，組み紐配置とも呼ばれる．本論文の主対象である**Shi配置**$\mathrm{Shi}(\ell)$と**Ish配置**$\mathrm{Ish}(\ell)$は，$A_{\ell-1}$型のコクセター配置$\mathrm{Cox}(\ell)$に含まれ

*email: dsuyama@math.sci.hokudai.ac.jp

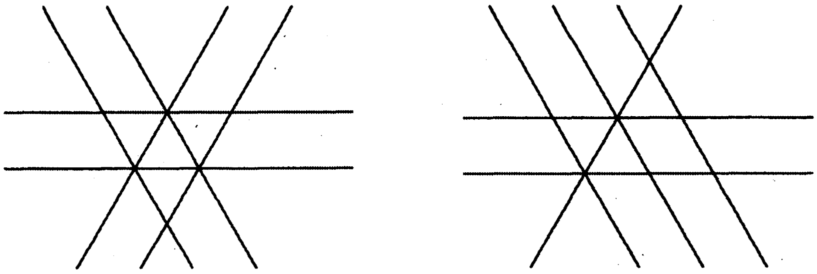

図 1: 左図が Shi(3), 右図が Ish(3).

る超平面に平行ないくつかのアフィン超平面を, $\mathrm{Cox}(\ell)$ に付け加えるという形で以下のように定義される.

$$\mathrm{Shi}(\ell) := \mathrm{Cox}(\ell) \cup \{\{x_i - x_j = 1\} \mid 1 \leq i < j \leq \ell\},$$
$$\mathrm{Ish}(\ell) := \mathrm{Cox}(\ell) \cup \{\{x_1 - x_j = i\} \mid 1 \leq i < j \leq \ell\}.$$

Shi 配置は J. Y. Shi によるアフィンワイル群の Kazhdan-Lusztig cell の研究 [10] の中で導入され, [4, 6, 7, 12, 17] を含む多くの論文で重要な研究対象として扱われてきた. 特に, 自由超平面配置の観点からは, C. A. Athanasiadis[4] や吉永正彦 [17] が Shi 配置が自由であることを示している. 一方, Ish 配置は D. Armstrong[1] によって q,t-カタラン数の新しい解釈を与えるために近年導入されたばかりの新しい超平面配置のクラスである. D. Armstrong と B. Rhoades は [2] の中でこれら二つの超平面配置が持つ特異な類似性について論じた. その一つが超平面配置の特性多項式についてである.

$\mathcal{A}$ を $\mathbb{K}^\ell$ 内の超平面配置とする. $L(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ に含まれる超平面配置の共通部分で空でないものからなる集合, すなわち,

$$L(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq \emptyset \;\middle|\; \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \right\}$$

とし, $L(\mathcal{A})$ 上に $X \leq Y \Leftrightarrow Y \subseteq X$ で半順序を定め, **交叉半順序集合**と呼ぶ. このとき, $\mathcal{A}$ に対するメビウス関数 $\mu : L(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ が次のように帰納的に定義される.

$$\mu(\mathbb{K}^\ell) = 1,$$
$$\mu(X) = -\sum_{\mathbb{K}^\ell \leq Y < X} \mu(Y) \quad (X \neq \mathbb{K}^\ell).$$

更に，このメビウス関数を用いて $\mathcal{A}$ の**特性多項式** $\chi(\mathcal{A},t)\in\mathbb{Z}[t]$ が

$$\chi(\mathcal{A},t)=\sum_{X\in L(\mathcal{A})}\mu(X)t^{\dim X}$$

と定義される．Shi 配置と Ish 配置の特性多項式に関して，次の関係式が成り立つ．

定理 1.1 ([1, 7]). Shi 配置と Ish 配置の特性多項式は

$$\chi(\mathrm{Shi}(\ell),t)=\chi(\mathrm{Ish}(\ell),t)=t(t-\ell)^{\ell-1}$$

で与えられる．

超平面配置の自由性を論じるために，いくつか用語の準備をする．$\mathbb{K}^\ell$ 内のアフィン超平面配置 $\mathcal{A}$ （すべての超平面が共通部分を持つとは限らないような超平面配置）に対し，$\mathbb{K}^\ell$ を $V=\mathbb{K}^{\ell+1}$ の中に埋め込み，$\{x_1,\dots,x_\ell,z\}$ が V^* の基底となるようにする．また，S を V^* の対称代数とし，$S=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_\ell,z]$ と同一視する．このとき，V 内の中心的な（すべての超平面が共通部分を持つような）超平面配置 $\mathbf{c}\mathcal{A}$ を定義多項式

$$Q(\mathbf{c}\mathcal{A})=z\cdot z^{\deg Q(\mathcal{A})}Q(\mathcal{A})\left(\frac{x_1}{z},\dots,\frac{x_\ell}{z}\right)\in S$$

により定め，$\mathcal{A}$ の**錐化**という．$\mathcal{A}$ の錐化は次の様に解釈することも出来る．$\mathcal{A}$ を $\{z=1\}$ 上に実現したときに，$\mathcal{A}$ に含まれる（$\mathbb{K}^\ell$ の）超平面 H に対して，H と原点を含む（V の）超平面を $\mathbf{c}H$ とおく．このとき，$\mathbf{c}\mathcal{A}=\{\mathbf{c}H\mid H\in\mathcal{A}\}\cup\{\{z=0\}\}$ である．

多項式環 S の導分加群 $\mathrm{Der}(S)$ は

$$\mathrm{Der}(S):=\{\theta:S\to S\mid\theta:\mathbb{K}\text{-線形},\ \theta(fg)=f\theta(g)+\theta(f)g,\ f,g\in S\}$$

と定義される．V 内の中心的超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A}$ の**対数的導分加群** $D(\mathcal{A})$ が以下で定義される．

$$\begin{aligned}D(\mathcal{A})&:=\{\theta\in\mathrm{Der}(S)\mid\theta(Q(\mathcal{A}))\in Q(\mathcal{A})S\}\\&=\{\theta\in\mathrm{Der}(S)\mid\theta(\alpha_H)\in\alpha_H S,\ H\in\mathcal{A}\}.\end{aligned}$$

ここで，α_H は $\ker(\alpha_H)=H$ となるような S の一次式である．$D(\mathcal{A})$ が自由 S 加群であるとき，$\mathcal{A}$ を**自由配置**と呼ぶ．このとき，$D(\mathcal{A})$ の基底 $\{\theta_0,\dots,\theta_\ell\}$ として斉次元からなるものが取れ，その次数の組 $\exp\mathcal{A}=$

$(\deg\theta_0, \ldots, \deg\theta_\ell)$ は基底の選び方によらず定まり，自由配置 $\mathcal{A}$ の**指数**と呼ばれる.

本論文では，D. Armstrong と B. Rhoades によって [2, p. 1527, (3)] の中で提出された，Ish 配置は自由配置となるか，という問に答える．そのためにまず，Ish 配置の拡張となる新しい超平面配置のクラスを定義する.

定義 1.2. $N = (N_2, N_3, \ldots, N_\ell)$ を $\mathbb{K}$ の有限部分集合 N_j の組とする．このとき，**N-Ish 配置** $\mathrm{Ish}(N)$ を以下で定義する.

$$\mathrm{Ish}(N) := \{\{x_1 - x_j = a\} \mid 2 \le j \le \ell, a \in N_j\} \\ \cup \{\{x_i - x_j = 0\} \mid 2 \le i < j \le \ell\}.$$

Ish 配置はコクセター配置に何枚かの超平面を付け加えて得られるが，Ish 配置が超平面 $\{x_1 - x_j = 0\}$ に平行なものを i だけ距離をおいて 1 枚だけ付け加えるのに対し，N-Ish 配置は $\{x_1 - x_j = 0\}$ に平行な超平面を N_j に含まれる元 a だけ距離をおいて $|N_j|$ 枚の超平面が配置される．但し，$0 \notin N_j$ であれば $\{x_1 - x_j = 0\}$ は N-Ish 配置に含まれないことに注意する．特に，$N = (N_2, N_3, \ldots, N_\ell)$ を $N_j = \{0, 1, \ldots, j-1\}$ $(2 \le j \le \ell)$ と定めると，N-Ish 配置 $\mathrm{Ish}(N)$ は Ish 配置 $\mathrm{Ish}(\ell)$ と等しくなる．以下，N-Ish 配置の錐化 $\mathbf{c}(\mathrm{Ish}(N))$ を $\mathcal{I} = \mathcal{I}_N$ と書くことにする．$\mathcal{I}$ の定義多項式 $Q(\mathcal{I})$ は，

$$Q(\mathcal{I}) = z\left(\prod_{j=2}^{\ell}\prod_{a\in N_j}(x_1 - x_j - az)\right)\left(\prod_{2\le i<j\le\ell}(x_i - x_j)\right)$$

となる.

定義 1.3. $N = (N_2, N_3, \ldots, N_\ell)$ に対して，

$$N_{w(2)} \subseteq N_{w(3)} \subseteq \cdots \subseteq N_{w(\ell)}$$

となるような $\{2, \ldots, \ell\}$ の置換 w が存在するとき，N は**入れ子**であると言うことにする.

次が本論文の主定理である.

定理 1.4. N-Ish 配置に対し，以下は同値である.

(1) N は入れ子.

(2) $\mathcal{I}_N$ は超可解.

(3) $\mathcal{I}_N$ は帰納的自由.

(4) $\mathcal{I}_N$ は自由.

超可解と帰納的自由の定義については2章で触れることにする. (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) については超平面配置の理論の一般的な性質として成り立っていることに注意しておく（例えば [8] を見よ）. また, 上記条件が成り立ち $\mathcal{I}_N$ が自由配置であるとき, 以下のように具体的に $D(\mathcal{I}_N)$ の基底を構成することが出来る.

定理 1.5. $N = (N_2, N_3, \ldots, N_\ell)$ が入れ子であるとし, 特に $N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots \subseteq N_\ell$ であるとする. $D(\mathcal{I}_N)$ の斉次元 $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_\ell$ を次のように定める.

$$\theta_0 := \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \theta_1 = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + z\frac{\partial}{\partial z},$$
$$\theta_k := \sum_{s=2}^{k} \left(\prod_{a \in N_k} (x_1 - x_s - az) \prod_{t=k+1}^{\ell} (x_s - x_t) \right) \frac{\partial}{\partial x_s} \quad (2 \leq k \leq \ell).$$

このとき $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_\ell$ は $D(\mathcal{I}_N)$ の基底となる. 特に, $\mathcal{I}_N$ の指数が

$$\exp \mathcal{I}_N = (0,\ 1,\ |N_2| + \ell - 2,\ |N_3| + \ell - 3,\ \ldots\ ,\ |N_\ell|),$$

で与えられることが分かる.

$\mathcal{A}$ が自由配置であるとき, その特性多項式が整数係数の1次式に分解することが知られている.

定理 1.6 ([15]). $\mathcal{A}$ を自由配置とし, その指数を $(d_1, \ldots, d_\ell)$ とする. このとき, $\mathcal{A}$ の特性多項式は整数係数上で

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \prod_{i=1}^{\ell} (t - d_i)$$

と分解する.

(アフィン) 超平面配置 $\mathcal{A}$ とその錐化 $\mathbf{c}\mathcal{A}$ の特性多項式の間には

$$\chi(\mathbf{c}\mathcal{A}, t) = (t-1)\chi(\mathcal{A}, t)$$

という関係式が成り立つことが知られているので，D. Armstrong によって示されていた定理 1.1 の Ish 配置についての部分の新しい証明が定理 1.5 と定理 1.6 から得られることが分かる．

超可解配置 $\mathcal{A}$ の補集合 $M(\mathcal{A}) := \mathbb{K}^\ell \setminus \cup_{H\in\mathcal{A}} H$ は次のような非常に重要な性質を持つことが知られている．$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のとき，$M(\mathcal{A})$ はファイバー型であり [16]，特に，$K(\pi,1)$ である．$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のとき，$M(\mathcal{A})$ の各連結成分を部屋と呼ぶ．部屋 C, C' に対し，C と C' を分ける $\mathcal{A}$ の超平面の枚数を $d(C,C')$ とする．このとき，Björner, Edelman, and Ziegler によって wall-crossing formula と呼ばれる以下の関係式が得られている．

定理 1.7 ([5]). $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^\ell$ 上の超可解配置とする．このとき，$\mathcal{A}$ の部屋 B を適切に取れば

$$\sum_{C\in\mathrm{Ch}(\mathcal{A})} t^{d(B,C)} = \prod_{i=1}^{\ell}(1+t+\cdots+t^{d_i})$$

が成立する．ここで，$(d_1,\ldots,d_\ell)$ は $\mathcal{A}$ の指数であり，$\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の全ての部屋からなる集合とする．

定理 1.7，1.4，1.5 から次の系を得る．

系 1.8. $N=(N_2,N_3,\ldots,N_\ell)$ が入れ子であるとする．このとき，

(1) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ であれば N-Ish 配置の錐化 $\mathcal{I}_N$ の補集合 $M(\mathcal{I}_N)$ は $K(\pi,1)$ である．

(2) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ であれば，ある部屋 $B\in\mathrm{Ch}(\mathcal{I}_N)$ が存在して

$$\sum_{C\in\mathrm{Ch}(\mathcal{I}_N)} t^{d(B,C)} = (1+t)\prod_{i=2}^{\ell}(1+t+\cdots+t^{|N_i|+\ell-i})$$

が成り立つ．

本論文の構成は以下の通りである．2 章では超可解配置について紹介し，定理 1.4 を証明する．3 章では定理 1.5 を証明する．4 章では deleted Shi 配置 $\mathrm{Shi}(G)$ と deleted Ish 配置 $\mathrm{Ish}(G)$ について紹介し，これらの自由性について考察する．

2 超可解配置と$\mathcal{I}$の自由性

$\mathcal{A}$を超平面配置，$L(\mathcal{A})$をその交叉半順序集合とする．$\mathcal{A}$が中心的であるとき$L(\mathcal{A})$は幾何束となる．以下では，超平面配置はすべて中心的なものを考えることにする．$\mathcal{A}$に含まれる全ての超平面の共通部分$T = \cap_{H \in \mathcal{A}} H$の余次元を$\mathcal{A}$の**階数**と言い，$\mathrm{rank}(\mathcal{A})$と書く．$\mathrm{rank}(\mathcal{A})$が元の空間の次元と一致するとき，$\mathcal{A}$は**本質的**であると言う．$X, Y \in L(\mathcal{A})$が$Z \leq Y$を満たす任意の$Z \in L(\mathcal{A})$に対し

$$Z \vee (X \wedge Y) = (Z \vee X) \wedge Y$$

を満たすとき，(X, Y)を**モジュラー対**と呼び，任意の$Y \in L(\mathcal{A})$に対し(X, Y)がモジュラー対となるとき，Xを**モジュラー元**と呼ぶ．

定義 2.1 ([11])**.** $\mathcal{A}$を$\mathrm{rank}\,\mathcal{A} = \ell$であるような超平面配置とする．$L(\mathcal{A})$の極大鎖$V = X_0 < X_1 < \cdots < X_\ell = T$で$X_0, X_1, \ldots, X_\ell$が全てモジュラー元であるようなものが取れるとき，$\mathcal{A}$は**超可解**であるという．

この定義は次のように言い換えることが出来る．

補題 2.2 ([5])**.** $\mathcal{A}$が超可解配置であることと，フィルトレーション

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\ell \supseteq \mathcal{A}_{\ell-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{A}_1$$

で次の性質を持つものが存在することが同値である．

(1) $\mathrm{rank}(\mathcal{A}_i) = i \ (i = 1, 2, \ldots, \ell)$.

(2) $H \neq H'$であるような任意の$H, H' \in \mathcal{A}_i$に対して，$H \cap H' \subseteq H''$となるような$H'' \in \mathcal{A}_{i-1}$が存在する．

V内の超平面配置$\mathcal{A}$に対し，超平面$H \in \mathcal{A}$を固定する．このとき，V内の超平面配置$\mathcal{A}'$とH内の超平面配置$\mathcal{A}''$を

$$\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}, \quad \mathcal{A}'' := \{H' \cap H \mid H' \in \mathcal{A}'\}$$

と定義する．三つ組$(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$に対し，加除定理[13, 14]から，もし$\mathcal{A}'$と$\mathcal{A}''$が自由であり$\exp \mathcal{A}'' \subset \exp \mathcal{A}'$となるならば$\mathcal{A}$が自由であることが分かる．帰納的自由配置とは，空配置からスタートし上記の事実を繰り返し用いることにより自由であることが示せるような自由配置のクラスのことである．

定義 2.3. 以下により帰納的自由配置を定義する.

(1) 空配置は帰納的自由配置である.

(2) ある $H \in \mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A}'$ と $\mathcal{A}''$ が帰納的自由配置であり，$\exp \mathcal{A}'' \subset \exp \mathcal{A}'$ が成り立つとき，$\mathcal{A}$ は帰納的自由配置である.

加除定理から帰納的自由配置は自由配置である．また，超可解配置であれば帰納的自由配置であることも知られている（例えば [8, Theorem 4.58] を見よ）.

加除定理から次の補題が得られる.

補題 2.4 ([8, 定理 4.46]). $\mathcal{A}$ を 3 次元空間内の本質的な超平面配置とする. $\mathcal{A}'$ と $\mathcal{A}''$ が自由であるとし，$\mathcal{A}$ の指数が $\exp(\mathcal{A}') = (1, a, b)$, $\exp(\mathcal{A}'') = (1, c)$ と書かれているとする．このとき，$c \notin \{a, b\}$ ならば $\mathcal{A}$ は自由でない.

定理 1.4 の証明. (1) $\Rightarrow$ (2) $N_2 \supseteq N_3 \supseteq \cdots \supseteq N_\ell$ と仮定しても一般性を失わない. 各 $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ に対し，$X_i \in L(\mathcal{I})$ を

$$X_i := \{z = x_1 - x_2 = \cdots = x_1 - x_i = 0\}$$

とする．このとき，X_i への局所化 $\mathcal{I}_i := \mathcal{I}_{X_i} = \{H \in \mathcal{I} \mid H \supseteq X_i\}$ の階数は $\operatorname{rank} \mathcal{I}_i = i$ である．また，$\mathcal{I}_i$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_i = \{\{x_1 - x_j = az\} \mid 2 \leq j \leq i,\ a \in N_j\} \\ \cup \{\{x_j - x_k = 0\} \mid 2 \leq j < k \leq i\} \cup \{\{z = 0\}\}\end{aligned}$$

となる．ここでフィルトレーション

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_\ell \supseteq \mathcal{I}_{\ell-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{I}_1$$

を考えると，補題 2.2 から，$H \neq H'$ である任意の $H, H' \in \mathcal{I}_i$ に対して，$H \cap H' \subseteq H''$ となるような $H'' \in \mathcal{I}_{i-1}$ が存在することが示せればよい. H と H' がどちらも $\mathcal{I}_{i-1}$ に属していないとしてよい．このとき，H と H' は

$$\mathcal{I}_i \setminus \mathcal{I}_{i-1} = \{\{x_1 - x_i = az\} \mid a \in N_i\} \cup \{\{x_j - x_i = 0\} \mid 2 \leq j < i\}$$

に属している．N_i の異なる元 a, b に対し，$H = \{x_1 - x_i = az\}$, $H' = \{x_1 - x_i = bz\}$ とすると，$H \cap H' \subseteq \{z = 0\} \in \mathcal{I}_{i-1}$ である．$\{2, \ldots, i-1\}$

の異なる元 j,k に対し，$H=\{x_j-x_i=0\}$, $H'=\{x_k-x_i=0\}$ とすると，$H\cap H'\subseteq\{x_j-x_k=0\}\in\mathcal{I}_{i-1}$ である．$a\in N_i$, $2\le j<i$ に対し，$H=\{x_1-x_i=az\}$, $H'=\{x_j-x_i=0\}$ とすると，$a\in N_i\subseteq N_j$ であるので，$H\cap H'\subseteq\{x_1-x_j=az\}\in\mathcal{I}_{i-1}$ となる．以上より，$\mathcal{I}$ は超可解である．

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) これは定義 2.3 の直後に述べたように，一般的に正しい．

(4) $\Rightarrow$ (1) $\ell=2$ のとき, $N=(N_2)$ は入れ子である. $\ell\ge 3$ に対し，N が入れ子であれば $\mathcal{I}$ は自由でないことを ℓ に関する帰納法で示そう．$\ell=3$ のとき，$N=(N_2,N_3)$ とする．$T=\bigcap_{H\in\mathcal{I}}H=\{z=x_1=x_2=x_3\}$ が全体空間 V の 1 次元部分空間となるので，$\mathcal{I}$ を 3 次元空間 V/T 上で考えることにより本質的であるとしてよい．$H\in\mathcal{I}$ を超平面 $\{x_2-x_3=0\}$ とし，$(\mathcal{I},\mathcal{I}',\mathcal{I}'')$ を H に関する三つ組とする．このとき，斉次導分

$$\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+z\frac{\partial}{\partial z},\quad \prod_{a\in N_2}(x_1-x_2-az)\frac{\partial}{\partial x_2},\quad \prod_{a\in N_3}(x_1-x_3-az)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

が $D(\mathcal{I}')$ の基底となることが簡単に確かめられる．従って，$\mathcal{I}'$ は指数 $(1,|N_2|,|N_3|)$ の自由配置である．また，$\mathrm{rank}(\mathcal{I}'')=2$ なので，$\mathcal{I}''$ は指数 $(1,|N_2\cup N_3|)$ の自由配置である．仮定から N は入れ子ではないので，$N_2\not\subseteq N_3$ かつ $N_2\not\supseteq N_3$ であり，$|N_2\cup N_3|$ は $|N_2|$ と $|N_3|$ のどちらよりも真に大きい．よって補題 2.4 から $\mathcal{I}$ は自由配置ではない．

$\ell>3$ とする．N は入れ子ではないので，$N_i\not\subseteq N_j$ かつ $N_i\not\supseteq N_j$ となるような $2\le i<j\le\ell$ が存在する．$X\in L(\mathcal{I})$ を

$$X:=\{z=x_1-x_i=x_1-x_j=0\}$$

と定める．このとき，

$$\mathcal{I}_X=\{\{x_1-x_k=az\}\mid k\in\{i,j\},\ a\in N_k\}\cup\{\{x_i-x_j=0\},\{z=0\}\}$$

となる．従って，$\mathcal{I}_X$ は $\mathbf{c}(\mathrm{Ish}(N_i,N_j))$ と同値である．よって，$\mathcal{I}_X$ は自由配置でなく，$\mathcal{I}$ も自由配置ではない． □

3 $D(\mathcal{I})$ の基底の構成

この章では定理 1.5 の証明を与える．まず，$\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_\ell$ が $D(\mathcal{I})$ に属することを示そう．

補題 3.1. $N=(N_2,N_3,\ldots,N_j)$ が入れ子構造 $N_2\subseteq N_3\subseteq\cdots\subseteq N_j$ を持つとする．このとき

$$\theta_0=\sum_{i=1}^{\ell}\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad \theta_1=\left(\sum_{i=1}^{\ell}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)+z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\theta_k=\sum_{s=2}^{k}\left(\prod_{a\in N_k}(x_1-x_s-az)\prod_{t=k+1}^{\ell}(x_s-x_t)\right)\frac{\partial}{\partial x_s}\quad(2\le k\le\ell)$$

は $D(\mathcal{I})$ に属する．

Proof. 任意の $H\in\mathcal{I}$ に対し，$\theta_0(\alpha_H)=0$ が成り立つので，θ_0 は $D(\mathcal{I})$ に属する．Euler 導分 θ_1 は，任意の中心的配置 $\mathcal{A}$ の導分加群 $D(\mathcal{A})$ に属するので，$\theta_1\in D(\mathcal{I})$ である．$2\le k\le\ell$ に対し，$\theta_k\in D(\mathcal{I})$ となることを示そう．まず，$\theta_k(z)=0\in zS$ となることは明らかである．$2\le i<j\le\ell$ とする．

Case 1. $i<j\le k$ のとき，

$$\begin{aligned}\theta_k(x_i-x_j)&=\left(\prod_{a\in N_k}(x_1-x_i-az)\prod_{t=k+1}^{\ell}(x_i-x_t)\right)\\&\qquad-\left(\prod_{a\in N_k}(x_1-x_j-az)\prod_{t=k+1}^{\ell}(x_j-x_t)\right)\\&\equiv\left(\prod_{a\in N_k}(x_1-x_i-az)\prod_{t=k+1}^{\ell}(x_i-x_t)\right)\\&\qquad-\left(\prod_{a\in N_k}(x_1-x_i-az)\prod_{t=k+1}^{\ell}(x_i-x_t)\right)\\&\qquad\qquad(\text{mod } x_i-x_j)\\&=0\end{aligned}$$

より $\theta_k(x_i-x_j)\in(x_i-x_j)S$ である．

Case 2. $i\le k<j$ のとき

$$\theta_k(x_i-x_j)=\prod_{a\in N_k}(x_1-x_i-az)\prod_{t=k+1}^{\ell}(x_i-x_t)\in(x_i-x_j)S.$$

Case 3. $k < i < j$ のとき

$$\theta_k(x_i - x_j) = 0 \in (x_i - x_j)S.$$

以上より，$2 \leq i < j \leq \ell$ に対し，$\theta_k(x_i - x_j) \in (x_i - x_j)S$ であることが示された.

次に，$2 \leq j \leq \ell$, $b \in N_j$ とする.

Case 1. $j \leq k$ であれば $b \in N_j \subseteq N_k$ であり，従って，

$$\begin{aligned}\theta_k(x_1 - x_j - bz) &= \prod_{a \in N_k}(x_1 - x_j - az)\prod_{t=k+1}^{\ell}(x_j - x_t)\\ &\in (x_1 - x_j - bz)S\end{aligned}$$

となる.

Case 2. $k < j$ のとき

$$\theta_k(x_1 - x_j - bz) = 0 \in (x_1 - x_j - bz)S.$$

以上より，$2 \leq j \leq \ell$, $b \in N_j$ に対し，$\theta_k(x_1 - x_j - bz) \in (x_1 - x_j - bz)S$ であることが示された.

よって，$\theta_k \in D(\mathcal{I})$ を得る. □

定理 *1.5* の証明. まず，$s = 1, k \geq 2$ のとき，

$$\theta_k(x_s) = \theta_k(x_1) = 0$$

となり，$2 \leq k < s$ のとき

$$\theta_k(x_s) = 0$$

となることに注意すると，係数行列の行列式は次のように計算できる.

$$\begin{vmatrix} \theta_0(x_1) & \theta_1(x_1) & \cdots & \theta_\ell(x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \theta_0(x_\ell) & \theta_1(x_\ell) & \cdots & \theta_\ell(x_\ell) \\ \theta_0(z) & \theta_1(z) & \cdots & \theta_\ell(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & \theta_2(x_2) & \cdots & \theta_\ell(x_2) \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & x_\ell & \vdots & \ddots & \theta_\ell(x_\ell) \\ 0 & z & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\doteq z \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \theta_2(x_2) & \theta_3(x_2) & \cdots & \theta_\ell(x_2) \\ 1 & & \theta_3(x_3) & \cdots & \theta_\ell(x_3) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & & 0 & & \theta_\ell(x_\ell) \end{vmatrix} = z \prod_{k=2}^{\ell} \theta_k(x_k) \\
&= z \prod_{k=2}^{\ell} \left(\prod_{a \in N_k} (x_1 - x_k - az) \prod_{t=k+1}^{\ell} (x_k - x_t) \right) \\
&= z \left(\prod_{k=2}^{\ell} \prod_{a \in N_k} (x_1 - x_k - az) \right) \left(\prod_{k=2}^{\ell} \prod_{t=k+1}^{\ell} (x_k - x_t) \right) \\
&= z \left(\prod_{k=2}^{\ell} \prod_{a \in N_k} (x_1 - x_k - az) \right) \left(\prod_{2 \le k < t \le \ell} (x_k - x_t) \right) \\
&= Q(\mathcal{I}).
\end{aligned}
$$

ここで $\doteq$ は，0 でない定数倍を除いて等しくなることを意味する．補題 3.1 とこの計算結果から，齋藤の判定法 [9] により，$\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_\ell$ が $D(\mathcal{I})$ の基底となることが導かれる． □

4 deleted Ish 配置の自由性

K_ℓ を ℓ 個の頂点を持つ完全グラフとする．このとき，K_ℓ は有向辺 ij $(i < j)$ の集合，すなわち，$K_\ell = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le \ell\}$ であると見なすことが出来る．K_ℓ の部分グラフ G に対し，Athanasiadis [3] によって deleted Shi 配置 Shi(G) が，Armstrong と Rhoades [2] によって deleted Ish 配置 Ish(G) がそれぞれ以下の様に定義された．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Shi}(G) &:= \mathrm{Cox}(\ell) \cup \{\{x_i - x_j = 1\} \mid (i,j) \in G\} \subseteq \mathrm{Shi}(\ell), \\
\mathrm{Ish}(G) &:= \mathrm{Cox}(\ell) \cup \{\{x_1 - x_j = i\} \mid (i,j) \in G\} \subseteq \mathrm{Ish}(\ell).
\end{aligned}
$$

Athanasiadis は $\mathbf{c}(\mathrm{Shi}(G))$ が自由配置となるときの必要十分条件を与えた．

定理 4.1 ([4, 定理 4.1])．$G \subseteq K_\ell$ とする．deleted Shi arrangement 配置の錐化 $\mathbf{c}(\mathrm{Shi}(G))$ が自由配置であることと，$\{1, \ldots, \ell\}$ の置換 w で，$w^{-1}G$

が K_ℓ に含まれるものが取れ，すなわち，$(i,j) \in w^{-1}G$ ならば $i<j$ であり，w が次の性質を持つことが同値である．

$$1 \leq i < j < k \leq \ell \text{ かつ } (i,j) \in w^{-1}G \text{ ならば } (i,k) \in w^{-1}G.$$

部分グラフ $G \subseteq K_\ell$ に対し，$N_G = (N_2, \dots, N_\ell)$ を

$$N_j := \{0\} \cup \{i \mid (i,j) \in G\} \subseteq \{0,1,\dots,j-1\}$$

と定義する．このとき，$\mathrm{Ish}(N_G) = \mathrm{Ish}(G)$ であることが容易に示せる．定理 4.1 と同様にして，$\mathbf{c}(\mathrm{Ish}(G))$ が自由配置であることの必要十分条件が以下のように得られる．

定理 4.2. $G \subseteq K_\ell$ とする．このとき，以下は同値である．

(1) $\mathbf{c}(\mathrm{Ish}(G))$ が自由配置である．

(2) N_G が入れ子である．

(3) G が定理 4.1 の性質を持つ．

参考文献

[1] D. Armstrong, Hyperplane arrangements and diagonal harmonics, *J. Comb.* **4** (2013), no. 2, 157–190.

[2] D. Armstrong and B. Rhoades, The Shi arrangement and the Ish arrangement, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), no. 3, 1509–1528.

[3] C. A. Athanasiadis, Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields, *Adv. Math.* **122** (1996), no. 2, 193–233.

[4] C. A. Athanasiadis, On free deformations of the braid arrangement, *European J. Combin.* **19** (1998), no. 1, 7–18.

[5] A. Björner, P. H. Edelman, and G. M. Ziegler, Hyperplane arrangements with a lattice of regions, *Discrete Comput. Geom.* **5** (1990), no. 3, 263–288.

[6] P. H. Edelman and V. Reiner, Free arrangements and rhombic tilings, *Discrete Comput. Geom.* **15** (1996), no. 3, 307–340.

[7] P. Headley, On a family of hyperplane arrangements related to the affine Weyl groups, *J. Algebraic Combin.* **6** (1997), no. 4, 331–338.

[8] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 300, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[9] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **27** (1980), no. 2, 265–291.

[10] J. Y. Shi, *The Kazhdan-Lusztig cells in certain affine Weyl groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1179, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[11] R. P. Stanley, Supersolvable lattices, *Algebra Universalis* **2** (1972), 197–217.

[12] R. P. Stanley, Hyperplane arrangements, interval orders, and trees, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **93** (1996), no. 6, 2620–2625.

[13] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness. I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **27** (1980), no. 2, 293–312.

[14] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness. II. The Coxeter equality, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **27** (1980), no. 2, 313–320.

[15] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn formula, *Invent. Math.* **63** (1981), no. 1, 159–179.

[16] H. Terao, Modular elements of lattices and topological fibration, *Adv. in Math.* **62** (1986), no. 2, 135–154.

[17] M. Yoshinaga, Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner, *Invent. Math.* **157** (2004), no. 2, 449–454.