数理解析研究所講究録
第1998巻 2016年 15-25

整環上の一変数剰余多項式環 $\mathcal{O}[X]/(X^n)$ の stable Auslander-Reiten quiver の連結成分

大阪大学 情報科学研究科 宮本 賢伍
Kengo Miyamoto
Graduate school of Information and Science Technology, Osaka University

概要

$\mathcal{O}$ を完備離散付値環とし, A を自己移入的な $\mathcal{O}$-代数で自由有限階数であるとする. また A-lattice M として $\mathcal{O}$ の商体 $\mathcal{K}$ をテンソルしたとき $A\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{K}$-加群として射影的であるようなものを考えると, この性質は拡大と直和因子で閉じている. そのような性質をもつ M に対しては, M を終点にもつ almost split sequence の存在が保証されている. そこで [AKM] では, $A=\mathcal{O}[X]/(X^n)$ として A の stable Auslander-Reiten quiver を定義し, その Heller lattices を含むような連結成分を決定した. ここでは, [AKM] での結果を紹介する.

1 謝辞

この度は RIMS 研究集会「組合せ論的表現論と表現論的組合せ論」に参加させて頂き, ありがとうございました. この場をお借りして運営委員の方々, 参加者の皆様, 関係者の方々に深く御礼申し上げます.

2 導入

1970年代に Auslander, Reiten によって導入された Auslander-Reiten 理論では, 直既約加群の完全代表系に対して almost split sequence と呼ばれる特殊な短完全列を構成し, その情報をもとにして直既約加群の完全代表系を頂点とする有向グラフを導入することで代数の加群圏を体系的に研究する. このとき得られたグラフを Auslander-Reiten quiver といい, Auslander-Reiten quiver から射影成分を削ったものを stable Auslander-Reiten quiver という. 以来, 代数の表現論において Auslander-Reiten quiver は重要な研究対象であり, 体上の有限次元代数 [ASS] や Aritin 代数 [ARS] の場合には多くの計算例が知られている. そこで代数の表現論の古典的な問題として, (一般には体上でないような場合にも) 様々な代数に対してその Auslander-Reiten quiver を記述したいという問題がある. この問題に対する先行研究として, 例えば整環上の群代数で剰余体をテンソルした際に半単純となるの場合には [Webb] をはじめとする [Erd],[K] 等が挙げられる. 特に [K] では Heller lattices を含む almost split sequence について触れており, 本研究を考えるきっかけとなった.

ここでは整環上の代数の場合を考える. $\mathcal{O}$ を完備離散付値環, その極大イデアルの生成元を ε とし, κ を $\mathcal{O}$ の剰余体, $\mathcal{K}$ を $\mathcal{O}$ の商体とする. ただし, κ は代数閉体であると仮定する. $\mathcal{O}$-代数 A が **$\mathcal{O}$-order** であるとは, $\mathcal{O}$-加群として有限生成で自由であるときをいう. 有限生成 A-加群 M が $\mathcal{O}$-加群として有限階数で自由であるとき, M を **A-lattice** といい, A-lattices を対象にもつ mod A の充満部分圏を考えれば, これは拡大と直和因子で閉じている. 整環上の lattice に関する almost split sequence の構成についての一般論は [AR] などで与えられており, 次の結果が知られている.

<u>**Theorem**</u> **2.1** ([AR]). A-lattice M が次の性質 $(\natural)$ をもつとする.
$(\natural)$　非射影的な A-lattice M に対して $M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$ が $A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$-加群として射影的である.
このとき, M を終点とする almost split sequence が存在する.

以下, A-lattice を考えるときには, 常にこの性質を満たすと仮定する. このような性質をもつ A-lattice として Heller lattice がある. ここで **Heller lattice** とは, 直既約 $A \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$-加群の A-加群としての射影被覆の核である. 射影被覆の性質より, Z_N は N にのみ依存して, 同型を除き一意的に決まる. また, 性質 $(\natural)$ は拡大と直和因子で閉じていることに注意しておく.

[AKM] では, 自己移入的な $\mathcal{O}$-order A と性質 $(\natural)$ を満たすような非射影的で直既約な A-lattice M に対して, M を終点にもつ almost split sequence の構成法を与えており, その応用に $A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$ が半単純にならない例として, $A = \mathcal{O}[X]/(X^n)$ の場合に適用し, その stable Auslander-Reiten quiver の Heller lattices を含む連結成分を決定した. 次が主結果である.

<u>**Main Result**</u> ([AKM]). $n \geq 2$ とする. $A = \mathcal{O}[X]/(X^n)$ の stable Auslander-Reiten quiver の Heller lattices を含む連結成分 $\mathcal{C}$ の tree class は A_∞ である. 更に $\mathcal{C}$ は tube であり, その rank は Heller 格子の周期に等しく, その値は 1 または 2 である.

3　almost split sequence の構成

まずはじめに, almost split sequence と呼ばれる特殊な短完全列を定義し, 自己移入的な $\mathcal{O}$-order に対する almost split sequence の構成方法を与える. ただし一般には, almost split sequence は拡大と直和因子で閉じているような加法圏に対して定義される.

M, N を A-lattices とする. $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ が**右極小**であるとは, $f = fh$ となるような自己準同型 $h \in \mathrm{End}_A(M)$ が常に同型写像であるときをいい, f が**右概分裂写像**であるとは, f が分裂全射ではなく, 任意の A-lattice V と分裂全射ではないような $v \in \mathrm{Hom}_A(V, N)$ に対して, 次の図式を可換にする $v' \in \mathrm{Hom}_A(V, M)$ が存在するときをいう.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, dashed, "v'"'] \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

双対的に, $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ が**左極小**であるとは, $f = hf$ となるような自己準同型 $h \in \mathrm{End}_A(N)$ が常に同型写像であるときをいい, f が **左概分裂写像**であるとは, f が分裂単射

ではなく, 任意の A-lattice U と分裂単射ではないような $u \in \mathrm{Hom}_A(M,U)$ に対して, 次の図式を可換にする $u' \in \mathrm{Hom}_A(M,U)$ が存在するときをいう.

$$\begin{tikzcd} V & \\ M \arrow[u, "u"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[ul, dashed, "u'"'] \end{tikzcd}$$

Definition 3.1. M, N を A-lattices とする. このとき, $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ が**既約写像**であるとは, f が次の 2 条件を満たすときをいう.

(i) f は分裂単射でも分裂全射でもない.

(ii) $f = gh$ と分解されたとき, g は分裂全射であるか, h が分裂単射である.

Propositon 3.2 ([ASS]). L, M, N を A-lattices とする. このとき, 短完全列 $0 \to L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \to 0$ について, 次の 5 つは互いに同値である.

(i) f が右概分裂写像であって, g が左概分裂写像である.

(ii) f が右極小な右概分裂写像である.

(iii) f が右概分裂写像で, L が直既約である.

(iv) g が左極小な左概分裂写像である.

(v) g が左概分裂写像で, N が直既約である.

(vi) f と g がともに既約である.

そこで, A-lattices に関する almost split sequence の定義として次を採用する.

Definition 3.3. A-lattices の短完全列 $0 \to L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \to 0$ が N を終点とする（または L を始点とする）**almost split sequence** であるとは, f と g が既約であるときをいう.

注意として, (3.2) により f と g のそれぞれ右極小, 左極小なので N を終点とする almost split sequence は完全列の同型を除いて一意的に定まる. よって, N を終点にもつ almost split sequence $0 \to L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \to 0$ を与えたとき, L は N にのみに依存して決まる. 逆にこれを L を始点とする almost split sequence だと思えば, N は L にのみ依存して定まる. そこで **AR-translation** τ を

$$\tau : M \longmapsto L, \quad \tau^{-1} : L \longmapsto M$$

として定めることができる.

自己移入的な $\mathcal{O}$-代数 A に対して, $(\natural)$ の性質をもつ非射影的な直既約 A-lattice M を終点にもつ almost split sequence は次のようにして構成することができる. まず, M の射影被覆 $p : P \to M$ に中山関手 $\nu := D(\mathrm{Hom}_A(-, A)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Hom}_A(-, A), \mathcal{O})$ を施すと

$$\nu(p) : \nu(P) \longrightarrow \nu(M)$$

を得る. L を $D(\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(p,A)))$ とおけば, 完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \nu(P) \longrightarrow \nu(M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(p,A)),\mathcal{O})$$

を得るが, $\mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(p,A))$ は A-lattice $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}(p),A)$ の部分 A-加群とみれるので, 自由である. 従って末項は 0 となり, 短完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \nu(P) \longrightarrow \nu(M) \longrightarrow 0$$

を得る. これの $\varphi: M \to \nu(M)$ に関する引き戻しを考えるのである.

Propositon 3.4 ([AKM]). A を自己移入的な $\mathcal{O}$-代数, M を非射影的で直既約な ($\natural$) を満たす A-lattice とし, M の射影被覆を $p: P \to M$ とする. $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M,\nu(M))$ をとり, φ による引き戻しを考える.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & \nu(P) \arrow[r, "\nu(p)"] & \nu(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

このとき, 次の (1) と (2) は互いに同値である.

(1) 引き戻し $0 \to L \to E \to M \to 0$ は almost split sequence である.

(2) 次の 3 つの条件を満たす.

(i) φ は $\nu(P)$ を経由しない.

(ii) L は直既約な A-lattice である.

(iii) 任意の $f \in \mathrm{RadEnd}_A(M)$ に対して, φf は $\nu(P)$ を経由する.

上の命題は自己移入的な $\mathcal{O}$-order の almost split sequence の構成を具体的に与えており, (3.4) の (2) を確認することは比較的易しい場合が多い. 従って (3.4) は almost split sequence の計算を行う場合に大きなメリットとなっている.

更に A が symmetric, すなわち A と $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A,\mathcal{O})$ が (A,A)-両側加群として同型である場合には, 任意の A-lattice について関手的な同型 $\nu(X) \simeq X$ がある. 実際, $X = A$ ならば明らかで, 従って射影加群の場合にも成り立つ. よって, X を任意の A-lattice としたとき, X の射影分解をとることで同型が得られる.

4 stable Auslander-Reiten quiver の tree class

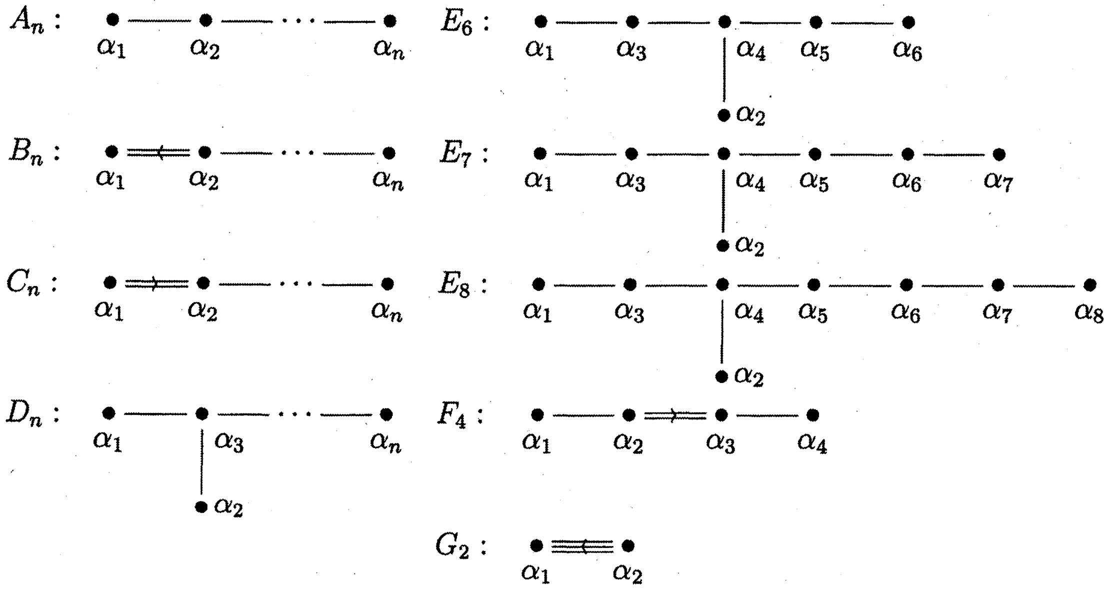
quiver とは, 頂点の集合 Q_0, 矢印の集合 Q_1, 矢印 $\alpha \in Q_1$ に対してソースとターゲットを対応させる写像 $s, t: Q_1 \longrightarrow Q_0$ からなる 4 つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ のことである. 今後, 混乱が生じない限り quiver (Q_0, Q_1, s, t) を簡単にため Q と表すことにする. また,

$Q_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ として, $s(\alpha) = i,\ t(\alpha) = j$ となる矢印 $\alpha \in Q_1$ を $\alpha : i \longrightarrow j$ と書き, 次のように図示する.

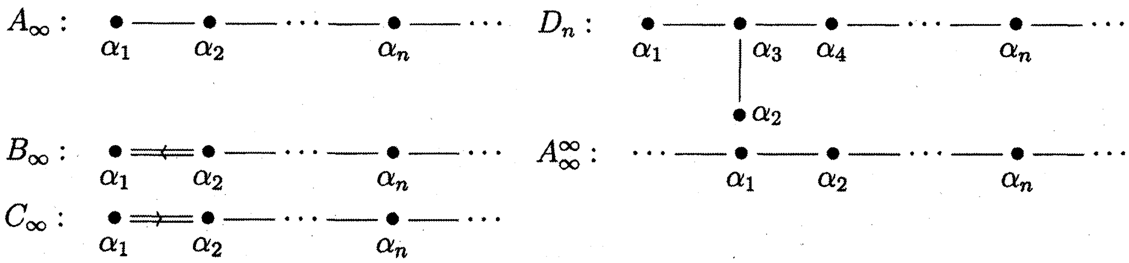
$$\underset{i}{\circ} \longrightarrow \underset{j}{\circ}$$

Q の矢印の向きを忘れた無向グラフを $\overline{Q}$ とかく. Q_0, Q_1 が有限集合となるとき, Q を有限 quiver といい, そうでないとき無限 quiver という.

以下に挙げる無向グラフを **finite Dynkin diagram** といい, 代数の表現型を議論する上で重要なグラフである.



ただし B_n などは $(1, 2)$ とラベル付けられている辺を $\bullet\!\Leftarrow\!\bullet$ などで表している. また, 以下のような無向グラフを **infinite Dynkin diagram** という.



各頂点 $x \in Q_0$ に対して, その集合 x^+, x^- を次のように定める.

$$x^+ := \{y \in Q_0 \mid x \to y \in Q_1\}, \quad x^- := \{y \in Q_0 \mid y \to x \in Q_1\}.$$

すべての頂点 x で $x^+ \cup x^-$ が有限集合となるような quiver を**局所有限**であるという. quiver Q と写像 $v : Q_1 \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の組 (Q, v) を **valued quiver** という. $\phi : Q \to Q$ を quiver の自己射, すなわち ϕ は任意の $\alpha : x \to y \in Q_1$ に対して

$$\phi(x \xrightarrow{\alpha} y) = \phi(x) \xrightarrow{\phi(\alpha)} \phi(y)$$

を満たすような写像とする. このとき組 (Q, ϕ) が次の2つの条件を満たすとき **stable translation quiver** という.

(i) Q は loop を持たず, 2 つの頂点間の矢印は高々1つしかない.

(ii) すべての頂点 $x \in Q_0$ において, $\phi(x)^+ = x^-$ である.

3つ組 (Q, v, ϕ) が **valued stable translation quiver** であるとは, 次の2条件を満たすことである.

(i) (Q, v) は valued quiver であり, (Q, ϕ) は stable translation quiver である.

(ii) $\alpha : x \to y \in Q_1$ に対して, $v(\alpha) = (a, b)$ ならば $v(\phi(y) \to x) = (b, a)$ である.

ここで Auslander-Reiten quiver の正確な定義を述べる. Auslander-Reiten quiver は代数 A の加群圏に対して記述されるもので, almost split sequence の情報からその形状が決まる.

<u>Definition</u> **4.1.** A の **Auslander-Reiten quiver** $\Gamma(A)$ は次のルールで構成される valued quiver である.

- 頂点には直既約 A-lattices の完全代表系をおく.
- 既約写像 $f : M \to N$ が存在するときに矢印 $[M] \to [N]$ を引く.
- value $v([M] \to [N]) = (a, b)$ は, almost split sequence $0 \to M \to E \to N \to 0$ の中央項 E の直和因子として, M に同型なものが a 回, N に同型なものが b 回現れるという意味で付ける.

$\Gamma(A)$ から射影成分を削って得られる $\Gamma(A)$ の充満部分 quiver を A の **stable Auslander-Reiten quiver** といい, $\Gamma_S(A)$ で表す.

stable Auslander-Reiten quiver の連結成分 C は AR-translation によって stable translation quiver であることに注意しておく.

<u>Example</u> **4.2.** K を体とし, quiver Q を $1 \xleftarrow{\gamma} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\alpha} 4$ とする. 道代数 KQ のイデアル $I = \langle \alpha\beta\gamma \rangle$ をとり, $A = KQ/I$ とおくとき, A の Auslander-Reiten quiver は次の形をしている.

$$\Gamma(A) = \begin{tikzcd}[column sep=small] P(1) \arrow[dr] & & S(2) \arrow[dr] & & S(3) \arrow[dr] & & \\ & P(2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{Rad}P(4) \arrow[ur] \arrow[dr] & & I(3) \arrow[dr] & \\ & & P(3) \arrow[ur] & & P(4) & & I(4) \end{tikzcd}$$

これの射影成分を削るので, $\Gamma_S(A)$ は次の形をしている.

$$\Gamma_S(A) = \begin{tikzcd}[column sep=small] S(2) \arrow[dr] & & S(3) \arrow[dr] & & \\ & \mathrm{Rad}P(4) \arrow[ur] & & I(3) \arrow[dr] & \\ & & & & I(4) \end{tikzcd}$$

□

tree class の定義を述べるために必要となる重要な valued stable translation quiver の例を与えておこう.

Example 4.3. (Δ, v) を loop を持たず, 頂点間に複数の矢印がないような valued quiver とする. このとき (Δ, v) に対して, 次のように局所有限な valued stable translation quiver を作ることができる.

- 頂点集合は $\mathbb{Z} \times \Delta_0$ とする.
- 矢印 $x \to y \in \Delta_1$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 矢印 $(n, x) \to (n, y)$ と $(n-1, y) \to (n, x)$ を引く.
- $v(x \to y) = (a, b)$ のとき, $v((n, x) \to (n, y)) = (a, b)$, $v((n-1, y) \to (n, x)) = (b, a)$ と定める.
- translation ϕ を $\phi((n, x)) = (n+1, x)$ で定める.

この valued stable translation quiver を $\mathbb{Z}\Delta$ とかく. 例えば, $\Delta = B_\infty$ とすれば,

$$\Delta B_\infty = \begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & (-1,\alpha_3) \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & (0,\alpha_3) \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & (1,\alpha_3) \arrow[dr] & \\
\cdots(-1,\alpha_2) \arrow[ur] \arrow[rr, dotted] \arrow[dr, "{(2,1)}"'] & & (0,\alpha_2) \arrow[ur] \arrow[rr, dotted] \arrow[dr, "{(2,1)}"'] & & (1,\alpha_2) \arrow[ur] \arrow[rr, dotted] \arrow[dr, "{(2,1)}"'] & & (2,\alpha_2)\cdots \\
 & (0,\alpha_1) \arrow[ur, "{(1,2)}"] \arrow[rr, dotted] & & (1,\alpha_1) \arrow[ur, "{(1,2)}"] \arrow[rr, dotted] & & (2,\alpha_1) \arrow[ur, "{(1,2)}"] &
\end{tikzcd}$$

□

Theorem 4.4 (AKM). A を $\mathcal{O}$-order とし, C を $\Gamma_S(A)$ の連結成分とする. C に τ 周期をもつ頂点, すなわち $\tau^i(X) \simeq X$ となるような頂点 X が存在し, $\#(\Gamma_S(A)_0) = \infty$ であると仮定する. このとき, $\#(C_0) = \infty$ であって C は valued stable translation quiver である.

次の定理は Riedman 構造定理として知られている結果である.

Theorem 4.5 ([B], (4.15.4)). valued stable translation quiver (Q, v, ϕ) の連結成分 C をとる. このとき, 向き付けられた tree T と許容群 $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}T)$ で stable translation quiver として $C \simeq \mathbb{Z}T/G$ となるようなものが存在する. 更に

(i) $\overline{T}$ は C にのみ依存して一意的に定まる.

(ii) 許容群 G は $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}T)$ の共役を除いて一意的に定まる.

(4.5) における $\overline{T}$ を連結成分 C の **tree class** という. 4.5 をみれば, (stable) Auslander-Reiten quiver の連結成分が valued stable translation quiver であれば, その形状をみるには対応している tree class と許容群がどのようになっているかをみればよい. tree class を決定する指標として, 次の Happel, Preiser, Rigen の結果が有用である.

Theorem 4.6 ([B] (4.5.8)). loop を持たず, 頂点間に複数の矢印が存在しない連結な valued quiver (Q, v) に対して次が成り立つ.

(1) $(Q.v)$ が subadditive function をもち, $\#(Q_0) = \infty$ ならば, $(\overline{Q}, v)$ は infinite Dynkin diagram のいずれかである.

(2) $(Q.v)$ が additive でないような subadditive function をもつとき, $\overline{Q}$ は finite Dynkin diagram のいずれかであるか, A_∞ である.

5 主結果 $A = \mathcal{O}[X]/(X^n)$ の場合

以下では, $A = \mathcal{O}[X]/(X^n)$ とする. このとき, A は symmetric な自己移入的で直既約 $\mathcal{O}$-order である. まずは Heller lattices を求めるために直既約 $A \otimes_{\mathcal{O}} \kappa = A/\varepsilon A$-加群を考える. $\{M_i \mid 0 \le i \le n-1\}$ を直既約 $A \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$-加群の完全代表系とすれば, $M_i \simeq \kappa[X]/(X^{n-i})$ で与えられる. $i = 0$ のとき, $M_0 = A$ と定め, 射影的なものはこれ以外に存在しない. 非射影的で直既約な $A \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$-加群 M_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ を A-加群とみたときの射影被覆は

$$p_i : A \ni f \longmapsto X^i f + \varepsilon A \in M_i$$

で与えられるから, M_i の Heller lattices Z_i は次の形であって, これは直既約な A-lattices である.

$$Z_i = \left(\bigoplus_{i=0}^{n-i-1} \mathcal{O}\varepsilon X^i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=n-i}^{n-1} \mathcal{O}X^i \right).$$

Z_i を終点とする almost split sequence を計算しよう. Z_i の射影被覆は

$$\pi_i : A \oplus A \ni (f, g) \longmapsto X^{n-i} f - \varepsilon g \in Z_i$$

で与えられる. A が symmetric であるから関手的な同型を施すことで, 考えるべき (3.4) の下段の短完全列は

$$0 \to \mathrm{Ker}(\pi_i) \to A \oplus A \to Z_i \to 0$$

となる. ここで

$$\mathrm{Ker}(p_i) = \left(\bigoplus_{j=0}^{i-1} \mathcal{O}(\varepsilon X^j, X^{n-i+j}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=i}^{n-1} \mathcal{O}(X^j, 0) \right) \simeq Z_{n-i}$$

なので, 結局

$$0 \to Z_{n-i} \to A \oplus A \to Z_i \to 0$$

に (3.4) の条件 (2) を満たすような $\varphi \in \mathrm{End}_A(Z_i)$ を与え, その引き戻しを考えることで Z_i を終点にもつ almost split sequence が構成できたことになる. (3.4) の条件 (2) を満たすような φ として, Z_i の $\mathcal{O}$-基底 ε, $\varepsilon X, \ldots, \varepsilon X^{n-i-1}, X^{n-i}, \ldots, X^{n-1}$ による行列表示が

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

となるようなものがとれる. この φ の引き戻しを考えよう.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_{n-i} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_i \arrow[r] \arrow[d] & Z_i \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_{n-i} \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r] & Z_i \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

この引き戻しの中央項 $E_i \subset A \oplus A \oplus Z_i$ について次が成り立つ.

<u>Lemma</u> **5.1** ([AKM]). (1) E_1 は直和因子として A をもつ.

(2) E_i $(2 \leq i \leq n-1)$ は直既約 A-lattices である.

(5.1) をみれば, $2 \leq i \leq n-1$ なる i に対して E_i は直既約であるから, E_i を終点とする almost split sequence を Z_i のときと同様にして計算することを考えよう. まず, E_i の $\mathcal{O}$-基底としては次がとれる.

$$a_k = \begin{cases} (X^{n-k}, 0, 0) & \text{if } 1 \leq k \leq n-i, \\ (\varepsilon X^{n-k}, X^{2n-k-i}, 0) & \text{if } n-i < k \leq n, \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} (0, 0, X^{n-k}) & \text{if } 1 \leq k \leq i, \\ (0, 0, \varepsilon X^{n-k}) & \text{if } i < k < n, \\ (X^{i-1}, 0, \varepsilon) & \text{if } k = n. \end{cases}$$

また, E_i の射影被覆は

$$\pi^i : A \oplus A \oplus A \oplus A \ni (p, q, r, s) \longmapsto (\varepsilon p + X^{i-1}q, X^{n-i}p, \varepsilon q + \varepsilon X r + X^{n-i}s) \in E_i$$

で与えられ, その核は E_{n-i} に同型であって, (3.4) の条件 (2) を満たすような $\phi \in \mathrm{End}_A(E_i)$ の一つとして, $\mathcal{O}$-基底 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ に関する表現行列が

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

となるようにとれる. こうして E_i を終点とする almost split sequence $0 \to E_{n-i} \to F_i \to E_i \to 0$ が得られた. その中央項 F_i については次が成り立つ.

<u>Lemma</u> **5.2** ([AKM]). (1) $F_i \simeq F_i' \oplus Z_{n-i}$ と分解できる.

(2) F_i' $(2 \leq i \leq n-2)$ は直既約 A-lattices である.

一方, A の直既約な A-lattices は無限個存在する. 実際, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $L_r := \mathcal{O}\varepsilon^r \oplus \mathcal{O}X \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}X^{n-i}$ と定めれば, この L_r は $r \neq s$ のときには非同型な直既約 A-lattices である. 従って $\Gamma_S(A)$ は無限個の頂点をもち, Z_i は τ 周期な頂点であるから, (4.4) によって C は無限個の頂点をもつ valued stable translation quiver である. 従って C の tree class は無限個の頂点をもつ.

Lemma 5.3. C の tree class $\overline{T}$ は infinite Dynkin diagram のうちのいずれかである.

Proof. C が τ 周期な頂点を持てば, C のすべての頂点において τ 周期であることがわかる. そこで, C の頂点 X に対して n_X を $\tau^i(X) \simeq X$ となる最小の自然数とする. $f : C_0 \to \mathbb{Q}$ を

$$f(X) := \frac{1}{n_X} \sum_{i=0}^{n_X - 1} \mathrm{rank}(\tau^i(X))$$

と定めれば, これは subadditive である. これは T 上でも subadditive であって, (4.6) により $\overline{T}$ は infinite Dynkin diagram のうちのいずれかである. □

以上で主結果として次が得られる.

Main Result ([AKM]). $n \geq 2$ とする. $A = \mathcal{O}[X]/(X^n)$ の AR quiver の Heller 格子を含む連結成分 C の tree class は A_∞ である. 更に C は tube であり, その rank は Heller 格子の周期に等しく, その値は 1 または 2 である.

Proof. $i = 1, n-1$ のときは, E_1 が A を直和因子に含むので先の f は additive ではなく (4.6) によって $\overline{T} = A_\infty$ である. $2 \leq i \leq n-2$ のときは E_i が直既約なので A_∞^∞ ではなく, F_i は高々 2 個の直和因子しかもたないので $B_\infty, C_\infty, D_\infty$ ではない. 従って $\overline{T} = A_\infty$ である. すべての頂点は τ 周期をもっているので C は tube となり, $2i = i$ のときはその rank は 1 であって, そうでないときは 2 である. □

参考文献

[AKM] Susumu Ariki, Ryoichi Kase and Kengo Miyamoto, On components of stable Auslander-Reiten quivers that contain Heller lattices: the case of truncated polynomial rings, arXiv:1408.6452, http://arxiv.org/abs/1408.6452.

[AR] M. Auslander and I. Reiten, Almost split sequences for Cohen-Macauley modules, Math Ann. **277** (1987), 345-349.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten and S.SmalØ, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge studies in advanced mathematics **36**, Cambridge University Press, 1995.

[ASS] I. Assem, D. Simson and A.Slowroński, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, London Mathematical Society Student Texts **65**, 2006.

[B] D. Benson, Representations and Cohomology, I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras, Cambridge studies in advanced mathematics **30**, Cambridge University Press, 1991.

[Erd] K. Erdmann, On Auslander-Reiten components for group algebras, J. Pure Appl. Algebra **104** (1995), no. 2, 149-160.

[K] S. Kawata, On Heller lattices over ramified extended orders, J. Pure and Applied Algebra **202**(2005), 55-71.

[Webb] P. Webb, The Auslander-Reiten quiver of a finite group, Math. Z. **179** (1982), no. 1, 97-121.