数理解析研究所講究録
第 1999 巻 2016 年 1-12

Skew-q-gaussian distribution

田崎雅裕 [1], 小池健一 [2]
[1] 筑波大学大学院数理物質科学研究科
[2] 筑波大学数理物質系

Masahiro Tasaki[1] and Ken-ichi Koike[2]
[1]Graduate School of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba
[2]Faculty of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1 導入

skew 分布族とは, Azzalini [2] により導入された新しい確率分布の族の一つである. これは左右対称である確率分布を歪ませることで得られる確率分布の一つで, 従来の左右対称の確率分布に比べより柔軟な分布の形が表現でき, より現実の事象に近い確率分布によるデータ推定が可能であると考えられる. 本稿では, まず冒頭で skew 分布族を導入し, skew 分布族の代表的な例である skew-normal 分布を用いて基本的性質を紹介する.

次に q-gaussian 分布を導入する. q-gaussian 分布は Tsallis エントロピーの最大化により得られる確率分布で, 現在地質学や経済学, 機械学習など広く使われている. パラメータ q の値を操作することにより t 分布などの裾が重い確率分布を表すことができ, またウィグナーの半円分布などの分布の台が有限である確率分布の形も表すことができる. そしてそれらは共に対称性を持つ.

最後に, skew 分布族と q-gaussian 分布を合わせることで新たに skew-q-gaussian 分布を定義する. skew 分布と q-gaussian 分布を組み合わせることで, 対称性を持つ確率分布をより一般化することができ, 精度の高いデータ解析が可能であると考える. まず

skew-q-gaussian 分布を定義した後に, その中心モーメント, 最尤推定量, 極値分布についての性質を示す.

2 skew 分布族

命題 2.1 (Azzalini [3]) $f_0(\cdot)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の p.d.f., $G_0(\cdot)$ を $\mathbb{R}$ 上の c.d.f., $w(\cdot)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の実数値関数とする. ただし $f_0(-x) = f_0(x)$, $G_0(-y) = 1 - G_0(y)$, $w(-x) = -w(x)$ が任意の $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}$ で成り立つとする. このとき

$$f(x) = 2f_0(x)G_0(w(x))$$

は $\mathbb{R}^d$ 上の p.d.f. となる.

$f(x)$ を p.d.f. に持つ分布は skew 分布と呼ばれる. $f_0(\cdot), G_0(\cdot), w(\cdot)$ を変えることにより様々な skew 分布が定義できる. また $w(x) \equiv 0$ とすると, $f(x) \equiv f_0(x)$ となることから, skew 分布は (y 軸に対して対称な) $f_0(x)$ 自身を含んでいることが分かる.

3 skew-normal 分布

定義 3.1 (Azzalini [3]) 標準正規分布の p.d.f., c.d.f. をそれぞれ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \ \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

とおく. $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると, 命題 2.1 より

$$f(x) = \varphi(x; \alpha) = 2\varphi(x)\Phi(\alpha x), \ x \in \mathbb{R}$$

は $\mathbb{R}$ 上の p.d.f. となる. $\varphi(x; \alpha)$ を p.d.f. にもつ確率分布を skew-normal 分布と呼び, $SN(0, 1, \alpha)$ と表す.

$\alpha = 0$ のとき, skew-normal 分布は正規分布と一致する. また $Z \sim SN(0, 1, \alpha)$ に対して $Y = \xi + \omega Z$ と位置尺度変換したものを $Y \sim SN(\xi, \omega^2, \alpha)$ と表す.
次にパラメータを増やして拡張した skew-normal 分布を定義するために, まず以下の補題を導入する.

補題 3.1 (Ellison [4], Zacks [9]) $h, k \in \mathbb{R}$, $U \sim N(0, 1)$ のとき

$$E[\Phi(hU + k)] = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{1 + h^2}}\right)$$

となる.

補題 3.1 から任意の $\alpha_0, \alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$\frac{1}{\Phi(\alpha_0/\sqrt{1+\alpha^2})}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\Phi(\alpha_0+\alpha x)dx = 1$$

が示される. そこで $\tau = \alpha_0/\sqrt{1+\alpha^2}$ とした確率分布を次のように定義する.

定義 3.2 (Azzalini [3]) 次の $\varphi(x;\alpha,\tau)$ を p.d.f. に持つ確率分布を extend skew-normal 分布と呼び, $ESN(0,1,\alpha,\tau)$ と表す.

$$\varphi(x;\alpha,\tau) = \varphi(x)\frac{\Phi(\tau\sqrt{1+\alpha}+\alpha x)}{\Phi(\tau)},\ x \in \mathbb{R}$$

$X \sim ESN(0,1,\alpha,\tau)$ に対して $Y = \xi + \omega X$ と位置尺度変換したものを $Y \sim ESN(\xi,\omega^2,\alpha,\tau)$ と表す. また $\tau = 0$ のとき, extend skew-normal 分布は skew-normal 分布と一致する.

Azzalini [3] においては, 積率母関数を用いた証明ができないことから, skew-normal 分布同士の和の分布が求められていなかった. そこで別の方法を用いて skew-normal 分布同士の和の分布を求める. 次の補題を用いる.

補題 3.2 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, 標準正規分布の p.d.f. φ と c.d.f.Φ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\Phi(a_1x+b_1)\Phi(a_2x+b_2)dx = \Phi(\tau_1)\Phi(\tau_2;\tilde{\alpha},\tau_1) = \Phi(\tau_2)\Phi(\tau_1;\tilde{\alpha},\tau_2)$$

となる. ただし, $\tau_1 = b_1/\sqrt{1+a_1^2}, \tau_2 = b_2/\sqrt{1+a_2^2}, \tilde{\alpha} = a_1a_2/\sqrt{1+a_1^2+a_2^2}$, $\Phi(x;\alpha,\tau) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t;\alpha,\tau)dt$ とする.

補題 3.2 を用いると, 次の定理が導ける.

定理 3.1 $Y_1 \sim SN(\xi_1,{\omega_1}^2,\alpha_1)$, $Y_2 \sim SN(\xi_2,{\omega_2}^2,\alpha_2)$, Y_1 と Y_2 は独立とする. そのとき, 和の分布 $U = Y_1 + Y_2$ は以下の p.d.f. に従う.

$$\begin{aligned} f_U(u) &= 2\varphi\left(\frac{u-\xi}{\omega};\frac{\alpha_1\omega_1}{\sqrt{\omega^2+\alpha_1^2\omega_2^2}}\right)\Phi(\tau_2(u);\tilde{\alpha},\tau_1(u)) \\ &= 2\varphi\left(\frac{u-\xi}{\omega};\frac{\alpha_2\omega_2}{\sqrt{\omega^2+\alpha_2^2\omega_1^2}}\right)\Phi(\tau_1(u);\tilde{\alpha},\tau_2(u)) \end{aligned}$$

ただし

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2},\ \xi = \xi_1 + \xi_2,\ \tau_1(u) = \alpha_1\omega_1(u-\xi)/(\omega\sqrt{\omega^2 + \alpha_1^2\omega_2^2}),$$
$$\tau_2(u) = \alpha_2\omega_2(u-\xi)/(\omega\sqrt{\omega^2 + \alpha_2^2\omega_1^2}),\ \tilde{\alpha} = -\alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2/(\omega\sqrt{\omega^2 + \alpha_1^2\omega_2^2 + \alpha_2^2\omega_1^2}),$$
$$\Phi(x;\alpha,\tau) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t;\alpha,\tau)dt$$

とする．

次に skew-normal 分布の n 次モーメントに関する命題を示す．これは Azzalini [3] にある表記を改良したものとなっている．

定理 3.2 $Z \sim SN(0,1,\alpha)$ とすると，Z の $n(\in \mathbb{N})$ 次モーメントは以下の漸化式を満たす．

$$E[Z^n] = (n-1)E[Z^{n-2}] + \frac{b\delta}{(1+\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}}} \times \begin{cases} 0 & n : \text{even}, \\ (n-2)!! & n : \text{odd}. \end{cases}$$

ただし $b = \sqrt{2/\pi}, \delta = \alpha/\sqrt{1+\alpha^2}$ とする．

4 q-gaussian 分布

q-gaussian 分布は条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_q(x)dx = 1,\ \ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2\{f_q(x)\}^q dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\{f_q(x)\}^q dx} = \sigma^2$$

の下でツァリスエントロピー

$$S_q = \frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty}\{f_q(x)\}^q dx}{q-1}$$

を最大にする確率分布 $f_q(x)$ を求めることにより定義されるものである (証明は須鎗 [7], Furuichi [5] 参照).

定義 4.1 (須鎗 [7]) 次の $p_q(x)$ を p.d.f. に持つ確率分布を q-gaussian 分布 $qN(0,1,q)$ と呼ぶ．

$$p_q(x) = \frac{1}{Z_q(1)}\left[1 - \frac{1-q}{3-q}x^2\right]_+^{\frac{1}{1-q}},\ x \in \mathbb{R},\ q < 3$$

ただし $[a]_+ = \max\{a, 0\}$,

$$Z_q(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1-q}{3-q}\frac{x^2}{\sigma^2}\right]_+^{\frac{1}{1-q}} dx = \begin{cases} \left(\frac{3-q}{q-1}\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}} B\left(\frac{3-q}{2(q-1)}, \frac{1}{2}\right) & (1 < q < 3), \\ \left(\frac{3-q}{1-q}\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}} B\left(\frac{2-q}{1-q}, \frac{1}{2}\right) & (q < 1) \end{cases}$$

とする.

また $X \sim qN(0, 1, q)$ に対して $Y = \mu + \sigma X$ と位置尺度変換したものを $Y \sim qN(\mu, \sigma^2, q)$ と表す. また, そのときの p.d.f. は

$$p_q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{Z_q(\sigma)}\left[1 - \frac{1-q}{3-q} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]_+^{\frac{1}{1-q}}$$

となる.

q-gaussian 分布は, q を特定の値にすることで様々な分布を表すことができる ([7]).

1. $q \to 1$ のとき, q-gaussian 分布は正規分布と一致する.

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

2. $q = 1 + \frac{2}{\nu+1}$ のとき, q-gaussian 分布は自由度 ν の t 分布と一致する.

$$p_{1+\frac{2}{\nu+1}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}B(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

3. $q = -1$ のとき, q-gaussian 分布はウィグナーの半円分布と一致する.

$$p_{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})}\left[1 - \frac{x^2}{2}\right]_+^{\frac{1}{2}}$$

5 skew-q-gaussian 分布の定義と性質

第 2 節と第 4 節で skew 分布と q-gaussian 分布についてそれぞれ述べた. 本節では, skew 分布と q-gaussian 分布を合わせた確率分布を新たに定義し, 基本的性質を示す.

定義 5.1 命題 2.1 において, $f_0(x) = p_q(x), G_0(w(x)) = P_q(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\alpha x} p_q(t)dt$ とした

$$p_q(x; \alpha) = 2p_q(x)P_q(\alpha x)$$

は $\mathbb{R}$ 上の p.d.f. となる. $p_q(x;\alpha)$ を p.d.f に持つ確率分布を skew-q-gaussian 分布と呼び, $SqN(0,1,\alpha,q)$ と表す.

ここで $SqN(0,1,\alpha,q)$ の c.d.f. を

$$P_q(x;\alpha) = \int_{-\infty}^{x} p_q(t;\alpha)dt$$

と表す.

$\alpha = 0$ のとき, skew-q-gaussian 分布は q-gaussian 分布と一致する. また $Z \sim SqN(0,1,\alpha,q)$ に対して $Y = \mu + \sigma Z$ と位置尺度変換したものを $Y \sim SqN(\mu,\sigma^2,\alpha,q)$ と表す. また, そのときの p.d.f. は q-gaussian 分布のときと同様に

$$p_q\left(\frac{x-\mu}{\sigma};\alpha\right) = 2p_q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)P_q\left(\alpha\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

となり, 尺度パラメータ σ が正規化定数 $Z_q(\sigma)$ に含まれることに注意する.

$SqN(0,1,1,q)$ に対して, q の値をいくつか代入したものを図に示す.

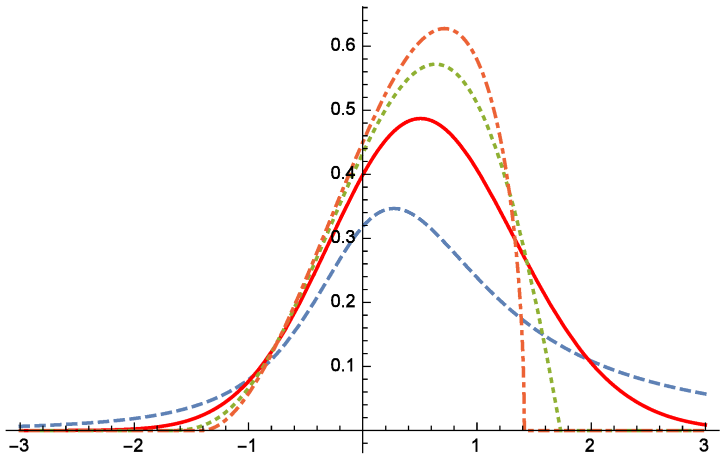

Figure1 $q = -1, 0, 1, 2$ のときの $SqN(0,1,1,q)$ のグラフ (DotDashed, Dotted, Line, Dashed)

skew-q-gaussian 分布の一般的性質として, まず n 次モーメントについて考えると, 以下の命題が示される.

命題 5.1 $X \sim SqN(0,1,\alpha,q)$ とすると, X の $n(\in \mathbb{N})$ 次モーメントは以下の漸化式を満

たす.

$$E\left[X^{2n}\right]=\frac{(2n-1)(3-q)}{2n-1-q(2n+1)}E\left[X^{2(n-1)}\right],$$
$$E\left[X^{2n-1}\right]=\frac{(n-1)(3-q)}{n(1-q)-1}E\left[X^{2(n-1)-1}\right]+\frac{(3-q)}{n(1-q)-1}f_n(\alpha,q).$$

ここで, $f_n(\alpha,q)$ は以下で与えられる.

$$f_n(\alpha,q)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sgn}(\alpha)\alpha^2}{2B(\frac{2-q}{1-q},\frac{1}{2})^2}\left(\dfrac{3-q}{1-q}\right)^{n-\frac{3}{2}}\dfrac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3-2q}{1-q})}{\Gamma(n+\frac{5-3q}{2(1-q)})}F\left(\dfrac{1}{q-1},n-\dfrac{1}{2},n+\dfrac{5-3q}{2(1-q)},\alpha^2\right) \\ \hfill (q<1,\ 0<|\alpha|\le 1), \\ \dfrac{\mathrm{sgn}(\alpha)|\alpha|^{3-2n}}{2B(\frac{2-q}{1-q},\frac{1}{2})^2}\left(\dfrac{3-q}{1-q}\right)^{n-\frac{3}{2}}\dfrac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{2-q}{1-q})}{\Gamma(n+\frac{3-q}{2(1-q)})}F\left(\dfrac{2-q}{q-1},n-\dfrac{1}{2},n+\dfrac{3-q}{2(1-q)},\dfrac{1}{\alpha^2}\right) \\ \hfill (q<1,\ 1\le|\alpha|), \\ \dfrac{\mathrm{sgn}(\alpha)|\alpha|^{\frac{2(2-q)}{1-q}}}{2B(\frac{3-q}{2(q-1)},\frac{1}{2})^2}\left(\dfrac{3-q}{q-1}\right)^{n-\frac{3}{2}}\dfrac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\Gamma(-n-\frac{5-q}{2(1-q)})}{\Gamma(\frac{3-q}{q-1})} \\ \quad\times F\left(\frac{1}{q-1},-n-\frac{5-q}{2(1-q)},\frac{3-q}{q-1},\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\right) \\ \hfill (1<q<1+\frac{4}{2n+1},\frac{1}{\sqrt{2}}<|\alpha|), \\ \dfrac{\mathrm{sgn}(\alpha)|\alpha|^{-2n-\frac{q}{1-q}}}{2B(\frac{3-q}{2(q-1)},\frac{1}{2})^2}\left(\dfrac{3-q}{q-1}\right)^{n-\frac{3}{2}}\dfrac{\Gamma(n-\frac{1}{2})\Gamma(-n-\frac{5-q}{2(1-q)})}{\Gamma(\frac{3-q}{q-1})} \\ \quad\times F\left(\frac{2-q}{q-1},-n-\frac{5-q}{2(1-q)},\frac{3-q}{q-1},1-\alpha^2\right) \\ \hfill (1<q<1+\frac{4}{2n+1},0<|\alpha|<\sqrt{2}),\end{cases}$$

ただし, $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ はガウスの超幾何関数で,

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{z^n}{n!}\quad(|z|<1),$$

と与えられる.

注意 5.1 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ はオイラー積分表示により次のように表される ([1]).

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}dt\quad(\gamma>\beta>0,\ |z|<1).$$

6 skew-q-gaussian 分布の推定

$Y_1, \dots, Y_n$ を $SqN(\mu, \sigma^2, \alpha, q)$ に従う i.i.d. 確率変数とし, $Y = (Y_1, \dots, Y_n), \theta = (\mu, \sigma, \alpha, q)$ とする. そのとき θ の尤度関数は

$$L(\theta, y) = \frac{2^n}{Z_q^n(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} \left\{1 - \frac{1-q}{3-q}\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}^{\frac{1}{1-q}} P_q\left(\alpha \frac{y_i - \mu}{\sigma}\right)$$

となる. 従って対数尤度関数 $l(\theta, z)$ は

$$l(\theta, z) = n \log 2 - n \log Z_q(\sigma) + \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^{n} \log\left(1 - \frac{1-q}{3-q} z_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \log P_q(\alpha z_i)$$

となる. ただし $z_i = (y_i - \mu)/\sigma (i = 1, \dots, n), z = (z_1, \dots, z_n)$ とする. 対数尤度関数 l を θ で偏微分したスコア関数は,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \mu} &= \frac{2}{\sigma(3-q)} \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{1 - \frac{1-q}{3-q} z_i^2} - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \zeta_1(\alpha z_i), \\
\frac{\partial l}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{2}{\sigma(3-q)} \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{1 - \frac{1-q}{3-q} z_i^2} - \frac{\alpha}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} z_i \zeta_1(\alpha z_i), \\
\frac{\partial l}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^{n} z_i \zeta_1(\alpha z_i), \\
\frac{\partial l}{\partial q} &= -nA_q + \frac{1}{1-q^2} \sum_{i=1}^{n} \log\left(1 - \frac{1-q}{3-q} z_i^2\right) + \frac{2}{(1-q)(3-q)^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{1 - \frac{1-q}{3-q} z_i^2} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n} g_q(\alpha z_i),
\end{aligned}$$

ただし $\zeta_0(x) = \log P_q(x)$, $\zeta_i(x) = (\partial^i / \partial x^i) \zeta_0(x) \ \ (i = 1, 2, \dots)$, $g_q(x) = \frac{\partial}{\partial q} p_q(x) / P_q(x)$ であり,

$$A_q = \frac{\frac{\partial}{\partial q} Z_q(\sigma)}{Z_q(\sigma)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(q-1)^2}\left\{\dfrac{q-1}{3-q} + \psi\left(\dfrac{1}{q-1}\right) - \psi\left(\dfrac{3-q}{2(q-1)}\right)\right\} & (1 < q < 3), \\[2ex] \dfrac{1}{(1-q)^2}\left\{\dfrac{1-q}{3-q} + \psi\left(\dfrac{2-q}{1-q}\right) - \psi\left(\dfrac{5-3q}{2(1-q)}\right)\right\} & (q < 1) \end{cases}$$

とおく. また, $\psi(\cdot)$ はディガンマ関数で $\psi(x) = (\partial/\partial x) \log \Gamma(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ である. こ

れらのスコア関数を $=0$ として解くことで θ の最尤推定量を求めることができる．
スコア関数をさらに各パラメータで偏微分すると，

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} = -\frac{2}{\sigma^2(3-q)}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{1-q}{3-q}z_i^2}{(1-\frac{1-q}{3-q}z_i^2)^2} + \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\zeta_2(\alpha z_i),$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \sigma} = -\frac{4}{\sigma^2(3-q)}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{(1-\frac{1-q}{3-q}z_i^2)^2} + \frac{\alpha}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\zeta_1(\alpha z_i) + \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i\zeta_2(\alpha z_i),$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \alpha} = -\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\zeta_1(\alpha z_i) - \frac{\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}z_i\zeta_2(\alpha z_i),$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial q} = \frac{2}{\sigma(3-q)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i(1-z_i^2)}{(1-\frac{1-q}{3-q}z_i^2)^2} - \frac{\alpha}{\sigma}g_q{}'(\alpha z_i),$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^2(3-q)}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^2(3-\frac{1-q}{3-q}z_i^2)}{(1-\frac{1-q}{3-q}z_i^2)^2} + \frac{2\alpha}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i\zeta_1(\alpha z_i) + \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2\zeta_2(\alpha z_i),$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial \alpha} = -\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}z_i\zeta_1(\alpha z_i) - \frac{\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}z_i^2\zeta_2(\alpha z_i),$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial q} = \frac{2}{\sigma(3-q)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^2(1-z_i^2)}{(1-\frac{1-q}{3-q}z_i^2)^2} - \frac{\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}z_i g_q{}'(\alpha z_i),$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} = \sum_{i=1}^{n}z_i^2\zeta_2(\alpha z_i), \quad \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial q} = \sum_{i=1}^{n}z_i g_q{}'(\alpha z_i),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l}{\partial q^2} = &-\frac{\partial}{\partial q}A_q + \frac{2}{(1-q)^3}\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-\frac{1-q}{3-q}z_i^2\right) + \frac{2}{(1-q)^2(3-q)}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^2}{(1-\frac{1-q}{3-q}z_i^2)^2}\\ &+ \frac{2(5-3q)}{(1-q)^2(3-q)^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^2}{1-\frac{1-q}{3-q}z_i^2} + \frac{4}{(1-q)(3-q)^4}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^4}{(1-\frac{1-q}{3-q}z_i^2)^2}\\ &+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q}g_q(\alpha z_i).\end{aligned}$$

となる. これらの期待値をとることで, Y の θ に関するフィッシャー情報行列 $I(\theta)$ の要素を求めることができる.

$$
\begin{aligned}
i_{\mu\mu} =& n\frac{2d_{q,\alpha}+(3-q)\alpha a_{0,2}}{\sigma^2(3-q)},\ i_{\mu\sigma}=i_{\sigma\mu}=n\frac{4c_{q,\alpha}+(3-q)\alpha\{a_{0,2}+\alpha(b_{1,q}-a_{1,2})\}}{\sigma^2},\\
i_{\mu\alpha} =& i_{\alpha\mu}=n\frac{a_{0,1}+\alpha(b_{1,q}-a_{1,2})}{\sigma},\ i_{\mu q}=i_{q\mu}=-\frac{5-q}{2}nc_{q,\alpha}+\frac{\alpha}{\sigma}ne_{q,\alpha},\\
i_{\sigma\sigma} =& n\frac{(6-q)+\alpha^2 qa_{2,2}}{q\sigma^2},\ i_{\sigma\alpha}=i_{\alpha\sigma}=n\frac{a_{0,1}-\alpha a_{2,2}}{\sigma},\\
i_{\sigma q} =& i_{q\sigma}=\frac{\alpha}{\sigma}nh_{q,\alpha},\ i_{\alpha\alpha}=na_{2,2},\\
i_{\alpha q} =& i_{q\alpha}=-nh_{q,\alpha},\ i_{qq}=n\frac{\partial}{\partial q}A_q-\frac{2n}{(1-q)^3}j_{q,\alpha}-\frac{2n(5-3q)}{(1-q)^2(3-q)^2}-nk_{q,\alpha},
\end{aligned}
$$

ただし $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
a_{k,1} =& E[Z^{2k}\zeta_1(\alpha Z)],\ a_{k,2}=E[Z^k\zeta_1{}^2(\alpha Z)],\ b_{k,q}=E[Z^{2l-1}\zeta_2(\alpha Z)]+a_{k,2^{*1}},\\
c_{q,\alpha} =& E\left[\frac{Z}{(1-\frac{1-q}{3-q}Z^2)^2}\right],\ d_{q,\alpha}=E\left[\frac{1+\frac{1-q}{3-q}Z^2}{(1-\frac{1-q}{3-q}Z^2)^2}\right],\ e_{q,\alpha}=E[g_q{}'(\alpha Z)],\\
h_{q,\alpha} =& E[Zg_q{}'(\alpha Z)],\ j_{q,\alpha}=E\left[\log\left(1-\frac{1-q}{3-q}Z^2\right)\right],\ k_{q,\alpha}=E\left[\frac{Z^2}{(1-\frac{1-q}{3-q}Z^2)^2}\right]
\end{aligned}
$$

とする.

7 skew-q-gaussian 分布の極値分布

skew-q-gaussian 分布の極値分布について考える. $q<1$ と $q>1$ の場合, つまり分布の台が異なる場合に対して場合を分けて考える必要がある.

定理 7.1 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は $SqN(0,1,\alpha,q)$ に従う i.i.d. 確率変数とし, $M_n := \max_{1\le i\le n} X_i$ とする.
(i) $q<1, \alpha>-1$ のとき

$$
P\left(\frac{M_n-C}{b_n}\le x\right)\to G_{2,(2-q)/(1-q)}(x)=\begin{cases}\exp\left\{-(-x)^{-(2-q)/(1-q)}\right\} & (x<0),\\ 1 & (x\ge 0)\end{cases}
$$

となる. ただし $C=\sqrt{(3-q)/(1-q)}$, $b_n=\frac{C}{2}\left\{\frac{(2-q)B(\frac{2-q}{1-q},\frac{1}{2})}{n(1-q)P_q(\alpha C)}\right\}^{(1-q)/(2-q)}$ とおく.

(ii) $q < 1, \alpha \leq -1$ のとき

$$P\left(\frac{M_n + \frac{C}{\alpha}}{b_n} \leq x\right) \to G_{2,(3-2q)/(1-q)}(x) = \begin{cases} \exp\left\{-(-x)^{-(3-2q)/(1-q)}\right\} & (x < 0), \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

となる．ただし

$$b_n = \frac{2^{(3-2q)/(2-q)}}{-\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/(3-2q)} \left\{\frac{C^2 B(\frac{2-q}{1-q}, \frac{1}{2})^2 (2-q)(3-2q)}{n(q-1)^2}\right\}^{(1-q)/(2q-3)}$$

とおく．

(iii) $1 < q < 3, \alpha > 0$ のとき

$$P\left(\frac{M_n}{b_n} \leq x\right) \to G_{1,(3-q)/(q-1)}(x) = \begin{cases} \exp\left\{-x^{-(3-q)/(q-1)}\right\} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

となる．ただし $C' = \sqrt{(3-q)/(q-1)}$, $b_n = C'^{(5-3q)/(3-q)} \left\{\frac{B(\frac{3-q}{2(q-1)}, \frac{1}{2})}{2n}\right\}^{(1-q)/(3-q)}$ とおく．

(iv) $1 < q < 3, \alpha < 0$ のとき

$$P\left(\frac{M_n}{b_n} \leq x\right) \to G_{1,2(3-q)/(q-1)}(x) = \begin{cases} \exp\left\{-x^{-2(3-q)/(q-1)}\right\} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0), \end{cases}$$

となる．ただし $b_n = \frac{C'^{(5-3q)/(3-q)}}{\sqrt{-\alpha}} \left\{\frac{B(\frac{3-q}{2(q-1)^2}, \frac{1}{2})}{n}\right\}^{(1-q)/2(3-q)}$ とおく．

注意 7.1 $G_{1,\gamma}$, $G_{2,\gamma}$ はそれぞれ Fréchet 分布，Weibull 分布として知られている (Galambos[6]).

References

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York.

[2] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scand. J. Statist.*, **12**, 171–178.

[3] Azzalini, A. (2014). *The Skew-Normal and Related Families*. Cambridge Univ. Press, New York.

[4] Ellison, B.E. (1964). Two theorems for inferences about the normal distribution with applications in acceptance sampling. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **59**, 89–95.

[5] Furuichi, S. (2009). On the maximum entropy principle and the minimization of the Fisher information in Tsallis statistics. *J. Math. Phys.*, 50, 013303.

[6] Galambos, J. (1987). *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, 2nd edition.* Krieger, Florida.

[7] 須槍弘樹 (2010). 複雑系のための基礎数理. 牧野書店.

[8] Tasaki, M. and Koike, K. (2016). Skew-q-gaussian distribution (*in preparation*).

[9] Zacks, S. (1981). *Parametric Statistical Inference*. Pergamon Press, Oxford.