複素解析を用いた素数定理の証明

山口 駿

大阪府立天王寺高等学校

要旨

D. Zagier による論文 “Newman’s Short Proof of the Prime Number Theorem” に沿って素数定理の証明を行う．基礎的な複素解析の知識を用い，3 つの素数に関する関数を考え，それらに関する 6 つの命題を証明していくことで素数定理を導く．

重要語句 : 素数，素数定理，複素解析

素数定理について

素数定理の主張は x 以下の素数の個数は x/log x で近似されるというものである．素数定理は Gauss や Legendre などによって予想され，Riemann によってゼータ関数との繋がりが示された．最終的には 1896 年に Poussin と Hadamard がそれぞれ証明を与えた．しかしそれらは長く複雑なものであった．この論文における証明は 1997 年に Zagier が発表したわずか 4 ページの論文 “Newman’s Short Proof of the Prime Number Theorem”(1) によるもので，基礎的な複素解析の知識を用いて素数定理を簡潔に証明している．本論文の執筆において，上記論文の他に吉田 (2) と高木 (3) の著作を参考にした．

複素解析の基礎

まず用いる記号の定義を述べる．

・任意の複素数 z について，z の実部，虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ で表す．

・二つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

が成立するとき

$$f(x)\sim g(x)$$

と書く．

・変数 x をある極限に飛ばしたときに関数 $f(x)$, $g(x)$ についてある定数 k が存在して，

$$|g(x)|\le k\,|f(x)|$$

が成立するとき，

$$g(x)=O(f)$$

と書く．

さらに素数定理の証明に用いる複素解析の基礎や定理などを証明を省略して述べる．

定理 1

任意の実数 a, 複素数 z について

$$\left|a^z\right|=\left|a^{\mathrm{Re}(z)}\right|$$

これは今後断りなく用いる．

複素関数 $f(z)$ が $z=z_0$ で微分可能であるとは，極限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

が収束することをいう．実数関数でいう微分可能という意味だが z は複素平面上の様々な方向から 0 に近づけるので（実数の場合の直線上の二方向）とても強い条件となっている．

さらに $f(z)$ が領域 D で正則であるとは D の各点で $f(z)$ が微分可能であることを言う．正則関数の四則演算，合成で得られる関数も正則である．（商が 0 である場合を除く）

関数の正則性を確認するには次の定理を用いる．

定理 2

領域 D 上の正則関数列 $\{f_n(z)\}$ に対し D 内の任意の有界閉集合 D' で，ある正数列 $\{M_n\}$ が存在し，次の二つの条件

1)．任意の $z\in D', n$ に対し，$\left|f_n(z)\right|\le M_n$

2)．$\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ は収束する．

を満たすとき $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ は D で正則である．

有界閉集合とは集合が原点 O から有限の距離の範囲の中にあり，かつ境界線上の点も集合に含まれている集合のことである．

さらに無限積についても類似の定理がある．

定理 3

領域 D 上の正則関数列 $\{f_n(z)\}$ に対し D 内の任意の有界閉集合 D' で，ある正数列 $\{M_n\}$ が存在し，次の二つの条件

1)．任意の $z\in D', n$ に対し，$\left|f_n(z)\right|\le M_n$

2)．$\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ は収束する．

を満たすとき $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+f_n(z)\right)$ の零点以外で

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$$ が成り立つ．

内容に関する連絡先：
並河 良典（京都大学大学院理学研究科）
namikawa@math.kyoto-u.ac.jp

零点とは $f(z)=0$ となるような z のことである．
正則関数の大きな特徴として，べき級数展開ができるということがある．つまり D で正則な関数 $f(z)$ に対し D の任意の点 z_0 で

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

と書ける．これを $z=z_0$ におけるテイラー展開という．

$f(z)$ が $z=z_0$ では正則ではないが，
$(z-z_0)^n f(z)$ が $z=z_0$ に正則で，かつ 0 でない値をとるときに $z=z_0$ は $f(z)$ の n 次の極という．このとき $(z-z_0)^n f(z)$ を $z=z_0$ でテイラー展開すると

$$(z-z_0)^n f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+n}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(z)&=\sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\\ &=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\end{aligned}$$

これを $f(z)$ の $z=z_0$ におけるローラン展開という．さらにこのときの $(z-z_0)^{-1}$ の係数 a_{-1} を $f(z)$ の $z=z_0$ における留数と呼ぶ．
一次の極の留数を求めるときには次の定理を用いる．

> 定理 4
> $f(z)$ の一次の極 $z=z_0$ における留数 a_{-1} は
> $$a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

と求められる．

正則関数の別の大きな特徴として一致の定理がある．これは D 内の二つの正則な関数 $f(z)$, $g(z)$ について，D の小領域 D' で常に $f(z)=g(z)$ が成り立つならば D においても $f(z)=g(z)$ が常に成り立つという定理である．

最後に一致の定理に関連したもう一つ定理をあげる．

> 定理 5
> $t\geq 0$ で定義された関数 $f(t)$ は有界かつ局所積分可能であり，$\mathrm{Re}(z)>0$ 上の関数
> $$g(z)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}dt$$
> が，$\mathrm{Re}(z)\geq 0$ に正則関数として拡張できるならば，$\int_0^{\infty} f(t)dt$ は収束する．

有界とは定数 M が存在し，任意の z に対し $|f(z)|\leq M$ が成り立つということである．また局所積分可能とは有限の幅なら積分できるということである．正則関数として拡張できるとは $\mathrm{Re}(z)>0$ で $g(z)$ と一致し，かつ $\mathrm{Re}(z)\geq 0$ で正則であるような関数が存在するという意味である．（一致の定理よりそのような関数が $\mathrm{Re}(z)\geq 0$ でとる値は $g(z)$ に対して一通りしかないのでこれを $g(z)$ の拡張というのである．）

素数定理の証明

3 つの関数を定義し，6 つの命題を証明していく．

<u>素数定理の主張</u>
素数定理は次のように表される．

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$$

ただし実数 x について $\pi(x)$ で x 以下の素数の個数を表すとする．
すなわち x 以下の素数の個数は $\frac{x}{\log x}$ で近似されるという意味である．（x が大きくなるほど近似の精度良くなる．）

<u>3 つの関数</u>
証明に用いる，素数に関する 3 つの関数を定義し $\zeta(s)$ と $\phi(s)$ の正則性を確かめる．

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ \ (s\text{は複素数})$$

これはリーマンのゼータ関数と呼ばれ，後素数と関係づけられる．これは $\mathrm{Re}(s)>1$ で正則である．さらに次の定理が成り立つ．

> 定理 6
> $\mathrm{Re}(s)\geq 1, s\neq 1$ で $\zeta(s)\neq 0$ である．

この定理は後で用いられる．

$$\phi(s)=\sum_p\frac{\log p}{p^s}\ \ (s\text{は複素数})$$

$\sum_p$ は全ての素数にわたる和を表す．これも $\mathrm{Re}(s)>1$ で正則である．

$$\theta(x)=\sum_{p\leq x}\log p\ \ (x\text{は実数})$$

$\sum_{p\leq x}$ は x 以下の素数全体にわたる和を表す．

<u>命題 I</u>

> 命題 I
> $$\mathrm{Re}(s)>1\text{に対し,}\ \zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

（証明）
$\mathrm{Re}(s)>1$ で $\zeta(s)$ は正則であり，従って収束するので $\mathrm{Re}(s)>1$ で左辺と右辺の値が一致することを示せば良い．s を $\mathrm{Re}(s)>1$ なる複素数，p を任意の素数とする．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p^s}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p^s}+\left(\frac{1}{p^s}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{p^s}\right)^{n-1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{p^s}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{p^s}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\qquad\left(\because \frac{1}{|p^s|}<1\right)$$
なので
$$\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$
$$=\prod_p\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^s}\right)^n$$
$$=\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{5^{2s}}+\cdots\right)\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots$$
$$=\zeta(s)$$
となり，命題Ⅰが示された．

命題Ⅱ

> 命題Ⅱ
> $\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ に正則関数として，拡張できる．

$\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で正則であるが，そのままの形では定義域を $\mathrm{Re}(s)>0$ とすることはできない．（例えば $s=1$ のときの値をこの形では定義できない．）

この命題は $\mathrm{Re}(s)>1$ で $\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ と一致し，$\mathrm{Re}(s)>0$ で正則な関数が存在することを主張している．これを拡張としている．

（証明）

$\mathrm{Re}(s)>1$ とする

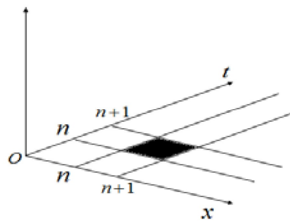
$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{1}{x^s}dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-s}\cdot\frac{1}{x^{s-1}}\right]_1^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{n^{s-1}}-1\right)=\frac{1}{s-1}$$

となるので，$\dfrac{1}{s-1}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{x^s}dx$ となる．

よって，
$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x^s}dx\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx$$
を考えればよい．

$\mathrm{Re}(s)>0$ 内の任意の有界閉集合 D を，ある実数 $a>0$ によって $\mathrm{Re}(s)\geq a$ に含まれるようにとる．

$$\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\right|=\left|\int_n^{n+1}\left[-\frac{1}{t^s}\right]_n^x dx\right|$$
$$=\left|\int_n^{n+1}\left(\int_n^x\frac{s}{t^{s+1}}dt\right)dx\right|$$
$$\leq\int_n^{n+1}\left(\int_n^x\left|\frac{s}{t^{s+1}}\right|dt\right)dx$$
$$\leq\int_n^{n+1}\left(\int_n^x\frac{|s|}{t^{\mathrm{Re}(s)+1}}dt\right)dx$$
$$\leq\int_n^{n+1}\left(\int_n^{n+1}\frac{|s|}{t^{\mathrm{Re}(s)+1}}dt\right)dx$$
と計算できる．最後の積分は下のような領域の上にある立体の体積を表している．



$n^{\mathrm{Re}(s)+1}\leq t^{\mathrm{Re}(s)+1}\leq(n+1)^{\mathrm{Re}(s)+1}$ よりこの立体の高さの最大値は

$\dfrac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}$ である．よって

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\right|\leq\frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}\leq\frac{|s|}{n^{a+1}}$$

なので，$M_n=\dfrac{|s|}{n^{a+1}}$ とすれば，$a+1>1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}M_n=|s|\zeta(a+1)$ は収束する．

D は $\mathrm{Re}(s)>0$ 内の任意の有界閉集合なので定理 2 より
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx$$
は $\mathrm{Re}(s)>0$ で正則である．$\mathrm{Re}(s)>1$ で
$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx$$
が成り立つので $\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ は正則関数として $\mathrm{Re}(s)>0$ に拡張された．

命題Ⅲ

> 命題Ⅲ
> $\theta(x)=O(x)$ である．

つまりある定数 k について $|\theta(x)|\leq k|x|$ が成立するということである．

（証明）

n を任意の自然数とする．二項定理より

$$
\begin{aligned}
2^{2n} &= (1+1)^{2n} \\
&= {}_{2n}C_0 + \cdots + {}_{2n}C_n \cdots + {}_{2n}C_{2n} \geq {}_{2n}C_n \\
&= \frac{(n+1)\times(n+2)\cdots\times 2n}{1\times 2\times\cdots\times n}
\end{aligned}
$$

${}_{2n}C_n$は整数なので分母は約分されて 1 になり，また分子のnから$2n$までの中に含まれる素数は約分されないことに着目すると，

$$\frac{(n+1)\times(n+2)\cdots\times 2n}{1\times 2\times\cdots\times n} \geq \prod_{n+1\leq p\leq 2n} p$$

が成立する．$\prod_{n+1\leq p\leq 2n}$は$n+1\leq p\leq 2n$を満たす素数にわたる積である．よって，

$$
\begin{aligned}
2^{2n} &\geq \prod_{n+1\leq p\leq 2n} p = e^{\log\left(\prod p\right)} \\
&= e^{\sum_{n+1\leq p\leq 2n}(\log p)} = e^{\theta(2n)-\theta(n)}
\end{aligned}
$$

となり，両辺の対数をとると，

$2n\log 2 \geq \theta(2n)-\theta(n)$が得られる．

$n = 2^k \quad (k = 1,2,3\ldots,m)$とおき，上式に順次代入していくと，

$$
\begin{aligned}
&2\log 2 \geq \theta(2)-\theta(1) \\
&2^2\log 2 \geq \theta(2^2)-\theta(2) \\
&2^3\log 2 \geq \theta(2^3)-\theta(2^2) \\
&\qquad\vdots \\
&2^m\log 2 \geq \theta(2^m)-\theta(2^{m-1})
\end{aligned}
$$

となる．これらを足すと右辺は打消しあって$\theta(2^m)-\theta(1)$が残るが，$\theta(1)=0$なので右辺の和は$\theta(2^m)$となる．また左辺の和は

$$
\begin{aligned}
&(2+2^2+2^3+\cdots+2^m)\log 2 \\
&= \frac{2(2^m-1)}{2-1}\log 2 \\
&= (2^{m+1}-2)\log 2 \\
&< 2^{m+1}\log 2
\end{aligned}
$$

と評価される．したがって最終的に

$$2^{m+1}\log 2 > \theta(2^m)$$

という不等式が得られる．任意の$x\geq 1$なるxに対し$2^m \leq x < 2^{m+1}$を満たす自然数mが存在する．$\theta(x)$は増加関数なので，

$$0 \leq \theta(x) \leq \theta(2^{m+1})$$

となる．上の不等式と$2^m \leq x$より，

$$0 \leq \theta(x) \leq \theta(2^{m+1}) < 2^{m+2}\log 2 \leq (4\log 2)x$$

これが示すべきことであった．

命題Ⅳ

> 命題Ⅳ
>
> $\phi(s)-\frac{1}{s-1}$は$\mathrm{Re}(s)\geq 1$に正則関数として拡張される．

命題Ⅰ，命題Ⅱ，定理 2，3，4，6 を用いる．

(証明)

$\mathrm{Re}(s)>1$の任意の有界閉集合を，$b>1$なる任意の実数bについてて$\mathrm{Re}(s)\geq b$を満たすようにとる．nを自然数とし，定理 3 における$f_n(s)$，M_nを

$$f_n(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^s-1} & (n\text{が素数のとき}) \\ 0 & (n\text{が素数でないとき}) \end{cases}$$

$$M_n = \frac{2}{n^b}$$

とおく．このとき任意のs,nについて，

$|f_n(s)| \leq M_n$が成立する．実際nが素数でないときは自明であり，

nが素数のときは，

$|n^s| = n^{\mathrm{Re}(s)} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|n^s|-1} < \frac{2}{|n^s|}$なので，

$$
\begin{aligned}
|f_n(s)| &= \left|\frac{1}{n^s-1}\right| \leq \frac{1}{|n^s|-1} < \frac{2}{|n^s|} \\
&= \frac{2}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \leq \frac{2}{n^b} = M_n
\end{aligned}
$$

となる．さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = 2\zeta(b)$$

であり，$b>1$なのでこれは収束する．よって定理 3 より

$$
\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(s)) &= \prod_p\left(1+f_p(s)\right) \\
&= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^s-1}\right) \\
&= \prod_p\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right) \\
&= \zeta(s)
\end{aligned}
$$

の零点以外で，

$$
\begin{aligned}
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(s)}{1+f_n(s)} \\
&= \sum_p \frac{f_p'(s)}{1+f_p(s)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
1+f_p(s) &= 1+\frac{1}{p^s-1} \\
&= \frac{p^s}{p^s-1}
\end{aligned}
$$

,

$$
\begin{aligned}
f_p'(s) &= \left(\frac{1}{p^s-1}\right)' \\
&= \frac{-\left(p^s-1\right)'}{\left(p^s-1\right)^2} \\
&= -\frac{p^s\log p}{\left(p^s-1\right)^2}
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_p \frac{f_p'(s)}{1+f_p(s)} \\
&= \sum_p -\frac{(p^s-1)p^s\log p}{p^s(p^s-1)^2} \\
&= -\sum_p \frac{\log p}{p^s-1} \\
&= -\sum_p \frac{\log p}{p^s} - \sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s} \\
&= -\phi(s) - \sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s}
\end{aligned}
$$

が得られる．しかし定理 6 より$\zeta(s)$は$\mathrm{Re}(s)\ge 1, s\ne 1$で零点を持たないので，

$$
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\phi(s) - \sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s}
$$

が$\mathrm{Re}(s)\ge 1, s\ne 1$で成り立つ．

次に $\sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s}$ は $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ で正則であることを示す． $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$の任意の有界閉集合を，$c > \frac{1}{2}$なる任意の実数 c について$\mathrm{Re}(s)\ge c$を満たすようにとる．$M_n = \frac{2\log n}{n^{2c}}$とすると

$$
\left|\frac{\log p}{(p^s-1)p^s}\right| \le \frac{\log p}{(|p^s|-1)|p^s|} \le \frac{2\log p}{|p^{2s}|} = M_p
$$

となり，かつ

$$
\sum_{n=1}^{\infty} M_n = 2\phi(2c)
$$

であり，$\phi(s)$は$\mathrm{Re}(s)>1$で収束し，$2c>1$なのでこれは収束する．よって定理 2 より$\sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s}$は$\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$で正則である．

命題Ⅱより$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$は$\mathrm{Re}(s) > 0$に正則関数として拡張される．すなわち$\zeta(s)$は$\frac{1}{s-1}$とある正則関数$g(s)$の和として表され，したがって$\zeta(s)$は$\mathrm{Re}(s)>0$で$s=1$に一次の極を持つ有理型関数である．定理 4 より$s=1$における留数a_{-1}は，

$$
\begin{aligned}
a_{-1} &= \lim_{s\to\infty}(s-1)\zeta(s) \\
&= \lim_{s\to\infty}(s-1)\left(\frac{1}{s-1}+g(s)\right) \\
&= \lim_{s\to\infty}\bigl(1+(s-1)g(s)\bigr) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

と求められる．よって$s=1$における$\zeta(s)$，$\zeta'(s)$のローラン展開はそれぞれ

$$
\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-1)^n
$$

$$
\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n(s-1)^{n-1}
$$

となる．ゆえに

$$
\begin{aligned}
&(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \\
&= (s-1)\frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n(s-1)^{n-1}}{\frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-1)^n} \\
&= \frac{-1 + \sum_{n=1}^{\infty} na_n(s-1)^{n+1}}{1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-1)^{n+1}} \\
&\to -1 \ (s \to 1)
\end{aligned}
$$

が成立．よって$s=1$は$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$の一次の極であり，留数は$-1$である．したがって$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$の$s=1$におけるローラン展開は，

$$
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(s-1)^n
$$

と書ける．よって

$$
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(s-1)^n
$$

は$s=1$で正則である．

以上のことから主張を導く．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\phi(s) - \sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s} \\
&\Leftrightarrow \phi(s) - \frac{1}{s-1} \\
&= -\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) - \sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s}
\end{aligned}
$$

である．第一項は定理 6 より$\mathrm{Re}(s)\ge 1, s\ne 1$で$\zeta(s)\ne 0$なので正則であり，かつ今の議論で$s=1$のときも正則であることが分かったので$\mathrm{Re}(s)\ge 1$全体で正則である．第二項は$\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$で正則なのでもちろん$\mathrm{Re}(s)\ge 1$でも正則である．以上より$\phi(s) - \frac{1}{s-1}$は$\mathrm{Re}(s)\ge 1$に正則関数として拡張できることが確かめられた．

命題Ⅴ

> 命題Ⅴ
>
> $$\int_1^{\infty} \frac{\theta(x)-x}{x^2}dx \text{は収束する．}$$

証明には命題Ⅲ，命題Ⅳ，定理 5 を用いる．

（証明）

$\theta(x) = 0 \quad (1 \le x < 2)$

$\theta(x) = \log 2 \quad (2 \le x < 3)$

$\theta(x) = \log 2 + \log 3 \quad (2 \le x < 3)$

$\theta(x) = \log 2 + \log 3 + \log 5 \quad (3 \le x < 5)$

⋮

なので， $\mathrm{Re}(s)>1$に対して，

$$s\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{s+1}}dx$$
$$=\int_1^2 0\,dx+\int_2^3 \frac{s\log 2}{x^{s+1}}dx+\int_3^5 \frac{s(\log 2+\log 3)}{x^{s+1}}dx$$
$$+\int_5^7 \frac{s(\log 2+\log 3+\log 5)}{x^{s+1}}dx+\cdots$$
$$=0+\left[-\frac{\log 2}{x^s}\right]_2^3+\left[-\frac{\log 2+\log 3}{x^s}\right]_3^5$$
$$+\left[-\frac{\log 2+\log 3+\log 5}{x^s}\right]_5^7+\cdots$$
$$=\frac{\log 2}{2^s}-\frac{\log 2}{3^s}+\frac{\log 2+\log 3}{3^s}-\frac{\log 2+\log 3}{5^s}$$
$$+\frac{\log 2+\log 3+\log 5}{5^s}$$
$$-\frac{\log 2+\log 3+\log 5}{7^s}+\cdots$$
$$=\frac{\log 2}{2^s}+\frac{\log 3}{3^s}+\frac{\log 5}{5^s}+\frac{\log 7}{7^s}+\cdots$$
$$=\phi(s)$$

ゆえに，$\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{s+1}}dx=\frac{\phi(s)}{s}$ が成り立つ．

定理 5.1 における $f(t)$ を

$$f(t)=\theta(e^t)e^{-t}-1$$

とおく．このとき，$f(t)$ は定理 5 の条件を満たす．実際 $f(t)$ は局所積分可であり，また命題Ⅲより $\theta(x)=O(x)$ なので，$\left|\theta(e^t)\right|\le ke^t$ なる定数 k が存在し，そのとき

$$|f(t)|=\left|\theta(e^t)e^{-t}-1\right|\le|k-1|$$

となり有界であることが分かる．

すると $g(z)$ は

$$g(z)=\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$
$$=\int_0^\infty \theta(e^t)e^{-(z+1)t}dt-\int_0^\infty e^{-zt}dt$$
$$=\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{z+1}}dx-\left[-\frac{1}{z}e^{-zt}\right]_0^\infty$$

$(e^t=x, dx=xdt$ と置換$)$

$$=\frac{\phi(z+1)}{z+1}-\frac{1}{z}$$

$$\left(\because \int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^{s+1}}dx=\frac{\phi(s)}{s}, \lim_{t\to\infty}-\frac{1}{z}e^{-zt}=0\right)$$

となる．命題Ⅳより $g(z)$ は $\mathrm{Re}(z+1)\ge 1$，つまり $\mathrm{Re}(z)\ge 0$ に正則関数として拡張される．よって定理 5 の $g(z)$ の条件も満たされる．したがって定理 5 の結果より，

$$\int_0^\infty f(t)dt=\int_0^\infty \theta(e^t)e^{-t}-1dt$$
$$=\int_0^\infty \frac{\theta(x)-x}{x^2}dx$$

$(e^t=x, dx=xdt$ と置換$)$

は収束することが確かめられた．

命題Ⅵ

> 命題Ⅵ
>
> $\theta(x)\sim x$ である．

命題Ⅴを用いて証明する．

（証明）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x}=1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$$
$$x>\delta \Rightarrow 1-\varepsilon<\frac{\theta(x)}{x}<1+\varepsilon$$

なので，この命題の否定は

$\exists\varepsilon>0, \forall\delta>0, \exists x>\delta, 1-\varepsilon\ge\frac{\theta(x)}{x}\vee\frac{\theta(x)}{x}\ge 1+\varepsilon$ となる．これを

(1) $\exists\varepsilon>0, \forall\delta>0, \exists x>\delta, \frac{\theta(x)}{x}\ge 1+\varepsilon$

(2) $\exists\varepsilon>0, \forall\delta>0, \exists x>\delta, 1-\varepsilon\ge\frac{\theta(x)}{x}$

の 2 つの場合の分け，それぞれが偽であることを示せば良い．

(1) のとき

$\frac{\theta(x)}{x}\ge 1+\varepsilon$ となる x を 1 つ固定する．さらに t を $t\ge x$ を満たす変数とする．$\theta(x)$ は増加関数なのでこのとき，

$$\theta(t)\ge\theta(x)\ge x(1+\varepsilon)$$

が成立する．すると

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt\ge\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{(1+\varepsilon)x-t}{t^2}dt$$
$$=\int_1^{1+\varepsilon}\frac{(1+\varepsilon)x-xs}{(xs)^2}xds$$
$$=\int_1^{1+\varepsilon}\frac{(1+\varepsilon)-s}{s^2}ds$$

$(t=xs, dt=xds$ と置換した$)$

が得られる．最後の積分は被積分関数の値は積分区間で常に正なので積分の値も正であり，さらに x が含まれないので，x によらない正の定数である．つまり

$$\exists k>0, \forall x>0, \int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt\ge k$$

となる．一方命題Ⅴより $\int_1^\infty \frac{\theta(t)-t}{t^2}dt$ は収束するので，

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt$$
$$=\int_1^{(1+\varepsilon)x}\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt-\int_1^x\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt$$
$$\to\int_1^\infty\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt-\int_1^\infty\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt\ (x\to\infty)$$
$$=0$$

つまり $\forall k>0, \exists x>0, \int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt<k$

これは矛盾である．よって (1) は偽である．

(2) のとき

$\frac{\theta(x)}{x}\le 1-\varepsilon$ となる x を 1 つ固定し，(1) のときと同様に評価すると

$$\int_x^{(1-\varepsilon)x}\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt\le\int_1^{1-\varepsilon}\frac{(1-\varepsilon)-s}{s^2}ds$$

右辺の積分値は負の定数である．

一方命題Ⅴより

$$\int_{(1-\varepsilon)x}^x\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt$$
$$=\int_1^x\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt-\int_1^{(1-\varepsilon)x}\frac{\theta(t)-t}{t^2}dt$$
$$\to 0\ (x\to\infty)$$

なので，同様に矛盾である．

以上より命題Ⅵが示された.

素数定理の証明

> 素数定理
>
> $$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \text{である.}$$

最後に得られた命題Ⅵから素数定理を導く.
(証明)

$$\theta(x) = \sum_{p \le x} \log p \le \sum_{p \le x} \log x = \pi(x) \log x$$

となるので，両辺をxで割り，xの極限を考えると命題Ⅵより，

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} \ge \frac{\theta(x)}{x} \to 1 \ (x \to \infty)$$

となって下から抑えることができる．次に逆向きの不等式を作る.

任意の$\varepsilon > 0$をとり，$x^{1-\varepsilon} < p \le x$を満たす素数$p$について考える．このとき，

$$\theta(x) = \sum_{p \le x} \log p \ge \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \le x} \log p$$

$$\log p > \log x^{1-\varepsilon}$$

が成り立つ．またそのようなpの個数は，
$\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})$個となる．これらより，

$$\begin{aligned}\theta(x) &\ge \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \le x} \log p > \left(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})\right) \log x^{1-\varepsilon} \\ &= \left(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})\right)(1-\varepsilon)\log x\end{aligned}$$

両辺を$(1-\varepsilon)x$で割って移項すると，

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} \le \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})\log x}{x}$$

ここで$\pi(x^{1-\varepsilon}) \le x^{1-\varepsilon}$なので，

$$\begin{aligned}\frac{\pi(x^{1-\varepsilon})\log x}{x} &\le \frac{\log x}{x^{\varepsilon}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\log x^{\varepsilon}}{x^{\varepsilon}} \\ &\to 0 \ (x \to \infty)\end{aligned}$$

また命題Ⅵより$\dfrac{\theta(x)}{x} \to 1 \ (x \to \infty)$なので，

$$\begin{aligned}\frac{\pi(x^{1-\varepsilon})\log x}{x} &\le \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\pi(x^{1-\varepsilon})\log x}{x} \\ &\to \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot 1 + 0 \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon} \ (x \to \infty)\end{aligned}$$

となる．εは任意に小さくできるのでこれと
$\dfrac{\pi(x)\log x}{x} \ge \dfrac{\theta(x)}{x} \to 1 \ (x \to \infty)$を合わせると，

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} \to 1 \ (x \to \infty)$$

つまり素数定理を得ることができた.

謝辞

素数定理を学ぶ上で京都大学大学院理学研究科，並河良典教授から丁寧なご指導を賜りました. ここに感謝の意を表します.

参考文献

1. Zagier，D. Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem. Amer. Math. Monthly. 104: 705–708. (1997).
2. 吉田信夫．複素解析の神秘性～複素数で素数定理を証明しよう！～．現代数学社，京都. (2011)
3. 高木貞治．定本 解析概論．岩波書店，東京. (2010).

Proof of the Prime Number Theorem Using Complex Analysis

Shun Yamaguchi

Osaka Prefectural Tennoji High School

Abstract

We have proven the prime number theorem according to the article "Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem" by D. Zagier. Complex analysis plays an important roles in various parts of the proof. Here, we introduce three functions based on prime numbers. Combining six propositions with these functions, we proceed to prove the prime number theorem.

Key words: Prime numbers, Prime number theorem, Complex analysis

Correspondence Researcher:
Namikawa,Y. (namikawa@math.kyoto-u.ac.jp)
Graduate School of Science, Kyoto University