

学位論文

実測位相の力学的解析に基づく
リズム現象の縮約記述に関する理論的考察

今井 貴史

概要

本論文では、リミットサイクル振動子およびカオス振動子に対する新たな縮約理論の構築が行われ、さらにその理論の具体的応用が示されている。

リミットサイクル振動子およびカオス振動子は、リズム現象の記述において中心的な役割を果たす概念である。リズム現象、すなわち固有のリズムで同様の事象が繰り返される現象は、自然界・生体内など、さまざまなところで見られる。それらリズム現象を数理的に解析しようとするとき、自然なアプローチの一つは、リミットサイクル振動子やカオス振動子として系をモデル化したうえでモデルの振る舞いを調べる、というものである。ただ、このアプローチをとる場合、構成されるモデルが非線形かつ多自由度であることから、モデルの振る舞いを調べる段になって困難が生じる。そこで重要となるのが縮約理論である。

リミットサイクル振動子に対しては、位相という1自由度のみでダイナミクスを記述する縮約（位相記述）がすでに知られている。その縮約を経ることで、さまざまな解析的理論を導くことができる。しかし、そのような理論的有用性をもつ一方で、その縮約は「採用している位相変数の定義が実験において使いやすいものではない」という難点ももっている。この難点のために実験では理論と異なる定義の位相が用いられ、それが結果として理論と実験との食い違いをしばしば生じさせている。また、カオス振動子に対しては、カオス振動子特有の奇異かつ本質的な性質を十分に再現できる縮約記述は未だ知られていない。

本研究では、これらの状況を踏まえた新たな縮約理論の構築を行った。まず、リミットサイクル振動子の縮約においては、実験の状況に即した定義の位相を状態変数として採用し、実験への応用を想定した解析を容易にした。また、カオス振動子の縮約においては、位相記述のアイデアを用いながらも、位相以外の状態変数が位相の時間発展に与える影響を無視せず取り込んだ。このようにして縮約理論を構築したことで、従来は困難であったいくつかのことが容易に達成できるようになっている。本論文では、特に

- リミットサイクル振動子の位相感受性を計測するための方法の開発
および

- カオス振動子の同期特性が決定されるメカニズムについての考察
を行った。

本論文の構成は以下の通りである。まず第1章では、リズム現象の解析における縮約記述の必要性を述べ、縮約理論およびそれに関連する理論の現状を概説する。次に第2章で位相記述の理論的基礎についてまとめ、続いて第3章でリミットサイクル振動子の位相感受性を計測するための従来法を紹介する。本論文では随伴法・直接法・WSTA法という三つの従来法を取り上げるが、中でもWSTA法は、優れたノイズ耐性をもち、実験系などへの適用においては非常に有用であるように思われる。しかし、実は、第4章で示すように、一般的な実験設定のもとではWSTA法は正しく機能しない。それは上で述べた位相の定義の問題に起因しており、すなわちWSTA法の理論的妥当性が通常有位相記述に依拠しているためである。そこで、第4章ではさらに、計測手法の開発などにおける基礎となるであろう新たな縮約記述を導出する。また、WSTA法の問題点を解消した新たな計測手法であるMcWSTA法を提案し、新たに得られた縮約記述を用いてその妥当性を示す。McWSTA法を用いれば、ノイズの影響を受けにくい計測を一般的な実験設定のもとで実現することができる。そのことを支持する例を第5章で与える。第6章では、McWSTA法をカオス振動子に適用して得られる結果について論ずる。位相記述は本来リミットサイクル振動子を対象としたものであるが、第6章で論じられる結果は、位相記述の適用対象をカオス振動子に拡張できる可能性があることを示している。そのことを踏まえ、第7章では、カオス振動子に対する縮約理論を構築する。また、その章では、この縮

約理論を典型的なカオス振動子に適用し，カオス振動子の同期特性が決定されるメカニズムについて考察する．そして最後に，第 8 章において，本研究の成果とその意義をまとめる．

目次

第 1 章	序論	1
第 2 章	位相記述理論の基礎	5
2.1	伝統的な位相記述と位相振動子モデル	5
2.1.1	自由な振動子における位相の時間発展	5
2.1.2	摂動のある振動子における位相の時間発展	6
2.2	具体例: Stuart–Landau 振動子の位相記述	7
2.2.1	Stuart–Landau 振動子の解析解	7
2.2.2	Stuart–Landau 振動子のアイソクロン	9
2.2.3	Stuart–Landau 振動子の位相応答曲線	9
第 3 章	位相応答曲線を計測するための既存の方法	11
3.1	随伴方程式を用いる方法（随伴法）	11
3.2	パルス刺激に対する応答を用いる方法（直接法）	13
3.3	重み付きスパイクトリガー平均を用いる方法（WSTA 法）	15
第 4 章	実測位相を用いた位相記述とその応用	21
4.1	見過ごされてきた WSTA 法の問題点	21
4.2	実測位相を用いた位相記述	22
4.3	複数サイクル重み付きスパイクトリガー平均を用いる，位相応答曲線を計測するための新たな方法（McWSTA 法）	26
4.3.1	新手法の概要	26
4.3.2	新手法の妥当性に対する解析的証明	27
4.3.3	新手法を適用するうえでの注意点	32
〔付録〕		
実測位相記述の理論的妥当性についての検証		
—Stuart–Landau 振動子を例として—		33
第 5 章	実験系への McWSTA 法の適用例	37
5.1	発振回路への適用	37
5.2	ヒトの歩行への適用	37
第 6 章	カオス振動子への McWSTA 法の適用	41
6.1	カオス振動子における位相同期現象	41
6.2	大域結合 Rössler 振動子系における“位相応答曲線”の計測	42
第 7 章	カオス振動子に対して拡張された位相記述	47
7.1	MAPO モデル	47

7.2 具体例: Rössler 振動子の縮約記述	51
7.3 具体例: Lorenz 振動子の縮約記述	51
第 8 章 結論	55
謝辞	57
参考文献	59

第1章 序論

リズム現象，すなわち固有のリズムで同様の事象が繰り返される現象は，物理学，化学，生物学，生態学などさまざまな学問分野において，重要な研究対象と捉えられている [1, 21, 35, 62]. 実際，リズム現象の一例である心臓の拍動は，我々の生命維持に必要不可欠であるという重要性に加え，多様な時空間パターンを呈するダイナミクスの興味深さもあって，盛んに研究されている [17, 18]. また，神経細胞の振動的活動に関しても，それが脳における情報処理の基礎をなすと考えられていることから，やはり多くの研究が行われている [7, 60].

固有のリズムをもつそれらの系は，しばしば，ほかの振動単位や環境と相互に影響しあっている．神経細胞を例に考えれば，シナプスを介したほかの神経細胞との相互作用やイオンチャネルを介した細胞外イオン濃度との相互作用をもっている．そのような相互作用の存在する状況で生じる重要かつ興味深い現象の一つが同期現象である [34, 41, 44].

同期現象とは（広い意味では）複数の振動の間に何らかの相関が生まれる現象の総称である．それゆえ，一口に同期現象と言っても，振動数同期，位相同期，位相-振幅同期，完全同期，遅れ同期，一般化同期など，さまざまなタイプのものがある．本稿では，それらのうち特に位相同期について論ずることとする．

位相同期とは，相互作用などにより振動間で位相差が一定に保たれるようになる現象である．その例としては，呼吸と心拍との間の同期や呼吸と歩行との間の同期，神経回路網における発火タイミングの同期，などが挙げられる．位相同期は同期現象として観察され記述された最初のものであり，1665年にChristiaan Huygensが彼の父にあてた手紙の中で述べたのが初出とされている [44]. 彼は，2台の振り子時計を同じ梁につるしておくことで振り子の運動リズムがそろう，ということを発見した．そして，彼はこの現象を詳細に分析し，リズムがそろう原因は梁の運動を介した振り子同士の相互作用にあると結論づけた．Huygensの装置に関しては，文献 [4, 5] などにおいて運動方程式に基づく詳細な解析も行われており，同期発生のメカニズムがすでに解明されている．

文献 [4, 5] で示されている方程式がそうであるように，現実の振動系の詳細なモデルは一般に非線形かつ多自由度である．そのため，それらが多数集まった系の振る舞いを数理的に解析することは容易ではない．そこで，本質的でない自由度を取り除く単純化が重要になる．そのような単純化として同期の解析において広く用いられているのが，位相記述あるいは位相縮約とよばれる手法である [24, 27, 31, 61]. 位相縮約の結果，系のダイナミクスは，位相振動子モデルとよばれる1変数微分方程式によって記述されるようになる．

位相振動子モデルは，自然振動数を表す定数と摂動に対する応答特性を表す関数とからなる．後者は位相応答曲線とよばれ，系の同期特性は主にこの関数によって決定されている．したがって，位相応答曲線を求めることは，同期の解析のための重要なステップである．このことから，位相応答曲線を計測するための手法が盛んに研究されている [54].

そのような中，文献 [42] は，実験手続きの簡便さとノイズ耐性に優れた計測手法を提案した．その手法の妥当性は位相振動子モデルを用いて解析的に示され，また，神経細胞のモデルへの適用から数値的にも確認されていた．ところが，著者が自著論文 [25] で示したように，実はこの手法は一般的な実験設定のもとでは正しく機能しない．文献 [42] で与えられた理論解析

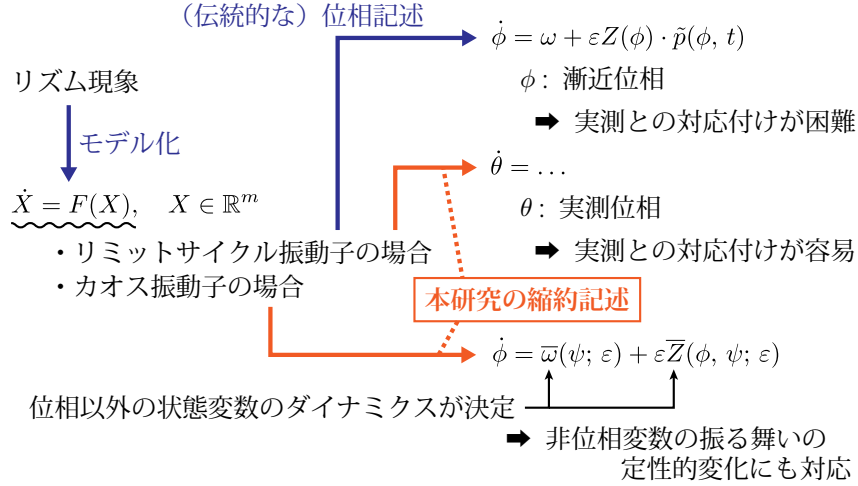


図 1.1: 本稿で論じられる縮約理論の概要.

には、実験に応用する段階で顕在化するある見落としがあったのである。

その見落としは、理論解析において位相振動子モデルを用いたことに関係している。位相縮約では状態変数として漸近位相とよばれる量を採用するが、一般に漸近位相は観測可能なものではないため、実験において位相を考える際には、通常、漸近位相とは異なる位相が用いられる。このことから、実験への応用を想定した解析を位相振動子モデルに基づいて行う際には、位相変数の違いが問題を生じないように注意する必要があるが出てくる。文献 [42] は、この点を見落とししていたのである。

漸近位相を用いている位相振動子モデルには、このように、実験への応用を想定した解析を行いつらいという難点が存在する。多少複雑な式になったとしても、実験の状況に即した定義の位相を用いる縮約記述の方が、計測手法の実際的妥当性を示したい場合などには有用であろう。しかし、そのように有用性が見込まれるにも関わらず、実験上の位相を用いた縮約記述というものはこれまでに提案されていない。

ところで、位相記述は、元来、双曲的かつ安定な周期軌道をもつ常微分方程式系（リミットサイクル振動子）を対象としていた。近年、この対象を広げようという試みがいくつか行われている。例えば、文献 [36, 37] では、偏微分方程式系である反応拡散系に対象が拡大されている。また、文献 [20, 58, 63] では、確率微分方程式系を対象とする位相記述理論が構築されている。いずれの理論も同期現象の解析に応用され、成果を上げている。

一方で、文献 [3, 28, 45] ではカオス振動子に対する位相記述理論の構築が試みられているが、カオス振動子における位相同期に特有の奇異かつ本質的な性質を十分には再現できていない。すなわち、それらの研究で導出されているモデルはそれぞれカオス振動子の異なる側面に着目したものであり、それぞれいくつかの重要な性質を再現するが、再現できていない性質は未だ多く存在する。例えば、カオス振動子においては、しばしば、非常に弱い摂動が加わっただけで位相以外の状態変数の振る舞いが定性的に変化する。そして、この非位相変数の振る舞いの定性的変化により、振動子の同期特性の劇的な変化が引き起こされる。この現象はカオス振動子に特有の興味深いものであるが、「非位相変数の振る舞いが微小摂動に対してロバストである」という仮定のもとで導出されている文献 [3, 28, 45] のモデルでは決して見ることができない。カオス振動子特有の性質をより深く理解するために、新たな縮約理論の構築が求められている。

本稿では、これらの状況を踏まえた新たな縮約理論の構築を行う (図 1.1)。まず、リミットサイクル振動子の縮約においては、実験の状況に即した定義の位相を状態変数として採用し、実

験への応用を想定した解析を容易にする．また，カオス振動子の縮約においては，非位相変数の振る舞いの定性的変化も考慮する．このようにして縮約理論を構築することで，従来の縮約記述を介しては困難であったいくつかのことが容易に達成できるようになる．本稿では，特に

- リミットサイクル振動子の位相感受性を計測するための方法の開発
および
- カオス振動子の同期特性が決定されるメカニズムについての考察
を行う．

第2章 位相記述理論の基礎

本稿で行われる考察には、伝統的な位相記述のアイデアが少なからず影響を与えている。そこで本章では、伝統的な位相記述に関する話題を、本稿の内容に深く関係するものに絞ってまとめる。

2.1 伝統的な位相記述と位相振動子モデル

本節では、伝統的な位相記述が理論上いかに導入されるかについて述べる。位相記述の導入方法としては摂動をインパルス列で近似するもの [27, 61] や Malkin の定理を用いるもの [24] も知られているが、後の章とのつながりを考え、ここでは文献 [31] のアプローチを採用する。

2.1.1 自由な振動子における位相の時間発展

位相縮約を適用するためには、まず、位相という変数を系に導入する。この導入は、第一に周期軌道上において位相を定義し、第二にその位相を周期軌道近傍に拡張する、という二つの段階からなる。

いま、連続時間の力学系

$$\left. \frac{dX(t)}{dt} \right|_t = F(X(t)), \quad X \in \mathbb{R}^m, \quad (2.1)$$

が周期解 $X_p(t)$ をもつとしよう。この周期解の周期を T とおくと、次の等式によって、周期軌道

$$\Gamma := X_p([0, T)) = \{X_p(t) \mid 0 \leq t < T\}$$

上に関数 ϕ を定義することができる:

$$\phi(X_p(t)) := \frac{2\pi}{T}t \quad \text{for } t \in [0, T). \quad (2.2)$$

この関数 ϕ を周期軌道 Γ 上の位相とよぶ。

ここでさらに、周期軌道 Γ は双曲的かつ安定で、 Γ の近傍 U に初期値をとる任意の解 $X(t)$ が Γ に指数関数的に漸近するとしよう。このとき、解 $X(t)$ に対してある時刻 $t_0 \in [0, T)$ が存在し、次の条件を満たす [9]:

$$d(X(t), X_p(t+t_0)) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

ただし d は相空間上の距離である。そこで、点 $X(0)$ の位相 $\phi(X(0))$ とは点 $X_p(t_0)$ の位相 $\phi(X_p(t_0))$ を指すものとする。すなわち、

$$\phi(X(0)) := \phi(X_p(t_0)). \quad (2.4)$$

すると、 U の各点に対して定義された位相 ϕ が得られる。この位相を特に漸近位相とよぶ。以降、紛れの生じない範囲では、漸近位相のことを単に位相ともよぶことにする。なお、任意の位相 ϕ_0 に対して、その位相をもつ点の集合 $\{X \in \mathbb{R}^m \mid \phi(X) = \phi_0\}$ は相空間上で周期軌道 Γ を横断する曲面となることが知られている [22]。その曲面を等位相面あるいはアイソクロンとよぶ。

方程式 (2.1) は自励系であるので、時刻 s における状態 $X(s)$ を初期値とした新たな解 $X = \xi(t)$ を考えれば、

$$\xi(t) = X(t + s)$$

となる。条件 (2.3) が

$$d(X(t + s), X_p(t + s + t_0)) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

と書きなおせることから、この解 $\xi(t)$ は条件

$$d(\xi(t), X_p(t + s + t_0)) \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

を満たす。位相の定義式 (2.2), (2.4) に注意して、

$$\phi(X(s)) = \phi(\xi(0)) = \phi(X_p(s + t_0)) = \frac{2\pi}{T}(s + t_0).$$

したがって、この場合、漸近位相 ϕ の時間発展は次の式に従うことになる：

$$\left. \frac{d\phi(X(t))}{dt} \right|_t = \omega, \quad (2.5)$$

ただし $\omega := 2\pi/T$ 。加えて、式 (2.5) の左辺に連鎖律を適用すれば、 U 内の任意の点において成り立つ関係式

$$\text{grad}_X \phi(X)|_X \cdot F(X) = \omega \quad (2.6)$$

が得られる。次項で述べるように、この関係式は位相記述を導くうえで重要な役割を果たす。

2.1.2 摂動のある振動子における位相の時間発展

双曲的かつ安定な周期軌道 Γ をもつ力学系 (2.1) に摂動項 $\varepsilon p(X, t)$ が加えられ、

$$\left. \frac{dX(t)}{dt} \right|_t = F(X(t)) + \varepsilon p(X(t), t) \quad (2.7)$$

となっても、摂動強度 ε が十分に小さければ、 Γ の近くを出発した解は軌道の漸近安定性が効いている領域にとどまる。したがって、その場合、解 $X(t)$ は位相が定義されている領域 U の外には出ず、 $X(t)$ の位相 $\phi(X(t))$ は任意の時刻で意味をもつ。また、この系においては、微分の連鎖律から次の式が導かれる：

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\phi(X(t))}{dt} \right|_t &= \text{grad}_X \phi(X)|_{X=X(t)} \cdot \left. \frac{dX(t)}{dt} \right|_t \\ &= \text{grad}_X \phi(X)|_{X=X(t)} \cdot [F(X(t)) + \varepsilon p(X(t), t)] \\ &= \text{grad}_X \phi(X)|_{X=X(t)} \cdot F(X(t)) + \varepsilon \text{grad}_X \phi(X)|_{X=X(t)} \cdot p(X(t), t). \end{aligned}$$

ここで、先ほどの関係式 (2.6) を思いだそう。式 (2.6) より、上式の右辺第1項は ω に等しい。ゆえに、摂動を加えられた場合の ϕ の時間発展は、次の式に従うことになる：

$$\left. \frac{d\phi(X(t))}{dt} \right|_t = \omega + \varepsilon \operatorname{grad}_X \phi(X)|_{X=X(t)} \cdot p(X(t), t). \quad (2.8)$$

さて、位相縮約の目標は、系のダイナミクスを位相に関して閉じた方程式により表すことである。その意味で、位相の時間発展を記述した方程式 (2.8) は未完成と言える。なぜなら、方程式 (2.8) には位相から一意に決まらない量 X が含まれているからである。そこで、周期軌道 Γ 上の点であれば位相 ϕ で一意に指定できること、および摂動強度 ε を 0 に近づけるにつれ解軌道が周期軌道のより近くに限定されたものとなることに注意し、状態 X を $\varepsilon = 0$ のまわりで展開しよう。すなわち、

$$X(t) = \tilde{X}_p(\phi(X(t))) + O(\varepsilon) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0,$$

ただし $\tilde{X}_p(\phi) := X_p(\phi/\omega)$ 。この表式を式 (2.8) の右辺第2項に代入し、さらに ε の高次項を無視すれば、位相に関して閉じた方程式を得ることができる。

もはや主要な変数は ϕ であるので、 $\phi(X(t))$ を単に $\phi(t)$ と書くことにする。上で述べた近似の結果として、方程式 (2.8) は次のように書き換えられる：

$$\left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_t = \omega + \varepsilon Z(\phi(t)) \cdot \tilde{p}(\phi(t), t), \quad (2.9)$$

ただし $\tilde{p}(\phi, t) := p(\tilde{X}_p(\phi), t)$ および

$$Z(\phi) := \operatorname{grad}_X \phi(X)|_{X=\tilde{X}_p(\phi)}. \quad (2.10)$$

式 (2.10) の関数 Z を位相応答曲線あるいは位相感受関数とよぶ。位相応答曲線を求めることができれば方程式 (2.9) により位相の時間発展が予測でき、ひいては元の振動子の状態がどのように変化するか予測できる。時間発展方程式 (2.9) を系 (2.7) に対応する位相振動子モデルとよぶ。

2.2 具体例：Stuart–Landau 振動子の位相記述

解析的に解ける非線形振動子の一つである Stuart–Landau (SL) 振動子 [31, 32, 57]

$$\frac{dA}{dt} = (1 + 2\pi i) A - (1 + i) |A|^2 A, \quad A \in \mathbb{C}, \quad (2.11)$$

について、位相振動子 (2.9) の具体的な形を導いてみよう。

2.2.1 Stuart–Landau 振動子の解析解

極座標への変換

$$r = |A|, \quad \theta = \arg A$$

により、方程式 (2.11) は

$$\frac{dr}{dt} \exp(i\theta) + ir \exp(i\theta) \frac{d\theta}{dt} = (1 + 2\pi i) r \exp(i\theta) - (1 + i) r^3 \exp(i\theta)$$

へと書き換えられる．この式の両辺から $\exp(i\theta)$ を落としたうえで実部・虚部それぞれの方程式に分解すれば、

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad (2.12a)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi - r^2. \quad (2.12b)$$

ここでまず、動径に関する方程式 (2.12a) に注目しよう．方程式 (2.12a) は変数分離型であるから、ひとまず解 $r(t)$ が 0 でも 1 でもない範囲で考え、

$$\frac{1}{r(1-r)(1+r)} \cdot \frac{dr}{dt} = 1,$$

ひいては部分分数分解により

$$\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{1+r} \right) \right] \frac{dr}{dt} = 1$$

へと変形させる．そして、この式の左辺が

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{1+r} \right) \right] \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \log |r| - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \log |1-r| + \frac{d}{dt} \log |1+r| \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \log \left| \frac{r^2}{1-r^2} \right| \end{aligned}$$

と計算できることを用いて、さらに

$$\frac{d}{dt} \log \left| \frac{r^2}{1-r^2} \right| = 2$$

とする．この微分方程式を初期条件 $r(0) = r_0 \neq 0, 1$ のもとで積分すれば、 $0 < r_0 < 1$ の場合でも $1 < r_0$ の場合でも

$$r^2(t) = \frac{r_0^2 \exp(2t)}{r_0^2 \exp(2t) + (1 - r_0^2)}. \quad (2.13)$$

得られた解は、上で除いた $r_0 = 0, 1$ つまり $r(t) \equiv 0$ もしくは $r(t) \equiv 1$ の場合も含んだものとなっている．また、 $r_0 \neq 0, 1$ なら $t \geq 0$ でつねに $r(t) \neq 0, 1$ なので、最初に置いた仮定を絶えず破らず、 $t \geq 0$ なる任意の時刻 t で妥当なものとなっている．

次に、式 (2.13) を偏角に関する方程式 (2.12b) に代入した

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi - \frac{r_0^2 \exp(2t)}{r_0^2 \exp(2t) + (1 - r_0^2)}$$

に注目しよう．これは直接積分すれば解くことができ、初期条件 $\theta(0) = \theta_0$ のもとで積分すれば、解

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + 2\pi t - \frac{1}{2} \log \left| r_0^2 \exp(2t) + (1 - r_0^2) \right| \\ &= (2\pi - 1)t + \theta_0 - \log r_0 - \frac{1}{2} \log \left| 1 + (r_0^{-2} - 1) \exp(-2t) \right| \end{aligned} \quad (2.14)$$

が得られる．

式 (2.13), (2.14) を基に $t \rightarrow \infty$ での $r(t)$, $\theta(t)$ の挙動を考えると、

$$r(t) \rightarrow 1, \quad \theta(t) \simeq (2\pi - 1)t + \theta_0 - \log r_0. \quad (2.15)$$

結局、初期値 r_0, θ_0 によらず、解は複素平面上を原点まわりに回転しながら安定周期軌道 $|A| = 1$ に漸近する．そして、安定周期軌道 $|A| = 1$ 上では、一定の角速度 $2\pi - 1$ で回転することになる．

2.2.2 Stuart–Landau 振動子のアイソクロン

安定周期軌道 $|A| = 1$ 上の点 A_{p0} と同じ位相をもつ点の集合、すなわちアイソクロン $\phi = \phi(A_{p0})$ を求めよう。複素平面上の点 A_0 の位相が $\phi(A_{p0})$ であるとは、点 A_0 から出発した解 $A(t)$ に対して点 A_{p0} から出発した解

$$A_p(t; A_{p0}) = \exp[i((2\pi - 1)t + \arg(A_{p0}))] \quad (2.16)$$

が条件 (2.3) を満たすことを言うのであった。したがって、極限 $t \rightarrow \infty$ での解の挙動 (2.15) と式 (2.16) とを照らし合わせることで、複素平面上の点 A_0 の位相が $\phi(A_{p0})$ であるとは関係式

$$\arg(A_0) - \log |A_0| = \arg(A_{p0})$$

が成り立つことと同値であると判明する。ゆえに、位相 $\phi(A_{p0})$ のアイソクロンは次の極方程式によって表されることになる：

$$\arg(A) - \log |A| = \arg(A_{p0}). \quad (2.17)$$

これをプロットしたものが図 2.1(a) である。

2.2.3 Stuart–Landau 振動子の位相応答曲線

以降の議論を簡単にするため、安定周期軌道 $|A| = 1$ 上の点の位相はその点の偏角に等しいとする。なお、周期軌道上での位相は条件 (2.2) を満たさなければならないわけだが、周期解 (2.16) が周期軌道上を一定の角速度で回転することから、偏角による位相の定義は確かにこの要件を満たしている。

さて、SL 振動子に関しては、周期軌道近傍に拡張された位相 ϕ が明示的に表され、定義 (2.10) から直接的に位相応答曲線 Z が求まる。まず、アイソクロンの極方程式 (2.17) において

$$\phi(A) = \phi(A_{p0}) = \arg(A_{p0})$$

であることに注意し、

$$\phi(A) = \arg(A) - \log |A|. \quad (2.18)$$

そして、複素数 A の実部を x 、虚部を y とすれば、特に実入力に対する位相応答 $Z_{\text{real}}(\phi)$ を、いま求めた位相 ϕ の表示から定義通り次のように計算することができる：

$$\begin{aligned} Z_{\text{real}}(\phi) &= \left. \frac{\partial}{\partial x} \phi(x + iy) \right|_{x+iy=\exp(i\phi)} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\text{atan2}(y, x) - \log \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right|_{\substack{x=\cos \phi \\ y=\sin \phi}} \\ &= -\sin \phi - \cos \phi \\ &= \sqrt{2} \cos \left(\phi + \frac{3}{4}\pi \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

ただし関数 atan2 は 2 変数逆正接関数であり、 $\text{atan2}(y, x)$ は $x + iy$ の偏角に等しい。式 (2.19) をプロットしたものが図 2.1(b) である。

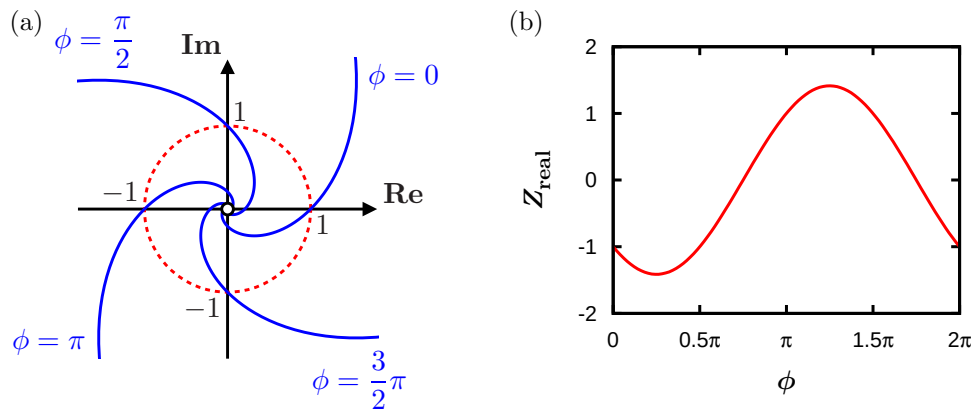


図 2.1: SL 振動子 (2.11) の位相特性. (a) アイソクロン (2.17). 赤色破線は安定周期軌道であり, 青色実線がアイソクロンである. SL 振動子ではアイソクロンが原点に関して回転対称となることを踏まえ, 四つの位相に対するアイソクロンのみを代表として描いた. (b) 位相応答曲線 (2.19).

第3章 位相応答曲線を計測するための既存の方法

第2章では、位相記述の具体例として Stuart–Landau 振動子に対応する位相振動子モデルを導出した。Stuart–Landau 振動子の場合、任意の初期値に対する解が初等的に表現でき、それゆえ位相振動子モデルを解析的に求めることができた。しかしながら、ほとんどの非線形振動子においては解が初等的に表現できず、対応する位相振動子モデルを解析的に導出することは不可能あるいは非常に困難である。そこで、本章では、(伝統的な位相記述の対象である) 双曲的かつ安定な周期軌道をもつ力学系に対して位相振動子モデルを同定する、すなわち位相応答曲線を計測するためのより一般的な方法について述べる。

なお、本論文では、双曲的かつ安定な周期軌道をもつ力学系の周期軌道まわりでの運動を考察するとき、その系をリミットサイクル振動子とよぶことにする。

3.1 随伴方程式を用いる方法 (随伴法)

以下で示すように、位相応答曲線 Z は方程式

$$\left. \frac{dZ(\omega t)}{dt} \right|_t = -DF^\top(X_p(t))Z(\omega t) \quad (3.1)$$

を満たす [6, 14, 24]。ここで DF はベクトル場 F の Jacobi 行列 $\partial F / \partial X$ である。また、行列 M に対して $M^\top$ は M の転置行列を表すものとする。系の時間発展方程式が既知の場合、方程式 (3.1) を数値的に解くことにより、位相応答曲線を精度よく求めることができる [12]。この方法を随伴法とよぶ。

位相応答曲線 Z が方程式 (3.1) を満たすことを示そう。力学系 (2.1) の周期解 $X_p(t)$ に対し、 $X_p(t)$ から微小量 ΔX_0 だけずれた初期状態 $X(0) = X_p(0) + \Delta X_0$ をもつ解 $X(t)$ に注目する。解 $X(t)$ と周期解 $X_p(t)$ とのずれ $\Delta X(t) := X(t) - X_p(t)$ の時間発展方程式は、式 (2.1) に表式

$$X(t) = X_p(t) + \Delta X(t), \quad \Delta X(0) = \Delta X_0 \quad (3.2)$$

を代入して整理すれば、

$$\left. \frac{d}{dt} \Delta X(t) \right|_t = DF(X_p(t))\Delta X(t) + O(\|\Delta X_0\|^2) \quad (3.3)$$

と書き表せる。また、同じく表式 (3.2) から、2 状態 $X(t)$, $X_p(t)$ の間の位相のずれ $\Delta\phi(t)$ は

$$\begin{aligned} \Delta\phi(t) &\equiv \phi(X(t)) - \phi(X_p(t)) \\ &= \text{grad}_X \phi(X)|_{X=X_p(t)} \cdot \Delta X(t) + O(\|\Delta X_0\|^2) \\ &= Z(\omega t) \cdot \Delta X(t) + O(\|\Delta X_0\|^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

と書き表せる．ところで，いまは無摂動の力学系 (2.1) を考えているので，位相のずれ $\Delta\phi(t)$ は時間的に変化しない．そのため，式 (3.4) を時間で微分すれば 0 となるはずであり，特に $\|\Delta X_0\|$ に関して線形オーダーの項に着目すれば次の関係式が得られる：

$$\left. \frac{dZ(\omega t)}{dt} \right|_t \cdot \Delta X(t) + Z(\omega t) \cdot \left. \frac{d}{dt} \Delta X(t) \right|_t = 0.$$

ここに式 (3.3) を代入すれば，

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{dZ(\omega t)}{dt} \right|_t \cdot \Delta X(t) + Z(\omega t) \cdot [DF(X_p(t)) \Delta X(t)] \\ &= \left. \frac{dZ(\omega t)}{dt} \right|_t \cdot \Delta X(t) + [DF^\top(X_p(t)) Z(\omega t)] \cdot \Delta X(t) \\ &= \left[\left. \frac{dZ(\omega t)}{dt} \right|_t + DF^\top(X_p(t)) Z(\omega t) \right] \cdot \Delta X(t). \end{aligned}$$

この等式は任意の初期摂動 ΔX_0 に対して（したがって任意の $\Delta X(t)$ に対して）成り立つので，

$$\left. \frac{dZ(\omega t)}{dt} \right|_t + DF^\top(X_p(t)) Z(\omega t) = 0.$$

ここから直ちに方程式 (3.1) が得られる．

なお，方程式 (3.1) を解く際には，二つの点に注意を要する．まず一つ目は，方程式 (3.1) の周期解が不安定であるという点である．周期軌道 Γ として双曲的かつ安定なものを考えているので，線形化方程式

$$\left. \frac{d}{dt} \Delta X(t) \right|_t = DF(X_p(t)) \Delta X(t)$$

の Floquet 乗数は周期軌道に沿った方向に対応する乗数 1 を除けば^{†1} すべて絶対値が 1 未満であり，そのため方程式 (3.1) の Floquet 乗数は 1 個ある 1 を除けばすべて絶対値が 1 より大きい．したがって，周期解に収束させるためには，方程式 (3.1) を時間逆方向に積分する必要がある．二つ目は，方程式 (3.1) の周期解には振幅（Floquet 乗数 1 に対応する方向の成分）の任意性があるという点である．実際，方程式 (3.1) の解の一つに対してそれを定数倍したのも方程式 (3.1) の解となっている．つまり，数値積分で得られた周期解は周期解の一つに過ぎず，一般には位相応答曲線に一致していない．位相応答曲線に一致させるためには適当にリスケールする必要がある．そこで，条件 (2.6) を思いだそう．条件 (2.6) および位相応答曲線の定義 (2.10) から，位相応答曲線 Z の満たすべき次の関係式が得られる：

$$Z(0) \cdot F(X_p(0)) = \omega.$$

この関係を満たすように方程式 (3.1) の解をリスケールすれば，解を位相応答曲線に一致させることができる．

SL 振動子に対して随伴法を適用した結果が図 3.1 である．位相応答曲線を正しく計測できていることが確認できる．

^{†1}以降，特に断らない限り，この方向に対応する Floquet 乗数は無視する．

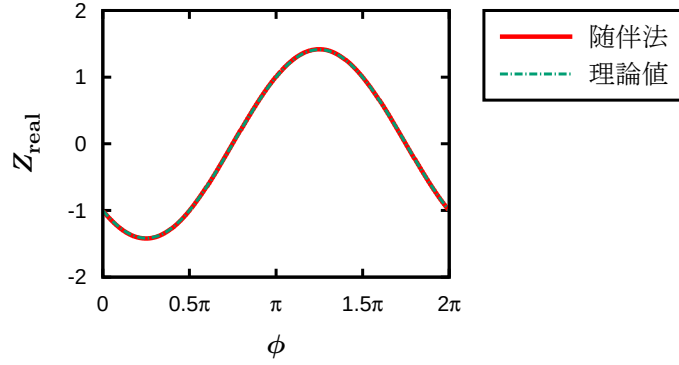


図 3.1: SL 振動子 (2.11) に対して随伴法を適用した結果. 赤色実線が随伴法を用いて求めた位相応答曲線であり, 緑色鎖線は理論曲線 (2.19) である. 随伴法により位相応答曲線を正しく計測できていることが確認できる.

3.2 パルス刺激に対する応答を用いる方法 (直接法)

系の時間発展方程式が既知であれば随伴法により位相応答曲線を求めることができる. しかしながら, 現実の自然現象・生命現象を対象とする場合, 一般には時間発展方程式は未知のものである. したがって, 随伴法によって位相応答曲線を求めるためには, まず対象をモデル化し, 時間発展方程式を構成する必要がある. ただ, モデル化を介するこのようなアプローチをとる場合, 得られた位相振動子モデルがモデル化誤差によって元の系と定性的に異なる挙動を呈するおそれがある. そのため, 元の系の特性を正確に反映した位相振動子モデルを同定することに主眼を置くのであれば, 多くの場合, 元の系から直接的に位相応答曲線を計測することのできる手法の方が有用である.

直接的に位相応答曲線を計測するための手法としては, 直接法とよばれる手法が伝統的によく使われてきた. 直接法の妥当性について理解するために, 位相応答曲線の直観的意味についての考察から始めよう. いま, 系に対して短時間の刺激すなわちパルス刺激が加わったとする. この刺激が微弱であったとすると, 位相 ϕ の時間発展は位相振動子モデル (2.9) で記述される. パルス刺激の印加時刻を t_{inj} としてパルス刺激を Dirac のデルタ関数 $\varepsilon\delta(t - t_{\text{inj}})$ で近似すれば,

$$\left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_t = \omega + \varepsilon Z(\phi(t)) \cdot \delta(t - t_{\text{inj}}).$$

さらに, この微分方程式を $t_1 < t_{\text{inj}} < t_2$ なる区間 $[t_1, t_2]$ で積分すれば,

$$\phi(t_2) - \phi(t_1) = \omega(t_2 - t_1) + \varepsilon Z(\phi(t_{\text{inj}})),$$

すなわち

$$Z(\phi(t_{\text{inj}})) = \frac{\Delta\phi}{\varepsilon} \quad (3.5)$$

となる. ただし, $\Delta\phi$ は

$$\Delta\phi := [\phi(t_2) - \phi(t_1)] - \omega(t_2 - t_1)$$

と定義され, パルス刺激により生じた位相のずれを表している. 要するに, 位相応答曲線の値 $Z(\phi)$ は, 微小強度のパルス刺激が位相 ϕ のタイミングで印加されることにより単位強度あたりどれだけ位相が進むか, を表しているのである.

式 (3.5) が示すように、位相のずれ $\Delta\phi$ を計測することができれば位相応答曲線の値が求められる。もっとも、一般には位相のずれ $\Delta\phi$ は観測可能な量ではない。そこで、摂動がなければ 1 周期に一度かつ周期的に発生する適当なイベント（例えば、周期発火状態の神経細胞における発火）に着目し、その発生間隔から $\Delta\phi$ を見積もることを考える。イベントの発生間隔とは、力学系の視点に立てば、周期軌道に対して設定した Poincaré 断面への再帰時間に相当する。1 周期の区切りとして用いられるこのような Poincaré 断面をセパレータとよぶことにし、また、解がセパレータを通過してから再びセパレータに戻るまでをサイクルとよぶことにしよう。セパレータは一般にはアイソクロンと一致せず、したがって、1 サイクルでの位相の増分は一般には 2π ではない。摂動がなく解 $X(t)$ が周期軌道 Γ 上を動く場合には 1 サイクルでの位相の増分は 2π となるが、摂動が加わり $X(t)$ が Γ の外に出た場合には 1 サイクルでの位相の増分は 2π からずれる。仮に 1 サイクルでの位相の増分が正確に 2π となったとすると、セパレータへの再帰時間 T' と位相のずれ $\Delta\phi$ および自然周期 T との間に

$$\omega T' + \Delta\phi = 2\pi$$

なる関係が成り立ち、位相のずれ $\Delta\phi$ を

$$\Delta\phi = 2\pi - \omega T' = 2\pi \frac{T - T'}{T} \quad (3.6)$$

と見積もることができる。しかし、1 サイクルでの位相の増分が 2π から η だけずれたならば、

$$\omega T' + \Delta\phi = 2\pi + \eta$$

から

$$\Delta\phi = 2\pi - \omega T' + \eta = 2\pi \frac{T - T'}{T} + \eta$$

となり、式 (3.6) で $\Delta\phi$ を見積もると η の計測誤差が乗ることになる。

ここで、偏差 η を小さくするための方策について考えよう。偏差 η は解 $X(t)$ と周期軌道 Γ とのずれに起因しており、このずれが小さくなれば η も小さくなる。そこで、パルス刺激を印加した後、十分なサイクル数 n_{wait} だけ自由に振動させて周期軌道への緩和を待ち、それから位相のずれを見積もることにする [8, 40]。すなわち、パルス刺激を加える直前のセパレータへの復帰とそれから $1 + n_{\text{wait}}$ 回目の復帰との間の時間 $\mathfrak{T}'$ を上記の T' の代わりに用い、また、 $\mathfrak{T} := (1 + n_{\text{wait}})T$ とおいて、位相のずれ $\Delta\phi$ を

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}'}{T} \quad (3.7)$$

と見積もるのである。このとき、周期軌道 Γ の Floquet 乗数のうちで絶対値が最大のものを λ_{max} とおくと、偏差 η は

$$\eta = O(|\lambda_{\text{max}}|^{n_{\text{wait}}})$$

となる。周期軌道 Γ の双曲性および安定性より $|\lambda_{\text{max}}| < 1$ であるから、緩和待ちサイクル数 n_{wait} を増やしていけば偏差 η を指数関数的に 0 に近づけられることを上式は示している。したがって、いま、緩和待ちサイクル数 n_{wait} として十分大きな値を採用すれば、式 (3.7) で見積もられる位相のずれ $\Delta\phi$ はほぼ正確な値であると判断してよいだろう。すると、式 (3.7) を式 (3.5) に代入して、パルス刺激の印加時刻 t_{inj} における位相応答曲線の値 $Z(\phi(t_{\text{inj}}))$ は、結局、

$$Z(\phi(t_{\text{inj}})) = \frac{2\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}'}{T}$$

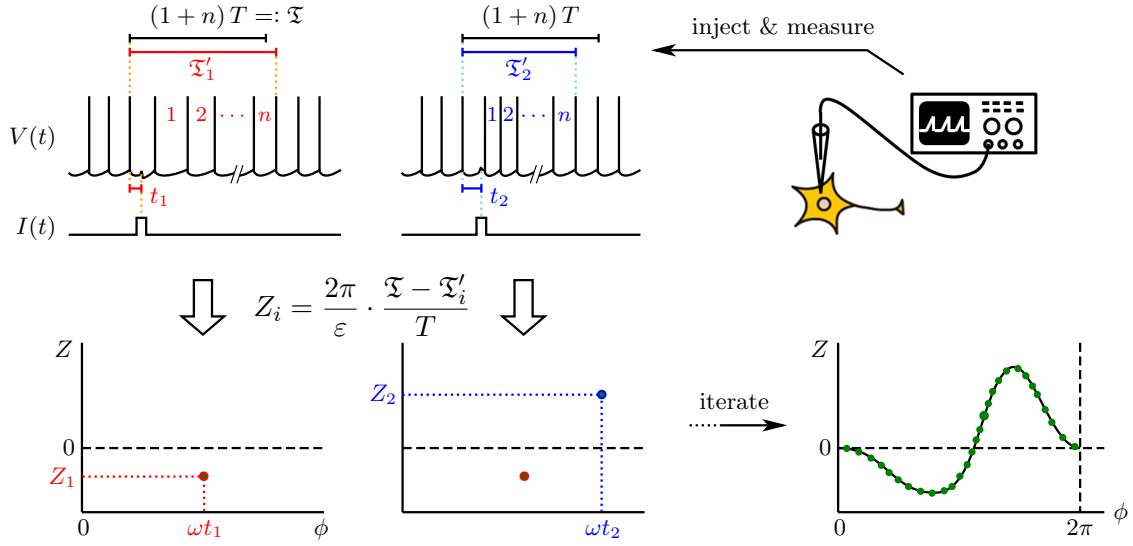


図 3.2: 直接法の手続き。周期発火する神経細胞への適用を例に描いた。なお、 V, I はそれぞれ膜電位と印加電流を表している。

と見積もられる。左辺の $\phi(t_{\text{inj}})$ については、周期軌道とセパレータとの交点に位相の零点を置き、さらにパルス刺激を加える直前のセパレータへの復帰の時刻を t_0 とすれば、

$$\phi(t_{\text{inj}}) = \omega(t_{\text{inj}} - t_0).$$

ゆえに、1 回の計測により位相応答曲線の 1 点における値が

$$Z(\omega(t_{\text{inj}} - t_0)) = \frac{2\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}'}{T} \quad (3.8)$$

と得られることになる。この計測を印加タイミングを変えて繰り返していけば、位相応答曲線 Z の全形を求めることができる。位相応答曲線の直観的意味から直ちに導かれる方法という意味で、この手法は直接法とよばれている。直接法の手続きを図 3.2 にまとめる。

SL 振動子に対して直接法を適用した結果が図 3.3 である。位相応答曲線を正しく計測できていることが確認できる。

3.3 重み付きスパイクトリガー平均を用いる方法 (WSTA 法)

直接法を用いれば、原理上は元の系から直接的に位相応答曲線を計測することができる。しかしながら、直接法には、背景ノイズの無視できない実験系などに適用すると計測値が大きくなりすぎてしまう、という欠点が存在する。実際、神経細胞に対して直接法を適用した文献 [50] の結果では、計測値が大きくなりすぎてしまっている。

直接法がノイズ耐性をもたない原因は、それが単発の刺激を用いていることにある。位相記述が妥当化されるためには印加する刺激は弱くなければならないが、その弱い刺激を単発で加えただけではセパレータへの復帰時間はほとんど変化せず、ノイズによる復帰時間の揺らぎの中に埋もれてしまう。そうすると、刺激による位相変化が正確に見積もれず、式 (3.8) では位相応答曲線が求められなくなってしまうのである。

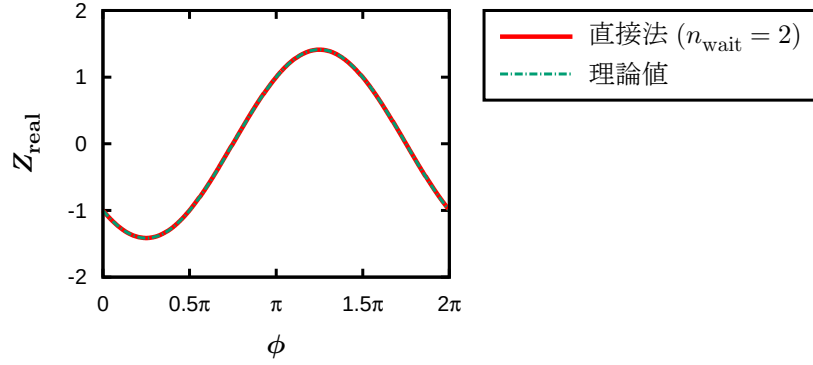


図 3.3: SL 振動子 (2.11) に対して直接法を適用した結果. 赤色実線が直接法を用いて求めた位相応答曲線であり, 緑色鎖線は理論曲線 (2.19) である. セパレータには $\text{Re } A > 0$, $\text{Im } A = 0$, すなわち実軸の正の部分を採用した. また, 緩和待ちサイクル数 n_{wait} は 2 とした. 直接法により位相応答曲線を正しく計測できていることが確認できる.

このことは, 裏を返せば, 計測手法にノイズ耐性をもたせるためには連続的な刺激を用いればよいということを示唆している. 連続的な刺激を用いた場合, たとえそれが各瞬間では位相記述が妥当化される程度に弱くとも, 1 サイクルで積算された結果, セパレータへの復帰時間には大きな影響が出る. そうなれば, ノイズの影響は相対的に小さくなり, 比較的正確な計測値が得られるであろう.

連続的な刺激を用いる計測手法としてよく知られているのは, 文献 [13] で提案された手法である. その手法では系に揺らぎ刺激 (連続的かつ相関時間の短い刺激) を印加し, 入力波形のスパイクトリガー平均とよばれる統計量から位相応答曲線を見積もる. この手法は, 文献 [13] で提案された後, 文献 [42] において改良を施され, より少ないサンプルでばらつきの少ない計測結果を得られる, より効率的な計測手法へと発展した. 文献 [42] の手法は次のようなものである.

- 1) 平均 0 かつ弱い揺らぎ刺激を系に対して加えながら, セパレータへの復帰時間間隔 $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ と 1 サイクルごとの入力刺激 $\{I_i([0, \tau_i])\}_{i \in \mathbb{N}}$ とを記録する.
- 2) 記録された各入力波形 $I_i(t)$ を伸縮し, 長さを自然周期 T にそろえた波形

$$\tilde{I}_i(t) = I_i\left(\frac{\tau_i}{T}t\right) \quad \text{for } t \in [0, T]$$

を生成する.

- 3) 長さをそろえた入力波形 $\{\tilde{I}_i([0, T])\}_{i \in \mathbb{N}}$ の重み付きスパイクトリガー平均 (Weighted Spike-Triggered Average: WSTA)

$$W(t) = \left\langle \frac{T - \tau_i}{T} \tilde{I}_i(t) \right\rangle \quad \text{for } t \in [0, T] \quad (3.9)$$

を計算し, 位相応答曲線を

$$Z(\phi) = \frac{2\pi}{\mu^2} W\left(\frac{T}{2\pi}\phi\right) \quad \text{for } \phi \in (0, 2\pi) \quad (3.10)$$

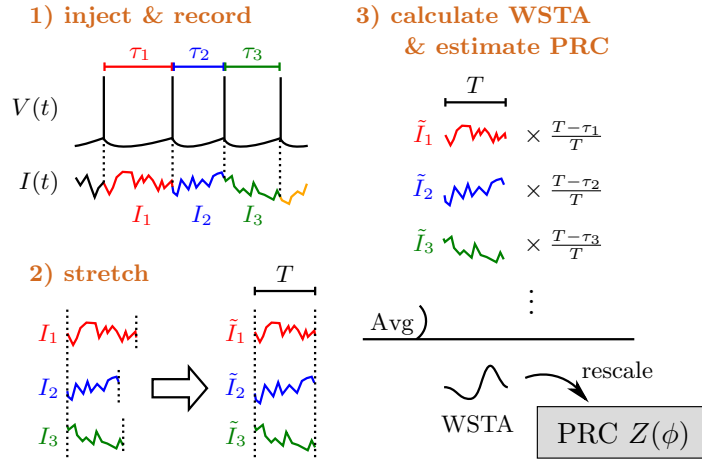


図 3.4: WSTA 法の手続き。周期発火する神経細胞への適用を例に描いた。なお、 V, I はそれぞれ膜電位と印加電流を表している。

と見積もる。ここで、 μ は入力刺激の強度（ここでは、刺激の自己相関関数が Dirac のデルタ関数 $\mu^2 \delta(t)$ で近似できるとしたときの μ 、すなわち自己相関関数を時間積分した値の平方根）である。また、 $\langle \cdot \rangle$ は添字 i についての平均を表す。

この手法は WSTA 法とよばれている。WSTA 法の手続きを図 3.4 にまとめる。

文献 [42] に倣い、Hodgkin–Huxley (HH) モデル [23]

$$C \frac{dV}{dt} = -g_{\text{Na}} m^3 h (V - V_{\text{Na}}) - g_{\text{K}} n^4 (V - V_{\text{K}}) - g_{\text{l}} (V - V_{\text{l}}) + I, \quad (3.11a)$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_{\text{m}}(V) (1 - m) - \beta_{\text{m}}(V) m, \quad (3.11b)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_{\text{h}}(V) (1 - h) - \beta_{\text{h}}(V) h, \quad (3.11c)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_{\text{n}}(V) (1 - n) - \beta_{\text{n}}(V) n \quad (3.11d)$$

に対して WSTA 法を適用してみよう。（SL 振動子への適用は次章で行う。）キャパシタンスを $C = 1$ 、コンダクタンスを $g_{\text{Na}} = 120$ 、 $g_{\text{K}} = 36$ 、 $g_{\text{l}} = 0.3$ 、ゲート開閉の速度定数を

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{m}}(V) &= \frac{0.1 (V + 40)}{1 - \exp[(-V - 40)/10]}, & \beta_{\text{m}}(V) &= 4 \exp[(-V - 65)/18], \\ \alpha_{\text{h}}(V) &= 0.07 \exp[(-V - 65)/20], & \beta_{\text{h}}(V) &= \frac{1}{1 + \exp[(-V - 35)/10]}, \\ \alpha_{\text{n}}(V) &= \frac{0.01 (V + 55)}{1 - \exp[(-V - 55)/10]}, & \beta_{\text{n}}(V) &= 0.125 \exp[(-V - 65)/80] \end{aligned}$$

とし、バイアス電流 $I = 10$ を加えると、HH モデル (3.11) は周期発火を呈する。この状態で WSTA 法を適用した結果が図 3.5 である。位相応答曲線を正しく計測できていることが確認できる。なお、揺らぎ刺激は平均 0 の Ornstein–Uhlenbeck (OU) 過程

$$dI_t = -\gamma I_t dt + \sqrt{2\gamma\sigma} dW_t \quad (3.12)$$

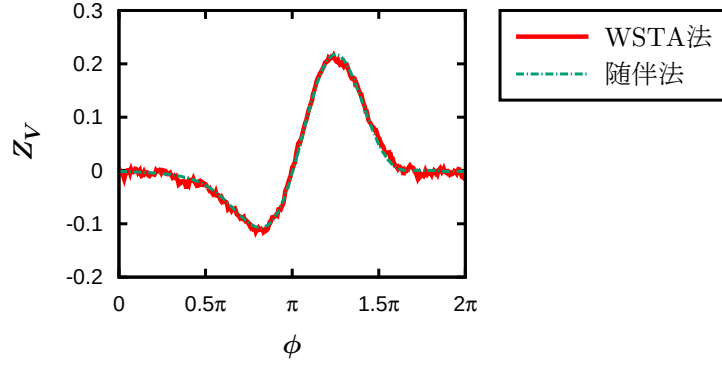


図 3.5: HH モデル (3.11) に対して WSTA 法を適用した結果. 赤色実線が WSTA 法を用いて求めた位相応答曲線である. 比較のため, 随伴法を用いて求めた位相応答曲線を緑色鎖線で示す. セパレータには $\dot{V} < 0$, $V = -74$ を採用した. これは活動電位の期間 (特に過分極期) の状態値である. また, 揺らぎ刺激の生成には $\gamma = 5$, $\sigma = 0.5$ の OU 過程 (3.12) を用い, WSTA は 10^4 個のサンプルから計算した. WSTA 法により位相応答曲線を正しく計測できていることが確認できる.

から生成した^{†2}. ここで, W_t は Wiener 過程を表す. この揺らぎ刺激 I_t の自己相関関数は $(2\sigma^2/\gamma) \times \delta(t)$ と近似できるので, 式 (3.10) 中の刺激強度 μ は $\sqrt{2/\gamma}\sigma$ と見積もった.

文献 [42] によれば, WSTA 法の手続きで位相応答曲線が計測できる理由は次のようなものである. いま, 式 (2.9) を i 番目のサイクルにわたって積分すると,

$$2\pi = \omega\tau_i + \int_0^{\tau_i} Z(\phi(s))I_i(s) ds, \quad (3.13)$$

すなわち

$$\frac{T - \tau_i}{T} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_i} Z(\phi(s))I_i(s) ds$$

なる関係式が得られる^{†3}. 式 (3.9) で定められる WSTA をこの関係式を用いて計算すれば,

$$\begin{aligned} W(t) &\equiv \left\langle \frac{T - \tau_i}{T} \tilde{I}_i(t) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\langle \int_0^{\tau_i} Z(\phi(s))I_i(s) ds \cdot \tilde{I}_i(t) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\langle \int_0^T Z(\omega s) \tilde{I}_i(s) ds \cdot \tilde{I}_i(t) \right\rangle + O(\mu^3) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T Z(\omega s) \langle \tilde{I}_i(s) \tilde{I}_i(t) \rangle ds + O(\mu^3) \\ &= \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^T Z(\omega s) C(s - t) ds + O(\mu^3), \end{aligned}$$

ただし $C(t)$ は揺らぎ刺激の (積分値が 1 になるように規格化された) 自己相関関数である. ここで, 揺らぎ刺激の相関時間が十分短く, この $C(t)$ が Dirac のデルタ関数 $\delta(t)$ で近似できる

^{†2}より正確に言うと, OU 過程 (3.12) のサンプルパスに対して一定時間間隔での標本化と 1 次ホールドを適用し, 入力刺激を構成した. 式 (2.9) は決定論的な場合の位相振動子モデルであり, 摂動として確率過程を考えることは一般にはできない [20, 58, 63] が, このようにして入力刺激を構成すれば, 決定論的なモデルで議論できる.

^{†3}実はこの部分の議論には問題があるのだが, それについては次章で述べる.

とすれば,

$$W(t) = \frac{\mu^2}{2\pi} Z(\omega t) + O(\mu^3),$$

すなわち

$$\frac{2\pi}{\mu^2} W(t) = Z\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + O(\mu) \quad (3.14)$$

となり, 微小量を無視することで直ちに WSTA 法による見積もり式 (3.10) が得られる. 以上で, WSTA 法による計測結果が位相応答曲線に理論上一致することが示された.

第4章 実測位相を用いた位相記述とその応用

第3章では、位相応答曲線を計測するための方法として随伴法、直接法、WSTA法という三つの方法を紹介した。そこで述べたように、特に

- 背景ノイズの無視できない実験系などから
- 直接的に位相応答曲線を計測する

という目標のもとでは、それらの方法のうち WSTA 法が有用と考えられる。ところが、次節で述べるように、WSTA 法にはある問題が存在し、それにより適用対象が大幅に制限される。そのような問題が生じる根本的原因是、伝統的な位相記述が、実際の状況にそぐわない漸近位相という位相変数を用いていることにある。そこで、本章では、実験の状況に即した位相を用いる新たな位相記述を導出する。そして、その位相記述を介して、上記の問題点を解消した新たな計測手法を導入する。

4.1 見過ごされてきた WSTA 法の問題点

WSTA 法が提案された文献 [42] では、WSTA 法の妥当性を検証するための数値シミュレーションに神経細胞のモデルのみが使用されていた。それゆえ、神経細胞のモデル以外に対しても WSTA 法は正しく機能するだろうか、と問うことは自然であろう。試みに、SL 振動子 (2.11) に対して WSTA 法を適用してみよう。セパレータには実軸の正の部分 (図 4.1(a)) を採用し、入力刺激は OU 過程 (3.12) から生成する。そうして WSTA 法を適用した結果が図 4.1(b) である。この場合、位相応答曲線を正しく計測できていない。

計測に失敗する理由を考えよう。手掛かりとなるのは、緩和待ちサイクル数 n_{wait} を 0 とした場合の直接法による計測結果である。図 4.2 に示されているように、 $n_{\text{wait}} = 0$ とした場合の直接法による計測結果は WSTA 法による計測結果と一致する。そもそも、緩和待ちサイクル数 n_{wait} は、セパレータとアイソクロンとが異なることにより生じる誤差を減らすために導入されたものであった。図 4.2 に見られる WSTA 法と直接法との結果の一致から、同様の誤差が WSTA 法においても生じているのではないかと推測できる。前章で WSTA 法の妥当性に関する解析的証明を与えたが、上のことを念頭に置いてこれを見返すと、式 (3.13) の導出においてセパレータとアイソクロンとの違いを暗黙のうちに無視していることが確認される。すなわち、式 (3.13) の左辺はセパレータがアイソクロンと異なるために本来 $2\pi + (\text{誤差})$ となるはずだが、その誤差を無視してしまっている。この誤差は一般には刺激強度 μ に関して線形オーダーとなり、誤差を考慮してその後の計算を進めると式 (3.14) の代わりに次の関係式が得られる：

$$\frac{2\pi}{\mu^2} W(t) = Z\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + O(1).$$

このように定数オーダーの誤差が乗ってしまうため、WSTA 法による見積もり式 (3.10) では位相応答曲線が見積もれないわけである。実際、SL 振動子 (2.11) に WSTA 法を適用する際に

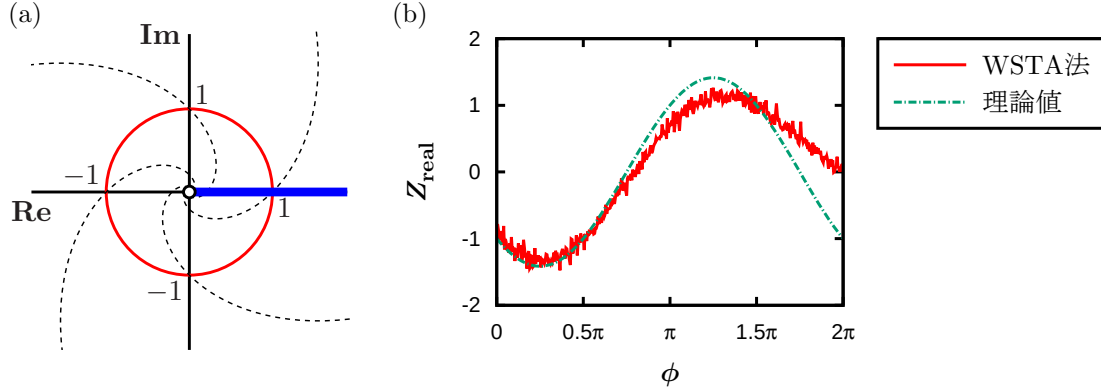


図 4.1: SL 振動子 (2.11) に対する WSTA 法の適用. (a) 計測に用いたセパレータ. 赤色実線と黒色破線はそれぞれ安定周期軌道とアイソクロンであり, 青色実線がセパレータである. ここでは $\text{Re } A > 0$, $\text{Im } A = 0$, すなわち実軸の正の部分を採用した. (b) 計測結果. 赤色実線が WSTA 法を用いて求めた位相応答曲線であり, 緑色鎖線は理論曲線 (2.19) である. 揺らぎ刺激の生成には $\gamma = 1000$, $\sigma = 0.1$ の OU 過程 (3.12) を用い, WSTA は 10^5 個のサンプルから計算した. WSTA 法では位相応答曲線を正しく計測できていない.

アイソクロンに対する接線 (図 4.3(a)) をセパレータとして採用すれば, 図 4.3(b) に示すように正しい位相応答曲線が計測できる. これは, 式 (3.13) の左辺に生じる誤差が $O(\mu^2)$ となることで, 誤差を考慮してもなお関係式 (3.14) が成立するからである.

詰まるところ, WSTA 法で位相応答曲線を正しく計測するためには, アイソクロンに接したセパレータを用いる必要がある. しかし, そのようなセパレータを構成するにも使用するにも, 一般にはすべての状態変数が観測できなければならない. 実験系への適用を考えると, そのような状況は現実的ではない. WSTA 法は, アイソクロンが都合のよい形をしていて, なおかつそのことがあらかじめ明らかになっている, という非常に特殊な状況でしか使用できないのである^{†4}.

4.2 実測位相を用いた位相記述

文献 [42] の解析の問題点は, 漸近位相によって定義されるアイソクロンを用いていることであり, 詰まるところ, 漸近位相を用いる通常の位相振動子モデルに基づいていることである. 通常の位相振動子モデルは, そもそも, 実験への応用を想定した解析を行うには不向きなのである. したがって, 実験への応用を想定した解析を行う際には, 別の縮約記述を用いるべきである. 代わりの縮約記述に求められる最低限の条件は

- 実験において計測手法が正しく機能することなどがそれに基づいて示せることであるが, それに加えて
- これまでに位相振動子モデルに関して提案されてきた解析手法が再利用できること

^{†4} 3.3 節の数値実験は実はこの状況になっておらず, 厳密に言うとも図 3.5 は正しい計測結果ではない. 誤差が非常に小さくなっているために問題が顕在化していないだけである. HH モデル (3.11) を含む多くの神経細胞のモデルでは, 活動電位の期間における状態変化は, 静止電位の期間における変化に比べると非常に速い. それゆえ, セパレータを活動電位の期間に置いた場合, セパレータとアイソクロンとの間の移動では位相がほとんど変化しない. たとえセパレータがアイソクロンに接していなかったとしても, この場合, 各サイクルでの位相の増分はほぼ 2π である. 3.3 節で採用したセパレータは, まさに活動電位の期間に置かれていた. そのため, 誤差がほとんど生じなかったのである.

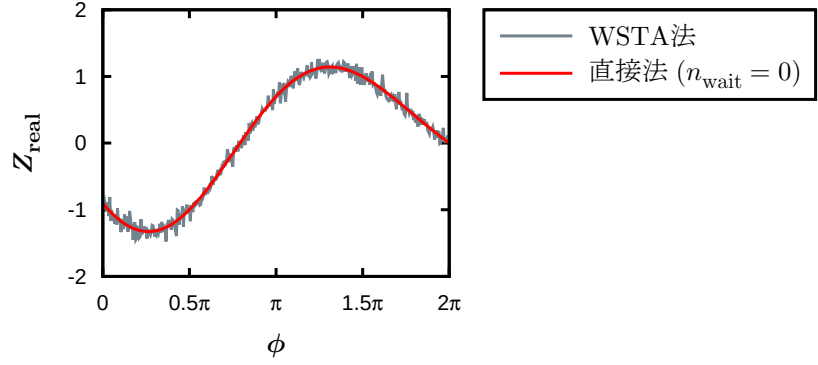


図 4.2: SL 振動子 (2.11) に対して $n_{\text{wait}} = 0$ の直接法を適用した結果. セパレータには実軸の正の部分 (図 4.1(a)) を採用した. 赤色実線が直接法を用いて求めた位相応答曲線であり, 灰色実線は WSTA 法を用いて求めた位相応答曲線 (図 4.1(b) の赤色実線) である. 周期軌道への緩和を待たないこの場合の直接法による計測結果は, WSTA 法による計測結果に一致している.

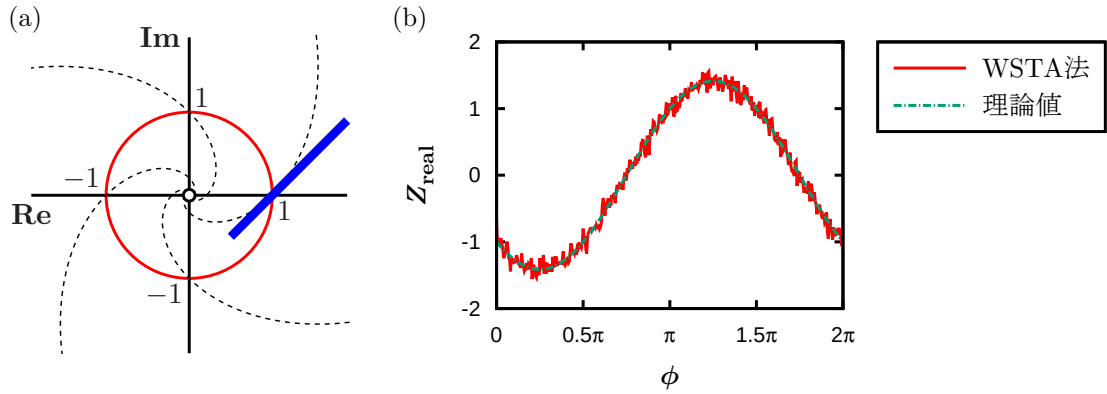


図 4.3: SL 振動子 (2.11) に対する, セパレータの取り方を工夫した WSTA 法の適用. (a) 計測に用いたセパレータ. 赤色実線と黒色破線はそれぞれ安定周期軌道とアイソクロンであり, 青色実線がセパレータである. ここでは点 $1 + 0i$ におけるアイソクロンの接線を採用した. (b) 計測結果. 赤色実線が WSTA 法を用いて求めた位相応答曲線であり, 緑色鎖線は理論曲線 (2.19) である. 揺らぎ刺激の生成には $\gamma = 1000$, $\sigma = 0.1$ の OU 過程 (3.12) を用い, WSTA は 10^5 個のサンプルから計算した. この場合, 位相応答曲線が正しく計測できている.

という条件も満たすことで、その縮約記述はより有用性の高いものとなる。そのため、代わりの縮約記述としては

- 実際状況に即した定義の位相を用いながらも
- 位相振動子モデルと似た形をもつ

ものが好適である。そのような縮約記述の導出を試みよう。

繰り返し述べているように、一般にはセパレータとアイソクロンとは異なる曲面である。アイソクロンとは異なる曲面 S をセパレータに採用するということは、以下の5条件 (4.1a)–(4.1e) を満たす滑らかな座標変換 (R, θ) を考え、それにより導入される位相 θ を漸近位相 ϕ の代わりに用いることに等しい:

$$R(X) \in \mathbb{R}^{m-1}, \quad (4.1a)$$

$$R(X) = R_0 \iff X \in \Gamma \quad (4.1b)$$

および

$$\theta(X) \in [0, 2\pi], \quad (4.1c)$$

$$\theta(X) = 0 \iff X \in S, \quad (4.1d)$$

$$\frac{d\theta(X_p(t))}{dt} = \omega. \quad (4.1e)$$

なお、区間 $[0, 2\pi]$ の端点 $0, 2\pi$ は同一視する。この θ を実測位相とよぶことにしよう。周期軌道 Γ 上では $\theta = \phi$ であるが、 Γ の外ではそうとは限らない。特に1サイクルでの位相の変化に注目すると、いくら変化するか定まっていない漸近位相 ϕ とは異なり、実測位相 θ は厳密に 0 から 2π まで増加する。

ここで、系に摂動が加わっていないときの（すなわち式 (2.1) に座標変換を施して得られる）状態変数 R, θ の時間発展方程式を

$$\frac{dR}{dt} = F_R(R, \theta), \quad (4.2a)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + \rho(R, \theta) \quad (4.2b)$$

としよう。ただし、条件 (4.1b), (4.1e) より、ベクトル場 $F_R(R, \theta)$ とスカラー場 $\rho(R, \theta)$ には次の条件が課される:

$$F_R(R_0, \theta) = 0, \quad (4.3a)$$

$$\rho(R_0, \theta) = 0. \quad (4.3b)$$

変数 R, θ を X の関数と見て式 (4.2) の左辺に連鎖律を適用すれば、関係式

$$\frac{\partial R(X)}{\partial X} F(X) = F_R(R(X), \theta(X)), \quad (4.4a)$$

$$\text{grad}_X \theta(X) \cdot F(X) = \omega + \rho(R(X), \theta(X)) \quad (4.4b)$$

が得られる。

この系に微小摂動 $\varepsilon p(X, t)$ が加わると、力学系が式 (2.7) に書き換わるのに対応して状態変数 R, θ の時間発展方程式 (4.2a), (4.2b) も書き換わる。まず R に関しては、

$$\begin{aligned} \left. \frac{dR(X(t))}{dt} \right|_t &= \left. \frac{\partial R(X)}{\partial X} \right|_{X=X(t)} (F(X(t)) + \varepsilon p(X(t), t)) \\ &= \left. \frac{\partial R(X)}{\partial X} \right|_{X=X(t)} F(X(t)) + \varepsilon \left. \frac{\partial R(X)}{\partial X} \right|_{X=X(t)} p(X(t), t) \\ &= F_R(R(X(t)), \theta(X(t))) + \varepsilon \left. \frac{\partial R(X)}{\partial X} \right|_{X=X(t)} p(X(t), t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

最後の等号は式 (4.4a) により成り立つ。次に θ に関しては、

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta(X(t))}{dt} \right|_t &= \text{grad}_X \theta(X)|_{X=X(t)} \cdot (F(X(t)) + \varepsilon p(X(t), t)) \\ &= \text{grad}_X \theta(X)|_{X=X(t)} \cdot F(X(t)) + \varepsilon \text{grad}_X \theta(X)|_{X=X(t)} \cdot p(X(t), t) \\ &= \omega + \rho(R(X(t)), \theta(X(t))) + \varepsilon \text{grad}_X \theta(X)|_{X=X(t)} \cdot p(X(t), t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

最後の等号は式 (4.4b) により成り立つ。

いま、状態変数 R について、固定点 R_0 からのずれを $\delta R(t)$ としよう。摂動強度 ε に関して高次の項を無視し、さらに条件 (4.3a), (4.3b) を使うことにより、式 (4.5), (4.6) から次の関係式が得られる：

$$\left. \frac{d}{dt} \delta R \right|_t = \left. \frac{\partial F_R}{\partial R} \right|_{\substack{R=R_0 \\ \theta=\omega t}} \delta R(t) + \varepsilon \left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{X=X_p(t)} \tilde{p}(\omega t, t), \quad (4.7a)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_t = \omega + \text{grad}_R \rho(R, \theta)|_{\substack{R=R_0 \\ \theta=\omega t}} \cdot \delta R(t) + \varepsilon \text{grad}_X \theta(X)|_{X=X_p(t)} \cdot \tilde{p}(\omega t, t), \quad (4.7b)$$

ただし、第2章同様、 $\tilde{p}(\phi, t) := p(\tilde{X}_p(\phi), t)$ とした。これらのうち特に微分方程式 (4.7a) に注目すると、これは解

$$\delta R(t) = A(t, 0) \delta R(0) + \varepsilon \int_0^t A(t, s) B(s) \tilde{p}(\omega s, s) ds \quad (4.8)$$

をもつ。ただし、 $A(t, s)$ は斉次方程式

$$\left. \frac{d}{dt} \delta R \right|_t = \left. \frac{\partial F_R}{\partial R} \right|_{\substack{R=R_0 \\ \theta=\omega t}} \delta R(t)$$

の解核行列であり、 $B(t)$ は式 (4.7a) に現れた摂動項の係数行列 $(\partial R / \partial X)|_{X=X_p(t)}$ である。周期軌道 Γ が双曲的かつ安定であることは、作用素ノルム $\|A(t, s)\|$ が任意の s に対して $t \rightarrow \infty$ で指数関数的に減衰することを表している。解 (4.8) を式 (4.7b) に代入すれば、

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_t = \omega + \alpha(t) \cdot \delta R(0) + \varepsilon \int_0^t \beta(s, t) \cdot \tilde{p}(\omega s, s) ds + \varepsilon \zeta(t) \cdot \tilde{p}(\omega t, t), \quad (4.9)$$

ただし

$$\alpha(t) := A^\top(t, 0) \text{grad}_R \rho(R, \theta)|_{\substack{R=R_0 \\ \theta=\omega t}},$$

$$\beta(s, t) := B^\top(s) A^\top(t, s) \text{grad}_R \rho(R, \theta)|_{\substack{R=R_0 \\ \theta=\omega t}},$$

$$\zeta(t) := \text{grad}_X \theta(X)|_{X=X_p(t)}.$$

式 (4.9) は実測位相 θ に関して閉じた時間発展方程式であり，位相振動子モデル (2.9) に相当する．実際状況に即した定義の位相は，位相振動子モデル (2.9) でなく，式 (4.9) に従って時間発展するのである．実験への応用を想定した解析を行う際には，式 (4.9) を基礎とすることが肝要である．

4.3 複数サイクル重み付きスパイクトリガー平均を用いる，位相応答曲線を計測するための新たな方法 (McWSTA 法)

4.1 節で述べたように，WSTA 法は「セパレータをアイソクロンに接するように選ばなければならない」という問題を抱えている．このような問題によって WSTA 法が利用できなくなるのは，WSTA 法がもつ種々の長所を考えれば，リズム現象の研究にとって大きな損失と言える．そこで，WSTA 法の手続きに修正を加えることでこの問題を解消できないか考えよう．

すぐに思いつく方策は直接法と同様の方策，すなわち，揺らぎ刺激を印加するサイクル 1 個と印加せず自由に振動させるサイクル n_{wait} 個とを 1 セットとしてこれを繰り返す，というものである．しかし，これでは WSTA 法のもっている実験手続きの簡便さが失われる．振動が非常に速い場合など，数サイクルの時間スケールで刺激のオンオフを切り替えることが難しいような状況もあるため，刺激の印加に関しては WSTA 法の手続きを踏襲することが望ましい．

こういった点を踏まえ，著者は，自著論文 [25] において，WSTA の複数サイクル化に基づく修正を施した新たな計測手法を提案した．その新手法の妥当性を支えるのが，前節で導出した新たな位相記述である．本節では，その新手法を，その後の研究成果を取り込んでさらに改良した形で述べる．

4.3.1 新手法の概要

本手法では，以下のようにして位相応答曲線を計測する．

- 1) 平均 0 かつ弱い揺らぎ刺激を系に対して加えながら，セパレータへの復帰時間間隔 $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ と 1 サイクルごとの入力刺激 $\{I_i([0, \tau_i])\}_{i \in \mathbb{N}}$ とを記録する．
- 2) 十分大きい非負整数 $n_{\text{skip}}, n_{\text{addl}}$ を， $n_{\text{skip}} \ll n_{\text{addl}}$ となるようにとる．
- 3) 記録された $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ と $\{I_i([0, \tau_i])\}_{i \in \mathbb{N}}$ とを（重複を許して） $1 + n_{\text{addl}}$ サイクルごとにまとめ，それぞれ

$$\{\tau'_i\}_{i \in \mathbb{N}}: \tau'_i = \tau_i + \tau_{i+1} + \cdots + \tau_{i+n_{\text{addl}}},$$

$$\{I'_i([0, \tau'_i])\}_{i \in \mathbb{N}}: I'_i = I_i + I_{i+1} + \cdots + I_{i+n_{\text{addl}}}$$

とする．ただし， $I_1 + I_2$ は波形 I_1, I_2 の連結を表すものとする．

- 4) 各 $I'_i(t)$ を伸縮し，長さを自然周期の $1 + n_{\text{addl}}$ 倍にそろえた波形

$$\tilde{I}'_i(t) = I'_i\left(\frac{\tau'_i}{(1 + n_{\text{addl}})T}t\right) \quad \text{for } t \in [0, (1 + n_{\text{addl}})T].$$

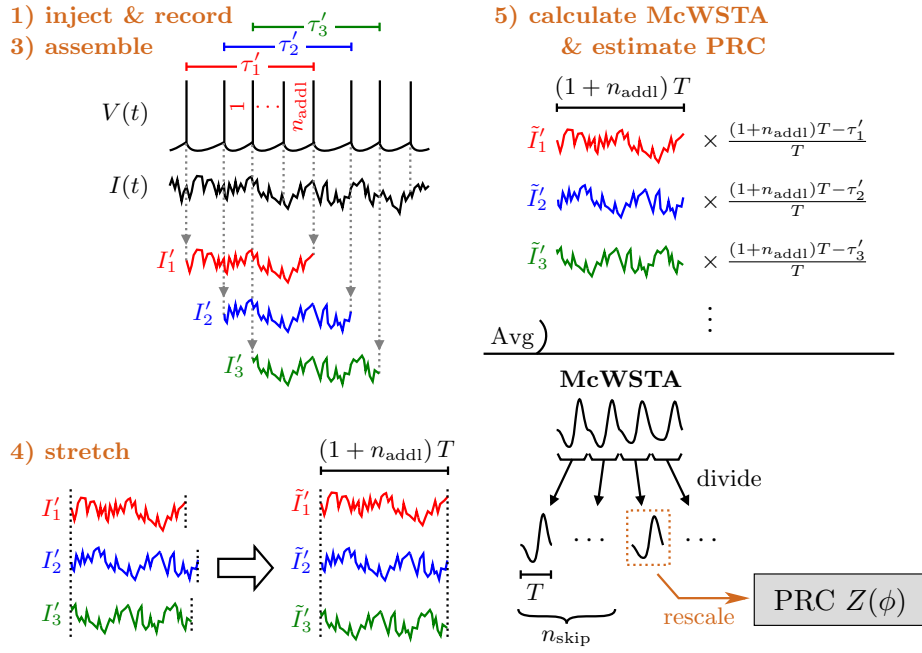


図 4.4: McWSTA 法の手続き. 周期発火する神経細胞への適用を例に描いた. なお, V, I はそれぞれ膜電位と印加電流を表している.

を生成する.

- 5) 長さをそろえた波形の複数サイクル重み付きスパイクトリガー平均 (Multicycle Weighted Spike-Triggered Average: McWSTA)

$$W'(t) = \left\langle \frac{(1+n_{\text{addl}})T - \tau'_i}{T} \tilde{I}'_i(t) \right\rangle \quad \text{for } t \in [0, (1+n_{\text{addl}})T] \quad (4.10)$$

を計算し, 位相応答曲線を

$$Z(\phi) = \frac{2\pi}{\mu^2} W' \left(\frac{T}{2\pi} \phi + n_{\text{skip}} T \right) \quad \text{for } \phi \in (0, 2\pi) \quad (4.11)$$

と見積もる. ここで, μ は入力刺激の強度である.

この手法を McWSTA 法とよぶことにする. McWSTA 法の手続きを図 4.4 に描く.

例として, 図 4.1(a) のセパレータを採用して McWSTA 法を SL 振動子に適用してみよう. 同じ状況下で WSTA 法は計測に失敗していたが, 図 4.5 に示すように McWSTA 法は位相応答曲線を正しく見積もる. WSTA 法の抱えていた「セパレータをアイソクロンに接するよう選ぶなければならない」という問題が McWSTA 法では克服されていることを確認できる.

4.3.2 新手法の妥当性に対する解析的証明

McWSTA 法の妥当性に対する解析的証明は自著論文 [26] において与えられている. ここにその証明の詳細を記そう.

McWSTA 法の手続きで位相応答曲線が計測できることを示すためには, McWSTA 法による計測値が直接法による計測値に一致することを示せばよい. そうすれば, 直接法の妥当性が

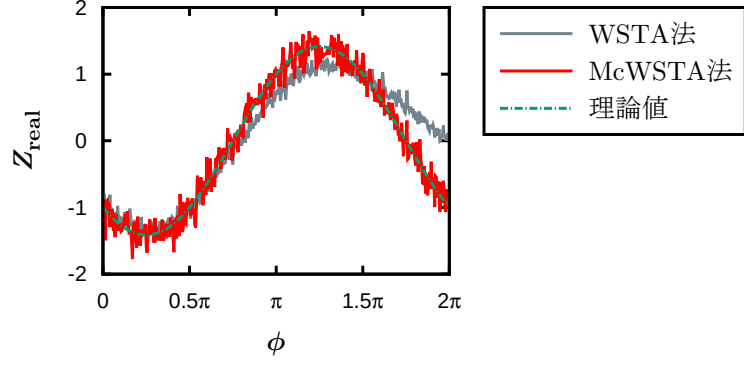


図 4.5: SL 振動子 (2.11) に対して McWSTA 法を適用した結果. セパレータには実軸の正の部分 (図 4.1(a)) を採用し, $n_{\text{skip}} = 1$, $n_{\text{addl}} = 3$ とした. 赤色実線が McWSTA 法を用いて求めた位相応答曲線であり, 灰色実線は WSTA 法を用いて求めた位相応答曲線 (図 4.1(b) の赤色実線), 緑色鎖線は理論曲線 (2.19) である. 揺らぎ刺激の生成には $\gamma = 1000$, $\sigma = 0.1$ の OU 過程 (3.12) を使い, McWSTA は 10^5 個のサンプルから計算した. McWSTA 法により位相応答曲線を正しく計測できていることが確認できる.

ら McWSTA 法の妥当性が導かれる. 二つの計測値が一致することを示すためには各計測値を統一的かつ厳密に記述することが必要となるが, 4.2 節で導いた新たな位相記述を応用すればそれも実現可能である.

a) 直接法による計測値の解析的表現

式 (4.9) に基づき, 直接法による計測値 (3.8) の解析的表現を求めよう.

パルス刺激は Dirac のデルタ関数 $\varepsilon\delta(t - t_{\text{inj}})$ で近似できるものとし, また, パルス刺激が加えられる状態変数を x とする. さらに, 議論を簡単にするため, パルス刺激を加える直前のセパレータへの復帰の時刻 t_0 を 0 とする. 直接法の場合, 定常振動に落ち着いている状況で刺激を印加するので, 初期の周期軌道からのずれ, すなわち式 (4.9) 中の $\delta R(0)$ は無視してよい. したがって, 式 (4.9) を $1 + n_{\text{wait}}$ サイクルにわたって積分すれば,

$$\begin{aligned} 2\pi(1 + n_{\text{wait}}) &= \omega\mathfrak{T}' + \varepsilon \int_{t_{\text{inj}}}^{\mathfrak{T}'} \beta_x(t_{\text{inj}}, s) ds + \varepsilon\zeta_x(t_{\text{inj}}) \\ &= \omega\mathfrak{T}' + \varepsilon \int_{t_{\text{inj}}}^{\mathfrak{T}} \beta_x(t_{\text{inj}}, s) ds + \varepsilon\zeta_x(t_{\text{inj}}) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

ただし $\beta_x(s, t)$ と $\zeta_x(t)$ はそれぞれ $\beta(s, t)$, $\zeta(t)$ の x 成分である. この式から, 直接法の場合の計測値 (3.8) について

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}'}{T} &= \frac{2\pi(1 + n_{\text{wait}}) - \omega\mathfrak{T}'}{\varepsilon} \\ &= \int_{t_{\text{inj}}}^{\mathfrak{T}} \beta_x(t_{\text{inj}}, s) ds + \zeta_x(t_{\text{inj}}) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.12)$$

なる表式を得ることができる.

b) McWSTA 法による計測値の解析的表現

式 (4.9) に基づき, McWSTA 法による計測値 (4.11) の解析的表現を求めよう.

揺らぎ刺激が加えられる状態変数を x とする. McWSTA 法では連続的な刺激を間断なく加え続けるので, 直接法の場合とは異なり, 各 $1 + n_{\text{addl}}$ サイクルの初めにおいて周期軌道からのずれが存在する. i 番目の $1 + n_{\text{addl}}$ サイクルの初めにおけるずれを $\delta R_i(0)$ と書くことにすると, 式 (4.9) を i 番目の $1 + n_{\text{addl}}$ サイクルにわたって積分した結果は

$$\begin{aligned} 2\pi(1 + n_{\text{addl}}) &= \omega\tau'_i + \int_0^{\tau'_i} \alpha(s) ds \cdot \delta R_i(0) \\ &\quad + \mu \int_0^{\tau'_i} \left(\int_0^s \beta_x(r, s) \xi'_i(r) dr \right) ds \\ &\quad + \mu \int_0^{\tau'_i} \zeta_x(s) \xi'_i(s) ds \end{aligned} \quad (4.13)$$

と書ける. ただし, $\xi'_i(t) := I'_i(t)/\mu$.

いま, 関数 $\eta_x(s, t)$ を次式で定義する:

$$\eta_x(s, t) := A(t, s)B(s)e_x,$$

ただし e_x は x 成分が 1 の単位ベクトルである. 式 (4.8) より, サイクル初期のずれ $\{\delta R_i(0)\}_{i \in \mathbb{N}}$ は次の再帰方程式を満たす:

$$\begin{aligned} \delta R_i(0) &= A(\tau_{i-1}, 0)\delta R_{i-1}(0) + \mu \int_0^{\tau_{i-1}} \xi'_{i-1}(s)\eta_x(s, \tau_{i-1}) ds \\ &= A(T, 0)\delta R_{i-1}(0) + \mu \int_0^T \tilde{\xi}'_{i-1}(s)\eta_x(s, T) ds + O(\mu^2), \end{aligned} \quad (4.14)$$

ただし

$$\tilde{\xi}'_i(t) = \xi'_i\left(\frac{\tau'_i}{(1 + n_{\text{addl}})T}t\right).$$

再帰方程式 (4.14) を解けば,

$$\delta R_i(0) = [A(T, 0)]^{i-1} \delta R_1(0) + \mu \sum_{j=1}^{i-1} [A(T, 0)]^{j-1} \int_0^T \tilde{\xi}'_{i-j}(s)\eta_x(s, T) ds + O(\mu^2).$$

ここで, $\|A(t, s)\|$ が指数関数的に減衰することを思いだそう. したがって, この解の右辺において, 第 1 項および第 2 項の $j \neq 1$ の部分はほとんど影響せず, ゆえに無視できる. そうすると, サイクル初期のずれについて

$$\delta R_i(0) \approx \mu \int_0^T \tilde{\xi}'_{i-1}(s)\eta_x(s, T) ds \quad (4.15)$$

という見積もりが得られる.

式 (4.15) を用いて式 (4.13) を書きなおせば, 次の関係式が得られる:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + n_{\text{addl}})T - \tau'_i}{T} &= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{\tau'_i} \alpha(s) ds \cdot \int_0^T \tilde{\xi}'_{i-1}(s)\eta_x(s, T) ds \\ &\quad + \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{\tau'_i} \left(\int_0^s \beta_x(r, s) \xi'_i(r) dr \right) ds \\ &\quad + \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{\tau'_i} \zeta_x(s) \xi'_i(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \alpha(s) \, ds \cdot \int_0^T \tilde{\xi}'_{i-1}(s) \eta_x(s, T) \, ds \\
&\quad + \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \left(\int_0^s \beta_x(r, s) \tilde{\xi}'_i(r) \, dr \right) \, ds \\
&\quad + \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \zeta_x(s) \tilde{\xi}'_i(s) \, ds \\
&\quad + O(\mu^2).
\end{aligned}$$

この関係式から、式 (4.10) で定められる McWSTA が

$$\begin{aligned}
W'(t) &\equiv \left\langle \frac{(1+n_{\text{addl}})T - \tau'_i}{T} \tilde{I}'_i(t) \right\rangle \\
&= \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \alpha(s) \, ds \cdot \int_0^T \langle \tilde{\xi}'_{i-1}(s) \tilde{\xi}'_i(t) \rangle \eta_x(s, T) \, ds \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \left(\int_0^s \beta_x(r, s) \langle \tilde{\xi}'_i(r) \tilde{\xi}'_i(t) \rangle \, dr \right) \, ds \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \zeta_x(s) \langle \tilde{\xi}'_i(s) \tilde{\xi}'_i(t) \rangle \, ds \\
&\quad + O(\mu^3) \\
&= \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \alpha(s) \, ds \cdot \int_0^T C((s-T)-t) \eta_x(s, T) \, ds \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \left(\int_0^s \beta_x(r, s) C(r-t) \, dr \right) \, ds \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \zeta_x(s) C(s-t) \, ds \\
&\quad + O(\mu^3) \\
&= \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \alpha(s) \, ds \cdot \int_{-T}^0 C(s-t) \eta_x(s, 0) \, ds \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \left(\int_0^s \beta_x(r, s) C(r-t) \, dr \right) \, ds \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2\pi} \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \zeta_x(s) C(s-t) \, ds \\
&\quad + O(\mu^3) \tag{4.16}
\end{aligned}$$

と計算できる。ただし、 $C(t)$ は揺らぎ刺激の（積分値が 1 になるように規格化された）自己相関関数である。最後の等号は $\eta_x(s, t)$ が満たす条件式

$$\eta_x(s+T, t+T) \equiv A(t+T, s+T)B(s+T)e_x = A(t, s)B(s)e_x \equiv \eta_x(s, t)$$

により成り立つ。式 (4.16) を用いることで、McWSTA 法による計測値 (4.11) を

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\mu^2} W' \left(\frac{T}{2\pi} \phi + n_{\text{skip}} T \right) &= \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \alpha(s) \, ds \cdot \int_{-T}^0 C \left(s - \left(\frac{T}{2\pi} \phi + n_{\text{skip}} T \right) \right) \eta_x(s, 0) \, ds \\
&\quad + \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \left[\int_0^s \beta_x(r, s) C \left(r - \left(\frac{T}{2\pi} \phi + n_{\text{skip}} T \right) \right) \, dr \right] \, ds \\
&\quad + \int_0^{(1+n_{\text{addl}})T} \zeta_x(s) C \left(s - \left(\frac{T}{2\pi} \phi + n_{\text{skip}} T \right) \right) \, ds \\
&\quad + O(\mu) \tag{4.17}
\end{aligned}$$

と表すことができる。

特に、自己相関関数 $C(t)$ が Dirac のデルタ関数 $\delta(t)$ で近似できるとすれば、 $0 < \phi < 2\pi$ の範囲で式 (4.17) は

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\mu^2} W' \left(\frac{T}{2\pi} \phi + n_{\text{skip}} T \right) \\ &= \int_{\frac{T}{2\pi} \phi + n_{\text{skip}} T}^{(1+n_{\text{addl}})T} \beta_x \left(\frac{T}{2\pi} \phi + n_{\text{skip}} T, s \right) ds + \zeta_x \left(\frac{T}{2\pi} \phi + n_{\text{skip}} T \right) + O(\mu) \end{aligned} \quad (4.18)$$

と表されることになる。

c) 直接法と McWSTA 法との計測値の一致

これらの解析的表現（式 (4.12), (4.18)）を用いて、直接法による計測値と McWSTA 法による計測値とが一致することを示そう。

式 (4.12) において、右辺第1項の積分に対し $s + n_{\text{skip}} T$ を新たに s とする変数変換を施せば、

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}'}{T} &= \int_{t_{\text{inj}}}^{\mathfrak{T}} \beta_x(t_{\text{inj}}, s) ds + \zeta_x(t_{\text{inj}}) \\ &= \int_{t_{\text{inj}} + n_{\text{skip}} T}^{\mathfrak{T} + n_{\text{skip}} T} \beta_x(t_{\text{inj}}, s - n_{\text{skip}} T) ds + \zeta_x(t_{\text{inj}}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる。ここで、直接法における n_{wait} と McWSTA 法における $n_{\text{skip}}, n_{\text{addl}}$ とが

$$n_{\text{wait}} = n_{\text{addl}} - n_{\text{skip}} \quad (4.20)$$

なる関係を満たしている、すなわち

$$\mathfrak{T} \equiv (1 + n_{\text{wait}}) T = (1 + n_{\text{addl}}) T - n_{\text{skip}} T$$

なる等式が成り立つように設定されているとしよう。すると、式 (4.19) はさらに

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}'}{T} &= \int_{t_{\text{inj}} + n_{\text{skip}} T}^{\mathfrak{T} + n_{\text{skip}} T} \beta_x(t_{\text{inj}}, s - n_{\text{skip}} T) ds + \zeta_x(t_{\text{inj}}) \\ &= \int_{t_{\text{inj}} + n_{\text{skip}} T}^{(1+n_{\text{addl}})T} \beta_x(t_{\text{inj}}, s - n_{\text{skip}} T) ds + \zeta_x(t_{\text{inj}}) \end{aligned}$$

と計算できる。関数 $\beta(s, t), \zeta(t)$ が満たす条件式

$$\begin{aligned} \beta(s + T, t + T) &\equiv B^\top(s + T) A^\top(t + T, s + T) \text{grad}_R \rho(R, \theta) \Big|_{\substack{R=R_0 \\ \theta=\omega(t+T)}} \\ &= B^\top(s) A^\top(t, s) \text{grad}_R \rho(R, \theta) \Big|_{\substack{R=R_0 \\ \theta=\omega t}} \\ &\equiv \beta(s, t), \\ \zeta(t + T) &\equiv \text{grad}_X \theta(X) \Big|_{X=X_p(t+T)} \\ &= \text{grad}_X \theta(X) \Big|_{X=X_p(t)} \\ &\equiv \zeta(t) \end{aligned}$$

に注意して計算を進めれば,

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}'}{T} &= \int_{t_{\text{inj}} + n_{\text{skip}}T}^{(1+n_{\text{addl}})T} \beta_x(t_{\text{inj}}, s - n_{\text{skip}}T) ds + \zeta_x(t_{\text{inj}}) \\
&= \int_{t_{\text{inj}} + n_{\text{skip}}T}^{(1+n_{\text{addl}})T} \beta_x(t_{\text{inj}} + n_{\text{skip}}T, s) ds + \zeta_x(t_{\text{inj}} + n_{\text{skip}}T) \\
&= \frac{2\pi}{\mu^2} W' \left(\frac{T}{2\pi} \cdot \omega t_{\text{inj}} + n_{\text{skip}}T \right).
\end{aligned}$$

これはまさしく McWSTA 法による計測値 (4.11) である.

以上で直接法による計測値と McWSTA 法による計測値とが一致すると示された. 第3章で示したように直接法は位相応答曲線を正しく見積もるから, これにより McWSTA 法の妥当性が証明されたことになる.

4.3.3 新手法を適用するうえでの注意点

式 (4.17) から式 (4.18) を導く際, 自己相関関数 $C(t)$ を Dirac のデルタ関数 $\delta(t)$ で近似している. これは, 詰まるところ, 揺らぎ刺激の相関時間を無限小と見なす近似である. 一方, 当然のことながら, 実際の揺らぎ刺激は有限の相関時間をもつ. この相関時間が上述の証明に与える影響, 特に証明を破綻させる可能性について考えよう.

印加刺激の相関時間が長くなる, すなわち自己相関関数 $C(t)$ の台 $\text{supp}(C)$ が広がると, 式 (4.17) 中の積分に次のような影響が出る:

- (i) 広がった台 $\text{supp}(C)$ の上で平均化されてしまう;
- (ii) 台 $\text{supp}(C)$ の一部が積分区間の境界を越えてしまう.

これらのうち (i) が深刻化すると, 位相応答曲線の高周波成分が計測できなくなる. この問題に関してはうまい回避方法は見つかっておらず, 高周波成分まで得られる程度に刺激の相関時間を短くするほかない. 一方, (ii) に関しては, 手続き 2 にあるように n_{skip} を十分大きな値かつ $n_{\text{skip}} \ll n_{\text{addl}}$ となるようにとれば, (よほど相関時間の長い場合を除いて) 問題の発生を抑えることができる.

なお, n_{skip} の値を大きくしていくと, 式 (4.20) が示すように, 対応する直接法の緩和待ちサイクル数 n_{wait} が少なくなる. 直接法で位相応答曲線を正しく計測するための鍵はこの n_{wait} を大きくとることであつたから, それを減らす n_{skip} は必要以上に大きくとりたくない. 理論上は $n_{\text{skip}} \ll n_{\text{addl}}$ であればよいが, 実用上は $n_{\text{skip}} = 1$ とすべきであろう.

また, 実用上は n_{addl} の値にも注意が必要である. 有限個のサンプルから計算される自己相関関数 $C(t)$ はサンプリング誤差を含んでおり, n_{addl} の値を増やしていくにつれ, 式 (4.17) の右辺第2項および第3項がこのサンプリング誤差を取り込むことになる. ゆえに, n_{addl} の値をあまりに大きくしすぎると, 得られる位相応答曲線に非常に大きなノイズが乗ることになる. 限られたデータからノイズの少ない見積もりを得るためには, n_{addl} も必要以上に大きくとりたくない.

そこで, 手続き 1 において一旦サイクルごとにデータを記録していることが役に立つ. これらのデータがあれば, n_{addl} を取り替えて $\{\tau'_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{I'_i([0, \tau'_i])\}_{i \in \mathbb{N}}$ を再構成するということが可能である. したがって, 以下の手順により最適な n_{addl} で計測を行うことができる.

まず, n_{addl} を大きめにとり, 仮の McWSTA を計算する. そうすると, この McWSTA $W'(t)$ は $t \rightarrow 0^+$ で T -周期関数に漸近していく. (例えば図 4.6.) なぜなら, McWSTA の中の $nT \leq$

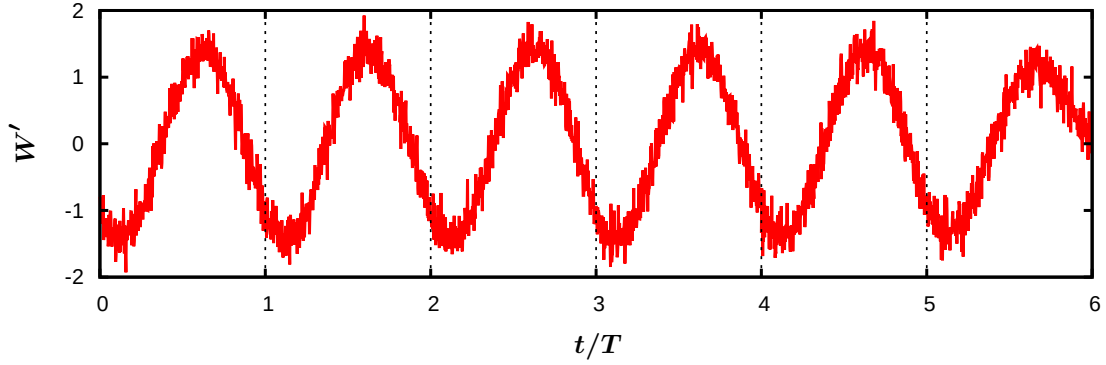


図 4.6: SL 振動子 (2.11) に対して McWSTA 法を適用する過程で $n_{\text{addl}} = 5$ として計算した McWSTA. 10^5 個のサンプルから計算した. セパレータには実軸の正の部分 (図 4.1(a)) を採用し, 揺らぎ刺激の生成には $\gamma = 1000$, $\sigma = 0.1$ の OU 過程 (3.12) を用いている. 区間 $[4T, 5T)$ で T -周期関数にほぼ収束していることから, $n_c = 2$ と見積もることができ, 最適な n_{addl} は $2 + n_{\text{skip}}$ であると判断できる.

$t < (n+1)T$ の部分は緩和待ちサイクル数を $n_{\text{addl}} - n$ とした場合の直接法による計測曲線をリスケールしたものとなっており, t が 0 に近いところほどこの緩和待ちサイクル数が多いからである. そのことを踏まえ, 次に, McWSTA $W'(t)$ を t の大きい方から小さい方へ見ていき, T -周期関数に収束したと見なせる点 t_c を見定める. そして, この t_c が

$$[(1 + n_{\text{addl}}) - n_c] \times T \leq t_c < [(1 + n_{\text{addl}}) - n_c + 1] \times T$$

なる関係を満たすように非負整数 n_c をとる. すると, この n_c の値が周期軌道に緩和するまでに必要なサイクル数である. そこで, n_{addl} を $n_c + n_{\text{skip}}$ に設定しなおし, 計測を手続き 3 からやりなおす. これにより再び McWSTA が得られるが, この McWSTA から計算した位相応答曲線 (4.11) は緩和待ちサイクル数を n_c とした場合の直接法による計測曲線に一致する. こうして, 最適な n_{addl} で McWSTA 法が適用されることになる.

なお, 最適な n_{addl} の値は計測対象の系に依存するが, その値は一般にあまり大きくない. なぜなら, n_{addl} の増加に伴う収束の速さを決めている式 (4.18) の右辺第 1 項において, $|\beta_x(\cdot, s)|$ がその定義 (および $\|A(t, s)\|$ が指数関数的に減衰すること) より $s \rightarrow \infty$ で指数関数的に減衰するからである. つまり, 式 (4.18) の右辺第 1 項が $n_{\text{addl}} \rightarrow \infty$ で指数関数的に収束するため, McWSTA 法による計測値 (4.11) は n_{addl} の増加に伴い位相応答曲線に指数関数的に収束することになる. したがって, それほど大きくない n_{addl} の値でも, 位相応答曲線にほぼ収束した計測曲線を得ることができる.

付 録 実測位相記述の理論的妥当性についての検証

—Stuart–Landau 振動子を例として—

4.2 節および 4.3.2 項で示した解析に誤りがないことを確認するために, SL 振動子 (2.11) に対して式 (4.12) を具体的に計算し, 数値シミュレーションの結果と比較しよう.

セパレータには実軸の正の部分 (図 4.1(a)) を採用しているとする. この場合の 1 サイクルは, 詰まるところ, 偏角が 0 から 2π 増加するまでの期間である. そこで, 偏角を実測位相 θ とし, 動径を共役な変数 R とする.

動径および偏角は、それぞれ式 (2.12a), (2.12b) に従って時間発展する。これらのうち、式 (2.12a) は式 (4.2a) に相当する。また、式 (2.12b) は、

$$\frac{d\theta}{dt} = (2\pi - 1) + (1 - r^2)$$

なる書き直しを経て、式 (4.2b) に相当する。(SL 振動子 (2.11) の自然振動数が $2\pi - 1$ であることに注意せよ。) 安定周期軌道 $|A| = 1$ からの動径方向のずれを δr とおいて式 (4.7) を具体的に書き下せば、

$$\frac{d}{dt}\delta r = (-2)\delta r + \varepsilon \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re } \tilde{p}(\omega t, t) \\ \text{Im } \tilde{p}(\omega t, t) \end{bmatrix}, \quad (4.21a)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + (-2)\delta r + \varepsilon \begin{bmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Re } \tilde{p}(\omega t, t) \\ \text{Im } \tilde{p}(\omega t, t) \end{bmatrix}. \quad (4.21b)$$

これらのうち特に微分方程式 (4.21a) に注目すると、これは解

$$\delta r(t) = e^{-2t}\delta r(0) + \varepsilon \int_0^t e^{-2(t-s)} \begin{bmatrix} \cos \omega s & \sin \omega s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re } \tilde{p}(\omega s, s) \\ \text{Im } \tilde{p}(\omega s, s) \end{bmatrix} ds$$

をもつ。この解を式 (4.21b) に代入すれば、式 (4.9) に相当する時間発展方程式として

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega + (-2e^{-2t})\delta r(0) \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t \begin{bmatrix} -2e^{-2(t-s)} \cos \omega s \\ -2e^{-2(t-s)} \sin \omega s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Re } \tilde{p}(\omega s, s) \\ \text{Im } \tilde{p}(\omega s, s) \end{bmatrix} ds \\ &\quad + \varepsilon \begin{bmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Re } \tilde{p}(\omega t, t) \\ \text{Im } \tilde{p}(\omega t, t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。つまり、SL 振動子においては、

$$\alpha(t) = -2e^{-2t}, \quad \beta(s, t) = \begin{bmatrix} -2e^{-2(t-s)} \cos \omega s \\ -2e^{-2(t-s)} \sin \omega s \end{bmatrix}, \quad \zeta(t) = \begin{bmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

となるわけである。

以上の準備のもと、直接法による計測値 (4.12) を計算しよう。ここでは、実入力に対する位相応答 (2.19) が計測対象である状況を考える。このとき、パルス刺激は系の実部に印加される。したがって、式 (4.22) の β, ζ を用いて式 (4.12) を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{T}'}{T} &\simeq \int_{t_{\text{inj}}}^{\mathfrak{T}} \beta_{\text{real}}(t_{\text{inj}}, s) ds + \zeta_{\text{real}}(t_{\text{inj}}) \\ &= \int_{t_{\text{inj}}}^{\mathfrak{T}} \left[-2e^{-2(s-t_{\text{inj}})} \cos(\omega t_{\text{inj}}) \right] ds + [-\sin(\omega t_{\text{inj}})] \\ &= [-\sin(\omega t_{\text{inj}}) - \cos(\omega t_{\text{inj}})] + e^{-2(\mathfrak{T}-t_{\text{inj}})} \cos(\omega t_{\text{inj}}) \\ &= Z_{\text{real}}(\omega t_{\text{inj}}) + e^{-2(\mathfrak{T}-t_{\text{inj}})} \cos(\omega t_{\text{inj}}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

となる。

式 (4.23) をプロットしたものが図 4.7 である。式 (4.23) は、数値シミュレーションから得られる曲線をよく記述している。この結果は、4.3.2 項の解析およびその基礎となった 4.2 節の解析が妥当であることを裏付けるものである。

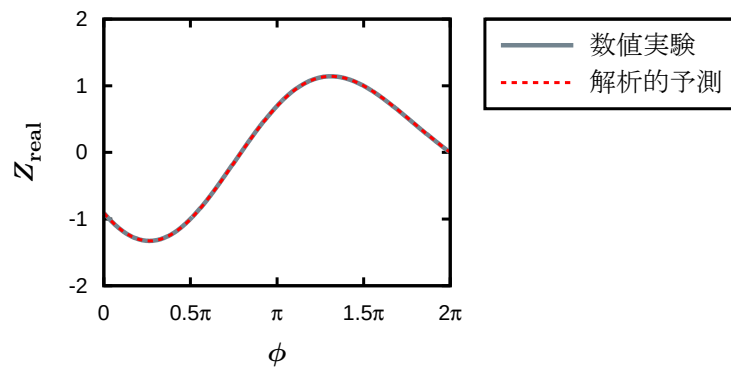


図 4.7: 4.2 節および 4.3.2 項の方法を用いて解析的に予測された, SL 振動子 (2.11) に対する直接法の適用結果 (式 (4.23)). 緩和待ちサイクル数 n_{wait} は 0 とした. 赤色破線が解析に基づく予測であり, 灰色実線は数値シミュレーションによる結果 (図 4.2 の赤色実線) である. 解析に基づく予測は, 数値シミュレーションによる結果に完全に一致している.

第5章 実験系へのMcWSTA法の適用例

第4章（特に4.3節）では、WSTA法を発展させたMcWSTA法という計測手法を導入した。そもそもWSTA法は、第3章で述べたように、背景ノイズの無視できないような状況で特に有用な手法である。そのノイズ耐性の源は、揺らぎ刺激という連続的な刺激を用いることにあるのであった。WSTA法と同様に連続的な刺激を用いるMcWSTA法はWSTA法と同様にノイズ耐性をもつと期待され、実際、McWSTA法はすでに実験系に適用されて優れた性能を示している。本章では、それらの適用例の中から二つを紹介する。

5.1 発振回路への適用

自著論文 [26] では、McWSTA法を発振回路に適用した結果が述べられている。用いられている回路は van der Pol (vdP) 発振回路 [10, 38] であり、その回路図 5.1(a) の点 x, y における電位は、vdP 振動子 [59]

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (5.1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda (a - x^2) y - x \quad (5.1b)$$

の状態変数 x, y にそれぞれ対応する。揺らぎ刺激には式 (3.12) から数値的に生成した OU 過程のサンプルパス I_t が用いられており、National Instruments PCI-6221 を介してそれが回路に印加されている。なお、この印加は、モデル式 (5.1a) が

$$\frac{dx}{dt} = y + I_t$$

へと書き換わるようになされている。また、対応する vdP 振動子 (5.1) が図 5.1(b) のような安定周期軌道をもつことを踏まえ、セパレータには半直線 $x > 0, y = 0$ を用いている。このときの計測結果が図 5.1(c) である。第4章で示した数値例から予想されるように、この場合、WSTA法は位相応答曲線を正しく見積もることができない。しかし、McWSTA法では、この場合も（理論値にほぼ一致する）正確な計測結果が得られる。実験系においてもMcWSTA法は適切に機能している。

5.2 ヒトの歩行への適用

文献 [16] では、ヒトの歩行ダイナミクスの位相応答曲線をMcWSTA法によって計測している。

そもそも、ヒトは、歩行中に加わるさまざまな外乱に対し、歩行リズムを調節することで歩行運動を安定に保っている。例えば、片脚支持期に何かにつまずいても、遊脚の接地を早めることにより、転倒せずそのまま歩行を続けられる。ヒトのこのような歩行制御において、外乱

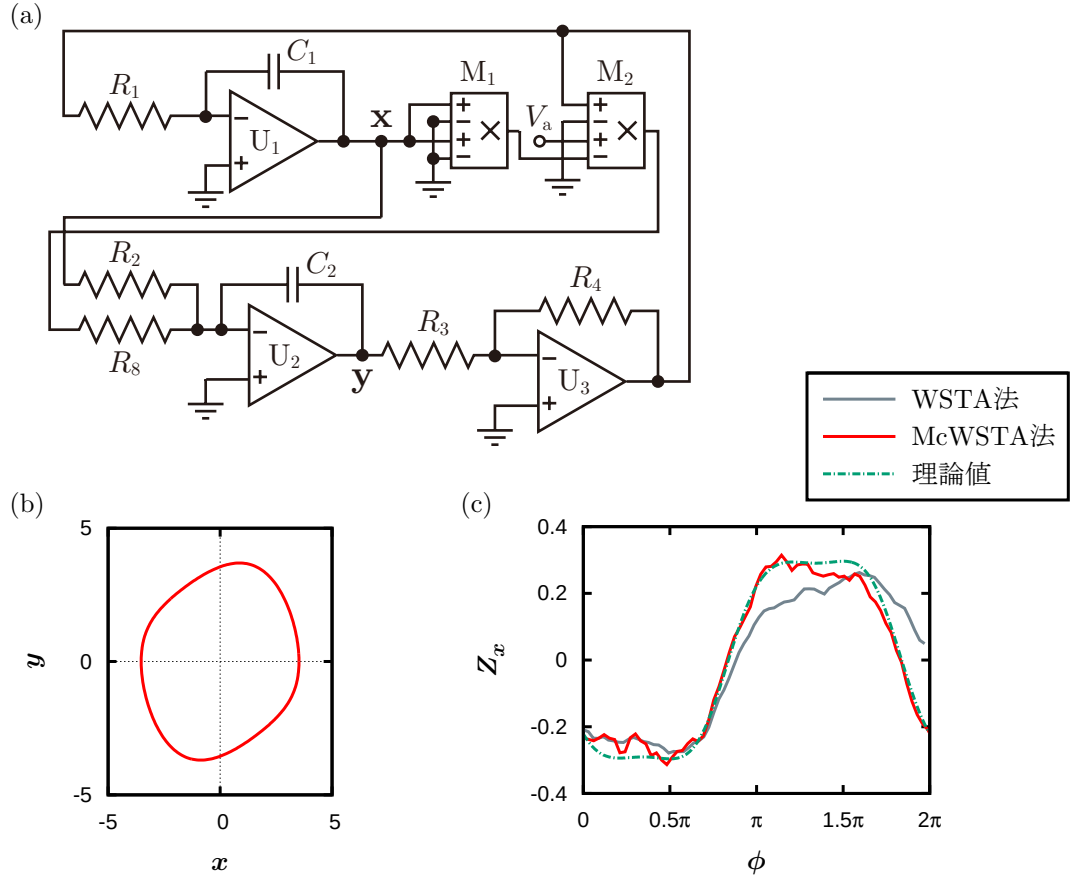


図 5.1: vdP 発振回路に対する McWSTA 法の適用. (a) vdP 発振回路の回路図. U_1 – U_3 は演算増幅器 (Texas Instruments TL082), M_1 , M_2 はアナログ電圧乗算器 (Analog Devices AD633) を表し, 抵抗値は $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1.0 \times 10^5 \Omega$ および $R_8 = 1.0 \times 10^4 \Omega$, キャパシタンスは $C_1 = C_2 = 1.0 \times 10^{-9} \text{F}$ である. 直流電圧 V_a は $3.1 \times 10^{-1} \text{V}$ とした. このとき, 対応する vdP 振動子 (5.1) における λ は 1.0×10^{-1} となり, a は 3.1 となる. (b) vdP 振動子 (5.1) において $\lambda = 0.1$, $a = 3.1$ とした場合の軌道. (c) 計測結果. (プロットされたデータはすべて, 自著論文 [26] において用いられたものである.) 赤色実線が McWSTA 法を用いて求めた位相応答曲線であり, 灰色実線は WSTA 法を用いて求めた位相応答曲線である. 比較のため, vdP 振動子 (5.1) の位相応答曲線を随伴法で求め, 理論値として緑色鎖線で示す. セパレータには半直線 $x > 0$, $y = 0$ を採用し, $n_{\text{skip}} = 1$, $n_{\text{addl}} = 5$ とした. この n_{addl} の値は, 4.3.3 項で述べた方法により選ばれたものである. 揺らぎ刺激の生成には $\gamma = 2$, $\sigma = 0.1$ の OU 過程 (3.12) を用い, WSTA および McWSTA は約 9000 個のサンプルから計算した. WSTA 法による計測曲線が理論値から大きく外れているのに対して, McWSTA 法による計測曲線は理論値によく合っている.

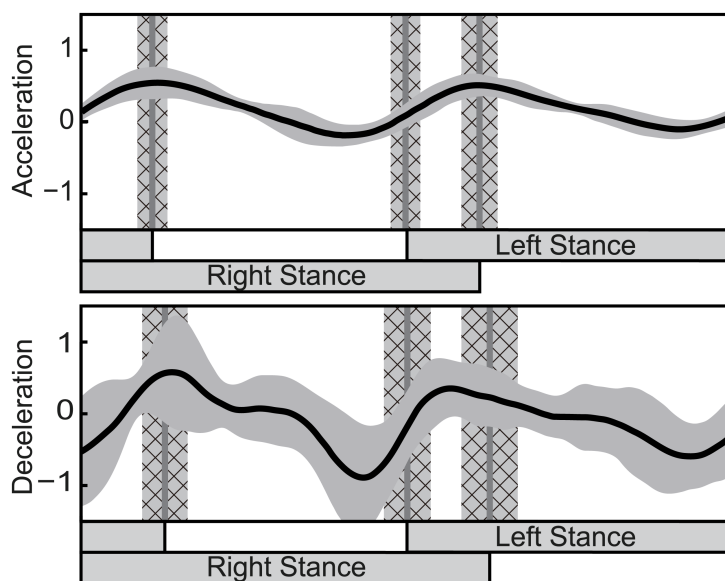


図 5.2: ヒトの歩行に対して McWSTA 法を適用した結果. (本図は文献 [16] より転載されたものである.) 右足接地をセパレータに採用した. 上が加速外乱を用いた場合の計測結果, 下が減速外乱を用いた場合の計測結果であり, それぞれにおいて黒色実線が McWSTA 法を用いて求めた位相応答曲線である. 灰色実線は接地・離地タイミングを表し, 灰色領域はそれぞれの実線が描く対象の標準偏差を表している. 先行研究 [30,39] と同様の傾向が見られており, 妥当な計測結果であると考えられる.

が歩行リズムをどのように変化させるかは, 歩行サイクルのどのタイミングで外乱が加わったかに依存している [15]. ヒトの歩行制御の仕組みを理解するために, まずは, 歩行リズムの外乱応答を歩行サイクルの全域にわたって調べたい.

歩行ダイナミクスをリミットサイクル振動子と見なせば, 位相応答曲線を調べることで上記の目標は達成できるだろう. ところが, ヒトの歩行リズムはばらつきが非常に大きく, 伝統的な計測手法, すなわち直接法では, リズム制御の性質を調べるに足る精度の計測曲線を得ることは困難である. そこで, 文献 [16] では, ノイズ耐性をもつと期待される McWSTA 法が用いられた.

実験は, トレッドミル (Bertec ITR3017) 上を 1.0m/s で歩くヒトに対してベルト速度を変化させる外乱を与える形で行われた. 外乱は三角パルス的な速度変化がランダムに発生するもので, 速度変化の発生間隔は一様分布 $U(0\text{s}, 0.5\text{s})$ に従う. 個々の速度変化にはベルト速度を 1.2m/s 上昇させる加速外乱もしくは 1.0m/s 低下させる減速外乱が用いられており, 1 回の試行の中ではこれらは混在せず, 試行ごとに加速外乱のみもしくは減速外乱のみが用いられている. ベルト速度は 0.1s で線形に所定の速度まで変化し, 続く 0.1s で線形に元の速度 (すなわち 1.0m/s) に戻る. 被験者は 5 名の健常な男性 (年齢 = 21–23 歳, 体重 = 53–77kg, 身長 = 167–177cm) であり, 各被験者に対して加速外乱実験・減速外乱実験がそれぞれ 15 試行ずつ行われている. 1 回の試行における測定時間は 180s である. ただし, 測定開始から約 10s の間は外乱が与えられていない. 各被験者の 15 試行を 3 試行ずつセットにし, 540s の歩行運動から McWSTA を計算した.

計測結果を図 5.2 に示す. 特に減速外乱の場合の結果に注目すると, 片脚支持期における位相応答曲線の値は, 遊脚を直接引っ張ることにより位相応答を計測した先行研究 [30,39] の結果と傾向が一致している. このことは, 図 5.2 の結果が妥当なものであることを示唆している.

第6章 カオス振動子へのMcWSTA法の適用

第5章で紹介した二つの例は、「背景ノイズの無視できないような状況であっても、McWSTA法を用いれば、与えられたリミットサイクル振動子に対応する位相振動子モデルを同定できる」ということを示している。ところで、背景ノイズが存在する現実の系においては、その系が厳密にリミットサイクル振動子であると保証すること自体がそもそも困難である。その系がカオス振動子であるという可能性、すなわち状態の揺らぎが内在的なものであるという可能性も考えられる。現実の系が対象であるとき、系がノイズの加わっているリミットサイクル振動子かカオス振動子かを判定することは、道具立てが十分でない現状では不可能に近い。実際、心臓の拍動などでは、カオス振動子である [2, 49]、いや違う [11, 29]、といった議論が続いている。

このような議論がある一方で、心臓の拍動については、それをリミットサイクル振動子と見なしたうえで位相応答曲線を計測する実験がいくつか行われており、計測された曲線を基にして対象の同期特性が再現できることも確認されている。例えば、文献 [19] では、計測曲線を基にして周期的な電気刺激による引き込みの様子が再現できたという結果が報告されている。心臓の拍動がカオス振動子であるとするならば、この結果は、カオス振動子に対しても位相応答曲線が定義できると示していることになる。

本章では、カオス振動子に対して近似的に位相応答曲線が定義できる可能性について、数値実験に基づき検討する。特に、カオス振動子の一例として大域結合 Rössler 振動子系を取り上げ、それに McWSTA 法を適用して得られる計測曲線が位相応答曲線としてしかるべき性質をもつかを調べる。

なお、文献 [19] で報告された上記の結果を念頭に置き、本論文では、「そこから周期外力による引き込みの様子が再現できること」をカオス振動子の位相応答曲線としての要件と定めることにする。

6.1 カオス振動子における位相同期現象

上記の要件設定が不良設定でないことを明らかにするために、いくつかのカオス振動子においては周期外力による引き込みの起こりうるということが知られている [46, 56] 事実言及しておかねばなるまい。例として、大域結合 Rössler (Globally Coupled Rössler: GCR) 振動子系 [47, 53]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -\omega_i y_i - z_i + K(X - x_i) \\ \frac{dy_i}{dt} &= \omega_i x_i + a y_i \\ \frac{dz_i}{dt} &= b + z_i(x_i - c) \end{aligned} \right\} \text{ for } i = 1, 2, \dots, N \quad (6.1)$$

を考えよう。以下では $(a, b, c) = (0.2, 0.2, 5.7)$, $K = 0.09$, $N = 1000$ とし、各 ω_i は正規分布 $\mathcal{N}(1, 0.02^2)$ から独立に選ばれているものとする。また、観測量は平均場 $(X, Y, Z) := (\langle x_i \rangle, \langle y_i \rangle, \langle z_i \rangle)$ であるとする。この場合の平均場の軌道を図 6.1 に示す。いま、GCR 振動子

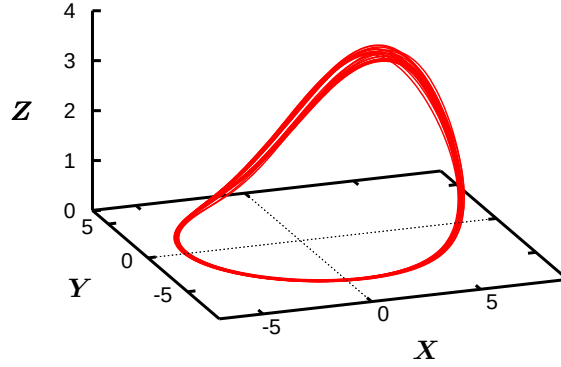


図 6.1: GCR 振動子系 (6.1) における平均場 (X, Y, Z) の軌道. カオス的ではあるが, 非常に周期性が強い.

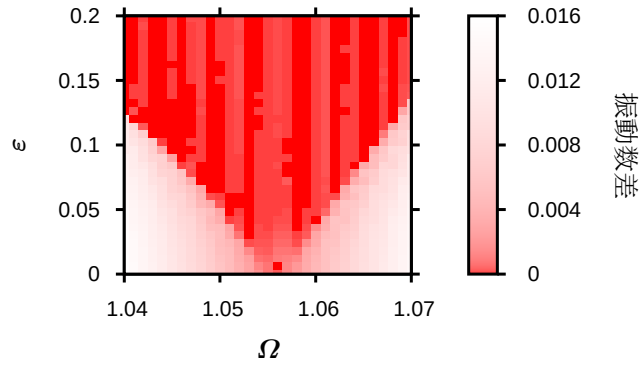


図 6.2: 周期外力を受ける GCR 振動子系 (6.1), (6.2) の平均振動数とその周期外力の振動数 Ω との差. 平均場の振動数が外力の振動数に引き込まれる領域の存在が見て取れる.

系を構成するすべての振動子の x 成分に周期外力 $\varepsilon \sin \Omega t$ を一様に加える:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\omega_i y_i - z_i + K(X - x_i) + \varepsilon \sin \Omega t \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.2)$$

そして, 平均場の速度ベクトルの方位角で位相 θ を定義する. すなわち,

$$\theta(t) := \text{atan2}\left(\left.\frac{dY}{dt}\right|_t, \left.\frac{dX}{dt}\right|_t\right). \quad (6.3)$$

このとき, さまざまな値の ε, Ω に対して平均場の振動数を計測すると, 図 6.2 の Arnold の舌が描かれ, 平均場の振動数が外力の振動数に引き込まれる領域の存在が確認できる.

なお, このような「位相の定義されたカオス振動子と同じく位相の定義された別の振動子や周期外力から摂動を受けた結果, それらの位相差が有界な領域にとどまるようになり, 振動数差が 0 となる」現象はカオス位相同期とよばれている [44, 48, 51].

6.2 大域結合 Rössler 振動子系における“位相応答曲線”の計測

著者は, 自著論文 [25] において, GCR 振動子系 (6.1) に McWSTA 法を適用した結果を報告した. そこで示した結果をここに再掲する.

GCR 振動子系 (6.1) はリミットサイクル振動子ではないが、ひとまずそのことは無視し、McWSTA 法を適用してみよう。セパレータには半平面 $X < 0, Y = 0$ を採用する。また、入力刺激は OU 過程 (3.12) から生成し、それを X に（すなわち、すべての要素振動子の x 成分に一樣に）加える。このときの計測結果が図 6.3 である。計測曲線は、 n_{addl} の値が大きくなるにつれ、図 6.3(a) の曲線に漸近している。

ここで、図 6.3(a) の曲線は GCR 振動子系 (6.1) の“位相感受性”を表していると仮定しよう。本章の初めで定めたように、問題は、この曲線を位相応答曲線としてもつ位相振動子モデルが周期外力による引き込みの様子（図 6.2）を再現できるかどうか、である。位相振動子モデル (2.9) の数値積分から得られる Arnold の舌を図 6.4 に示す。位相記述の適用外であるにも関わらず、周期外力のもとでの引き込みの様子をよく再現している。McWSTA 法を適用して得られた図 6.3(a) の曲線は、GCR 振動子系 (6.1) の位相応答曲線としての要件を備えている。

この結果は、カオス振動子に対しても近似的に位相応答曲線を定義できる可能性がある、ということを意味している。

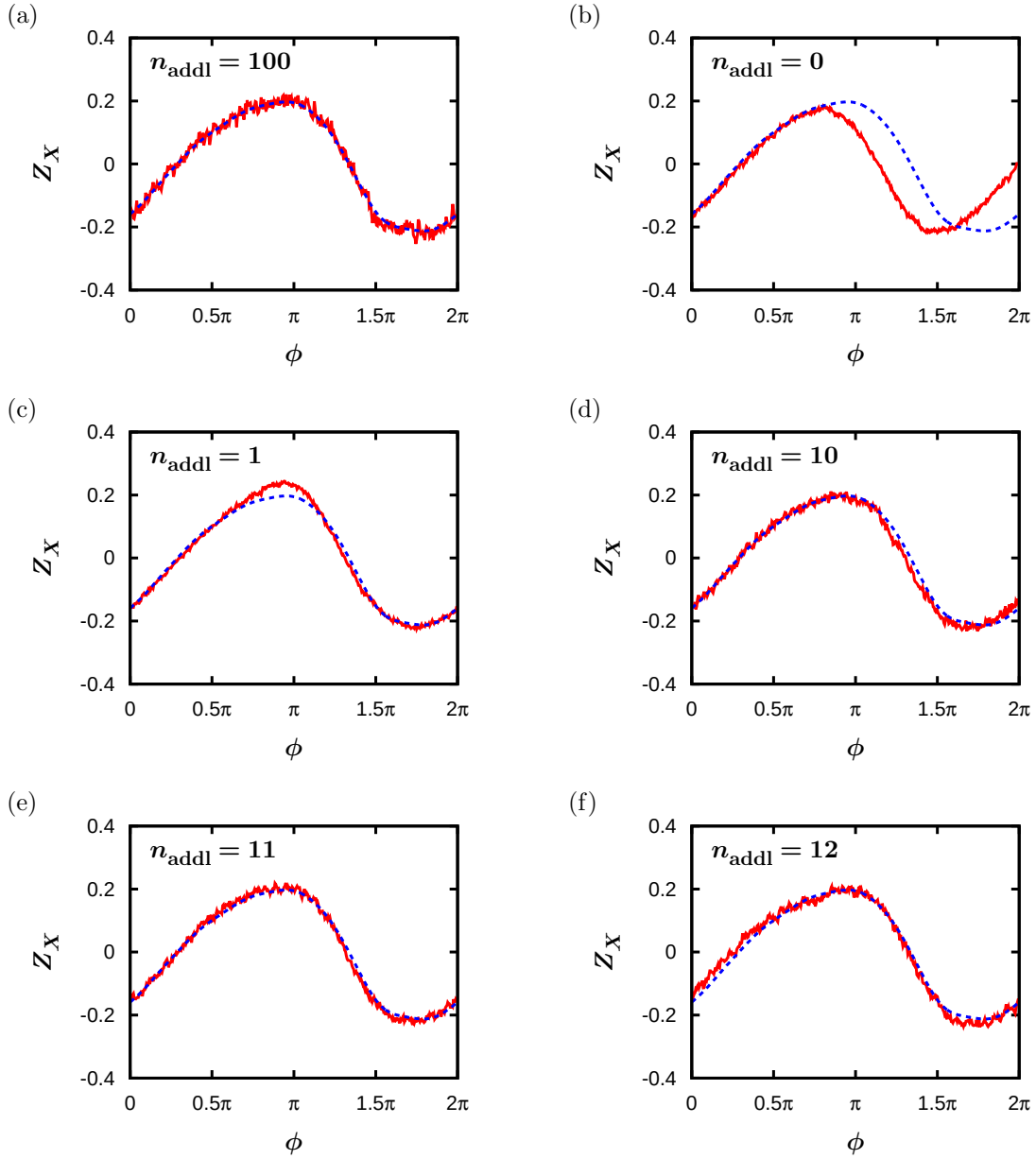


図 6.3: GCR 振動子系 (6.1) に対して McWSTA 法を適用した結果. セパレータには半平面 $X < 0, Y = 0$ を採用し, n_{skip} は 0 とした. 揺らぎ刺激の生成には $\gamma = 50, \sigma = 0.05$ の OU 過程 (3.12) を用い, McWSTA は 2×10^6 個のサンプルから計算した. (a) $n_{\text{addl}} = 100$ の場合の計測曲線. McWSTA 法によって得られた直接の結果を赤色実線で示し, 移動平均をとって平滑化した結果を青色破線で示す. (b)–(f) それぞれ $n_{\text{addl}} = 0, 1, 10, 11, 12$ の場合の計測曲線. 比較のため, $n_{\text{addl}} = 100$ の場合の計測曲線 (図 (a) の青色破線) を青色破線で示す. リミットサイクル振動子に適用したときと同じように, n_{addl} の増加に伴いある関数に漸近しているように見える.

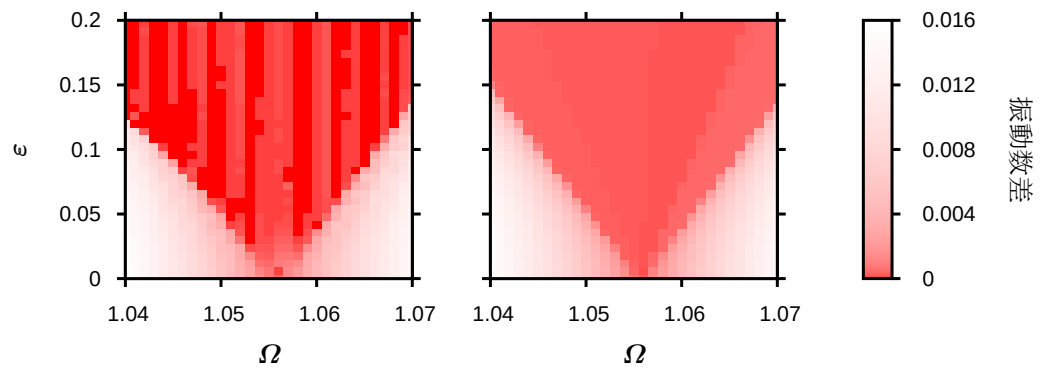


図 6.4: 周期外力を受ける GCR 振動子系の平均振動数とその周期外力の振動数 Ω との差. 左は式 (6.1), (6.2) を直に数値積分して得られた結果 (図 6.2) であり, 右は位相振動子モデル (2.9) から得られた結果である. 二つの結果は比較的よく一致している.

第7章 カオス振動子に対して拡張された位相記述

第6章では、McWSTA法をカオス振動子の一例である大域結合 Rössler 振動子系に対して適用した。そして、カオス振動子は伝統的な位相記述の対象外であるにも関わらず、大域結合 Rössler 振動子系から得られた計測曲線が位相応答曲線としての要件を備えていることを見いだした。この結果は位相記述の適用対象をカオス振動子に拡張できる可能性を示している。そこで、本章では、第2章で述べた伝統的なアプローチと第4章で述べた新たなアプローチとを参考に、カオス振動子に対する縮約理論の構築を試みる。

7.1 MAPO モデル

カオス振動子に対する縮約記述を導出しよう。

まずは、摂動が加わっていない（すなわち系が式 (2.1) によって記述される）状況で考える。このとき、系に対して $(m-1)$ 次元 Poincaré 断面 S を設定し、さらに S を細かく分割してセル $\{S_i\}$ を構成する。そして、各セル S_i の中から典型的な1点 $X_r(0; i)$ を選びだし、それを初期状態とする解 $X_r(t; i)$ が初めて Poincaré 断面 S に戻るまでに描く軌道を Γ_i と定義する。図 7.1 を参照せよ。以降、これら $\{\Gamma_i\}$ を代表軌道とよぶことにする。

カオスアトラクターのある近傍において、以下の条件を満たす滑らかな座標変換 (R, φ) が存在すると仮定する：

$$R(X) \in \mathbb{R}^{m-1}, \quad \varphi(X) \in [0, 2\pi],$$

$$\varphi(X) = 0 \iff X \in S,$$

および

$$\frac{d\varphi(X_r(t; i))}{dt} = \omega(i) := \frac{2\pi}{T(i)} \quad \text{if } 0 < t < T(i). \quad (7.1)$$

なお、区間 $[0, 2\pi]$ の端点 $0, 2\pi$ は同一視する。関数 $T(i)$ は Poincaré 断面 S 上の点 $X_r(0; i)$ が有する S への再帰時間である。上記の仮定は、少なくとも直観的には、カオス振動子において一般的に成り立つように思える。以降、 $R(X(t))$ と $\varphi(X(t))$ をそれぞれ単に $R(t)$, $\varphi(t)$ と書くことにする。

ここで、状態変数 R の時間発展方程式は単純に

$$\frac{dR}{dt} = F_R(R, \varphi) \quad (7.2)$$

と表すことができる。これは式 (4.2a) と同じものである。一方、状態変数 φ の時間発展方程式に関しては、より手の込んだ表現が必要となる。いま、Poincaré 断面 S への n 回目の復帰の時

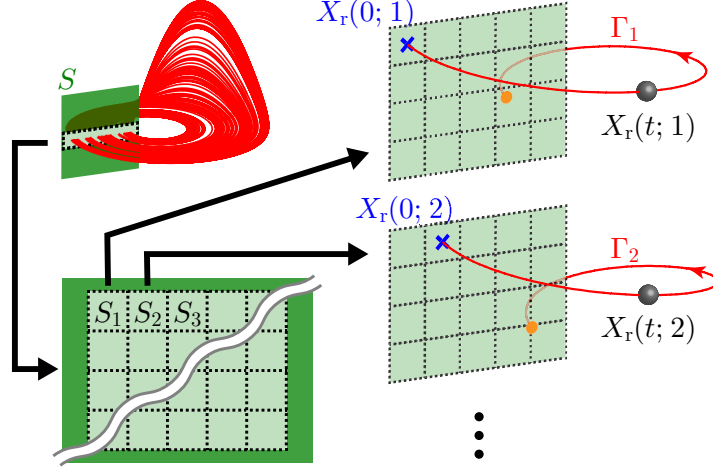


図 7.1: セル $\{S_i\}$ および代表軌道 $\{\Gamma_i\}$ の構成.

刻を $\mathcal{T}_n$ とし, 時刻 $\mathcal{T}_n$ において系の状態が属しているセルに注目してそのセル番号 (すなわち添字 i の値) を $\mathcal{C}_n$ としよう. すると, φ の時間発展方程式は, スカラー場 $\rho(R, \varphi)$ を用いて次のように表すことができる:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\mathcal{C}_n) + \rho(R, \varphi) \quad \text{for } t \in (\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_{n+1}). \quad (7.3)$$

これは, 各区間 $(\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_{n+1})$ においては, 式 (4.2b) と同じものである. しかし, ひとたび $t = \mathcal{T}_{n+1}$ となる, すなわち状態が S に復帰すると, ω が次のセルの値に更新される, という新たな機構が付け加えられている. なお, 条件 (7.1) より, スカラー場 $\rho(R, \varphi)$ には次の条件が課される:

$$\rho(R_r(t - \mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n), \varphi(t)) = 0, \quad (7.4)$$

ただし $R_r(t; i) := R(X_r(t; i))$. これは式 (4.3b) に対応している.

次に, 系が微小摂動 $\varepsilon p(X, t)$ を受けている (すなわち系が式 (2.7) によって記述される) 状況を考えよう. 4.2 節で考察したように, このとき, 式 (7.2) および式 (7.3) は

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_t = F_R(R(t), \varphi(t)) + \varepsilon \left. \frac{\partial R(X)}{\partial X} \right|_{X=X(t)} p(X, t), \quad (7.5)$$

$$\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_t = \omega(\mathcal{C}_n) + \rho(R(t), \varphi(t)) + \varepsilon \text{grad}_X \varphi(X)|_{X=X(t)} \cdot p(X(t), t) \quad (7.6)$$

へと書き換わる. つまり, 状態変数 R, φ の時間発展は, ある種の感受関数に依存して影響を受けることになる.

いま, 状態変数 R について, 代表軌道からのずれを $\delta R(t)$ としよう. すなわち,

$$\delta R(t) := R(t) - R_r(t - \mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n) \quad \text{for } t \in (\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_{n+1}].$$

また, Poincaré 断面 S は十分細かく分割されており, $\|\delta R(t)\|$ はつねに微量と見なせるとしよう. 高次の微量を無視し, さらに条件 (7.4) を使うことにより, 式 (7.5), (7.6) から次の関係式が得られる:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \delta R \right|_t &= \left. \frac{\partial F_R}{\partial R} \right|_{\substack{R=R_r(t-\mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n) \\ \varphi=\omega(\mathcal{C}_n)(t-\mathcal{T}_n)}} \delta R(t) \\ &+ \varepsilon \left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{X=X_r(t-\mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n)} \tilde{p}(\omega(\mathcal{C}_n)(t - \mathcal{T}_n), t; \mathcal{C}_n), \end{aligned} \quad (7.7a)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_t &= \omega(\mathcal{C}_n) + \text{grad}_R \rho(R, \varphi) \Big|_{\substack{R=R_r(t-\mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n) \\ \varphi=\omega(\mathcal{C}_n)(t-\mathcal{T}_n)}} \cdot \delta R(t) \\ &\quad + \varepsilon \text{grad}_X \varphi(X) \Big|_{X=X_r(t-\mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n)} \cdot \tilde{p}(\omega(\mathcal{C}_n)(t-\mathcal{T}_n), t; \mathcal{C}_n), \end{aligned} \quad (7.7b)$$

ただし

$$\tilde{p}(\varphi, t; i) := p[X_r(\varphi/\omega(i); i), t].$$

ここで, $\delta R_n := R_n - R_r(0; \mathcal{C}_n)$ とおく. ただし, $R_n := R(\mathcal{T}_n)$. 微分方程式 (7.7a) は, 区間 $\mathcal{T}_n < t \leq \mathcal{T}_{n+1}$ で定義された次の $\delta R(t)$ を解にもつ:

$$\delta R(t) \simeq \alpha^{-1}(t - \mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n) \left[\delta R_n + \varepsilon \int_{\mathcal{T}_n}^t \alpha(s - \mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n) \tilde{p}(\omega(\mathcal{C}_n)(s - \mathcal{T}_n), s; \mathcal{C}_n) ds \right], \quad (7.8)$$

ただし α は斉次方程式

$$\left. \frac{d}{dt} \delta R \right|_t = \left. \frac{\partial F_R}{\partial R} \right|_{\substack{R=R_r(t-\mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n) \\ \varphi=\omega(\mathcal{C}_n)(t-\mathcal{T}_n)}} \delta R(t)$$

の解核行列 $A(t, s; i)$ によって $\alpha(t; i) := A(0, t; i)$ と定義される関数である. 式 (7.8) より, 次の再帰方程式が得られる:

$$R_{n+1} \simeq f_0(\mathcal{C}_n) + f_1(\mathcal{C}_n) \left[\delta R_n + \varepsilon \int_{\mathcal{T}_n}^{\mathcal{T}_{n+1}} \alpha(t - \mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n) \tilde{p}(\omega(\mathcal{C}_n)(t - \mathcal{T}_n), t; \mathcal{C}_n) dt \right], \quad (7.9)$$

ただし

$$f_0(i) := R_r(T(i); i), \quad f_1(i) := \alpha^{-1}(T(i); i).$$

また, 解 (7.8) を式 (7.7b) に代入すれば, φ に関して次の時間発展方程式が得られる:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_t &\simeq \omega(\mathcal{C}_n) + \varepsilon Z(\omega(\mathcal{C}_n)(t - \mathcal{T}_n); \mathcal{C}_n) \cdot \tilde{p}(\omega(\mathcal{C}_n)(t - \mathcal{T}_n), t; \mathcal{C}_n) \\ &\quad + \beta(t - \mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n) \cdot \left[\delta R_n + \varepsilon \int_{\mathcal{T}_n}^t \alpha(s - \mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n) \tilde{p}(\omega(\mathcal{C}_n)(s - \mathcal{T}_n), s; \mathcal{C}_n) ds \right], \end{aligned} \quad (7.10)$$

ただし

$$\beta(t; i) := \alpha^{-1}(t; i)^\top \text{grad}_R \rho(R, \varphi) \Big|_{\substack{R=R_r(t-\mathcal{T}_n; \mathcal{C}_n) \\ \varphi=\omega(\mathcal{C}_n)(t-\mathcal{T}_n)}},$$

$$Z(\varphi; i) := \text{grad}_X \varphi(X) \Big|_{X=X_r[\varphi/\omega(i); i]}.$$

式 (7.10) において, 右辺第3項は代表軌道からのずれにより生じる振動数の増分を表している. この項の影響を弱めるため, いま, Poincaré 断面 S は無摂動系 (2.1) の最適等位相面 [55] から選ばれているとしよう. 最適等位相面とは, 最適化アルゴリズムを用いて構成される, カオス振動子に対する近似的なアイソクロンである. それは, カオス振動子の平均周期をサンプリング間隔に用いて系の状態を記録し, 標本点の集合 (ストロボ集合) に対して最小二乗法などで曲面をフィッティングすることにより得られる. Poincaré 断面として最適等位相面を採用することで, 再帰時間の R 依存性は非常に弱くなる. つまり, 式 (7.10) の右辺において, 第3項が第2項に比べ極めて小さくなる. そこで, 微小項を無視することにより, 式 (7.10) を

$$\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_t = \omega(\mathcal{C}_n) + \varepsilon Z(\omega(\mathcal{C}_n)(t - \mathcal{T}_n); \mathcal{C}_n) \cdot \tilde{p}(\omega(\mathcal{C}_n)(t - \mathcal{T}_n), t; \mathcal{C}_n) \quad (7.11)$$

へと書き換えることができる。

式 (7.11) は位相振動子モデル (2.9) に近い形をしているが、 $\mathcal{C}_n$ 依存性をもつという点で未だ異なっている。この $\mathcal{C}_n$ 依存性を消すために、もう一步、考察を進めよう。議論を簡単にするため、摂動を周期外力 $\varepsilon p(t)$ に限定する。また、この周期外力は無摂動系 (2.1) の平均振動数に近い角振動数 Ω をもつとする。この場合、位相差 $\psi(t) := \varphi(t) - \Omega t$ の時間発展は $R(t)$ の時間発展に比べて非常に遅い。したがって、 R の運動の時間スケールでは、 ψ を定数と扱ってもよいだろう。そうすると、式 (7.9) は写像系

$$R_{n+1} \simeq f_0(\mathcal{C}_n) + f_1(\mathcal{C}_n) [\delta R_n + \varepsilon H(\mathcal{C}_n, \psi)] \quad (7.12)$$

に簡単化される。ただし、

$$H(i, \psi) := \frac{1}{\omega(i)} \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi/\omega(i); i) \tilde{p}(\varphi - \psi) d\varphi$$

および $\tilde{p}(\varphi) := p(\varphi/\Omega)$ 。この写像を繰り返すことにより、位相差が ψ のタイミングで各セル S_i を訪れる確率（すなわち自然測度） $\mu_i(\psi; \varepsilon)$ が生成される。そして、位相差 ψ の運動は、その μ_i に関して平均化された時間発展方程式

$$\left. \frac{d\psi}{dt} \right|_t = \delta\omega(\psi(t); \varepsilon) + \varepsilon G(\psi(t); \varepsilon) \quad (7.13)$$

に従うことになる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega(\psi; \varepsilon) &:= \bar{\omega}(\psi; \varepsilon) - \Omega, & \bar{\omega}(\psi; \varepsilon) &:= \frac{2\pi}{\bar{T}(\psi; \varepsilon)}, \\ \bar{T}(\psi; \varepsilon) &:= \sum_i \mu_i(\psi; \varepsilon) T(i), \\ G(\psi; \varepsilon) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{Z}(\varphi, \psi; \varepsilon) \cdot \tilde{p}(\varphi - \psi) d\varphi, \\ \bar{Z}(\varphi, \psi; \varepsilon) &:= \sum_i \mu_i(\psi; \varepsilon) \frac{T(i)}{\bar{T}(\psi; \varepsilon)} Z(\varphi; i). \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

時間発展方程式 (7.13) は、もはや $\mathcal{C}_n$ に依存していない。

位相差 ψ が時間発展方程式 (7.13) に従うということの意味を考えよう。時間発展方程式 (7.13) は、位相振動子

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_t = \bar{\omega}(\psi; \varepsilon) + \varepsilon \bar{Z}(\phi(t), \psi; \varepsilon) \cdot p(t) \quad (7.15)$$

を平均化して得られる方程式に等しい。この位相振動子は、特性量 $\bar{\omega}$, $\bar{Z}$ が式 (7.14) を介して μ_i に依存しているという意味で、写像系 (7.12) によって調節されている。要するに、カオス振動子のリズムダイナミクスは、写像系 (7.12) によって調節される位相振動子 (7.15) として記述されるのである。すなわち、時間発展方程式 (7.13) の存在は、「カオス振動子の同期特性は map-adjusted phase oscillator (MAPO) モデルによって決定される」ということを意味しているのである。

以上の考察から、カオス位相同期の解析においては MAPO モデルが縮約記述の一つとして利用できる、ということが判明した。

7.2 具体例: Rössler 振動子の縮約記述

前節で導出した縮約記述を, 正弦波外力を受ける Rössler 振動子 [48, 52]

$$\frac{dx}{dt} = -y - z + \varepsilon \sin \Omega t, \quad \frac{dy}{dt} = x + 0.2y, \quad \frac{dz}{dt} = 0.2 + z(x - 5.7) \quad (7.16)$$

に対して具体的に用いてみよう. Poincaré 断面 S には図 7.2(a) の最適等位相面を採用する. この Poincaré 断面であれば, 図 7.2(b) に示されているように, 再帰時間のばらつきがかなり抑えられる. したがって, 式 (7.11) の導出における近似は妥当であろう. 式 (7.11) の成立を認めれば, 自然振動数 $\{\omega(i)\}$ と感受関数 $\{Z(\varphi; i)\}$ は数値シミュレーションから容易に求められる. さらに, これらが求まれば, 式 (7.14) によって定義される $\delta\omega$ と G とが計算できる. そうして構成された方程式 (7.13) を積分して得られたのが図 7.2(c) である. 全体としては, 元のモデル (7.16) の振動数変化をよく再現している. しかし, 詳しく見ると, MAPO モデルから得られた Arnold の舌には, 元のモデルの方には見られないいくつかの突起が存在している.

これらの突起部において何が起きているかを見るために, 突起部での瞬時振動数差 $\delta\omega$ と結合関数 G とを調べよう. 突起の一つ $(\varepsilon, \Omega) = (0.021, 1.077)$ における $\delta\omega, G$ をプロットしたものが図 7.2(d) である. 図中の曲線にはいくつかの ψ の値において飛びがあり, この飛びが突起を生み出す原因となっている. 詳細な解析の結果, これらの飛びが発生している箇所は, 実は R に関する写像系 (7.12) に狭い周期窓が生じるような ψ の値に対応することがわかっている. Arnold の舌に現れた突起は, R の運動が周期的になることで劇的に同期が発生しやすくなる, ということを反映したものである.

ただ, 元のモデルではこのような突起は生じていない. その理由は, 元のモデルにおいては位相差 ψ が R の運動の時間スケールでも (わずかながら) 揺らぐことにある. この揺らぎのために, R が狭い周期窓の中にとどまり続けることができないのである. 式 (7.12) の導出においては, ψ を定数と見なして揺らぎを完全に無視してしまっている. それが元のモデルとの違いを生んだのである. MAPO モデルから得られた上記の結果は, 「 ψ の運動のもつ速い揺らぎがカオス振動子の振動数変化を滑らかにする役割を担っている」ということを示している.

位相差 ψ の揺らぎと同様の効果をもたらすように, 移動平均をとって $\delta\omega$ および G を平滑化してみよう. 平滑化された $\delta\omega, G$ を用いれば, 図 7.2(e) が得られる. 元のモデルの振動数変化をほぼ完璧に再現している.

7.3 具体例: Lorenz 振動子の縮約記述

別の例として, 正弦波外力を受ける Lorenz 振動子 [33, 43]

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x) + \varepsilon \sin \Omega t, \quad \frac{dy}{dt} = x(210 - z) - y, \quad \frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z \quad (7.17)$$

を取り上げよう. Poincaré 断面 S には図 7.3(a) の平面を採用する. この平面は厳密には最適等位相面ではないが, 十分に再帰時間のばらつきを抑えられる. 実際, 図 7.3(b) に示すように, 再帰時間分布は $\pm 2\%$ の範囲に収まっており, これは Rössler 振動子において最適等位相面を採用した場合と同じ状況である. 結果として, 図 7.3(c) に示すように, この例に対しても MAPO モデルは元のモデル (7.17) の振動数変化を非常によく再現する.

Lorenz 振動子 (7.17) の Arnold の舌は, $\varepsilon = \varepsilon_c \approx 0.45$ において Ω 方向に急激に広がっている. 前節で述べた Arnold の舌の突起がそうであったように, この拡大も周期窓の出現を反映し

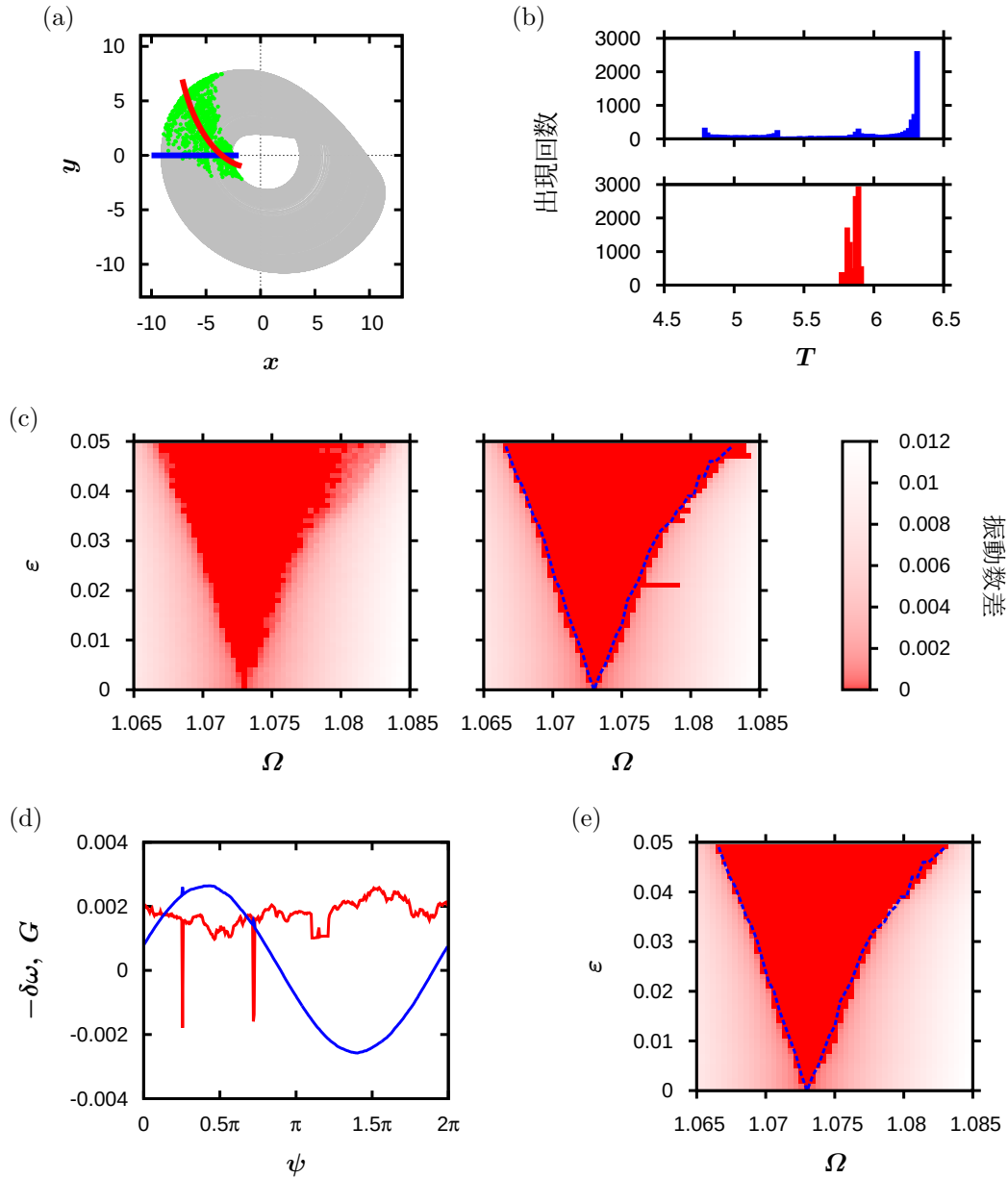


図 7.2: Rössler 振動子 (7.16) の縮約記述に関する数値実験の結果. (a) 元のモデルの軌道 (灰色実線), ストロボ集合 (緑点), および最適等位相面 (赤色実線). この最適等位相面を Poincaré 断面 S として採用する. 青色実線は, カオス位相同期に関する研究で伝統的によく用いられてきた Poincaré 断面 ($x < 0, y = 0$) である. (b) Poincaré 断面への再帰時間分布. 上は伝統的な Poincaré 断面に対する分布であり, 下は採用された Poincaré 断面 (最適等位相面) に対する分布である. (c) 系の平均振動数と周期外力の振動数 Ω との差. 左は式 (7.16) を直に数値積分して得られた結果であり, 右は MAPO モデルから得られた結果である. 比較のため, 左図の Arnold の舌の輪郭を右図に青色破線で描く. 全体としてはよく一致しているが, MAPO モデルから得られた結果の方には Arnold の舌にいくつかの突起が見られる. (d) 突起の一つ $(\epsilon, \Omega) = (0.021, 1.077)$ における瞬時振動数差 $\delta\omega$ (赤色実線) および結合関数 G (青色実線). いくつかの ψ の値において飛びが見られる. 移動平均をとってこれらの飛びをなくしてやれば, 元のモデルの振動数変化にさらによく一致する結果 (図 (e)) が得られる.

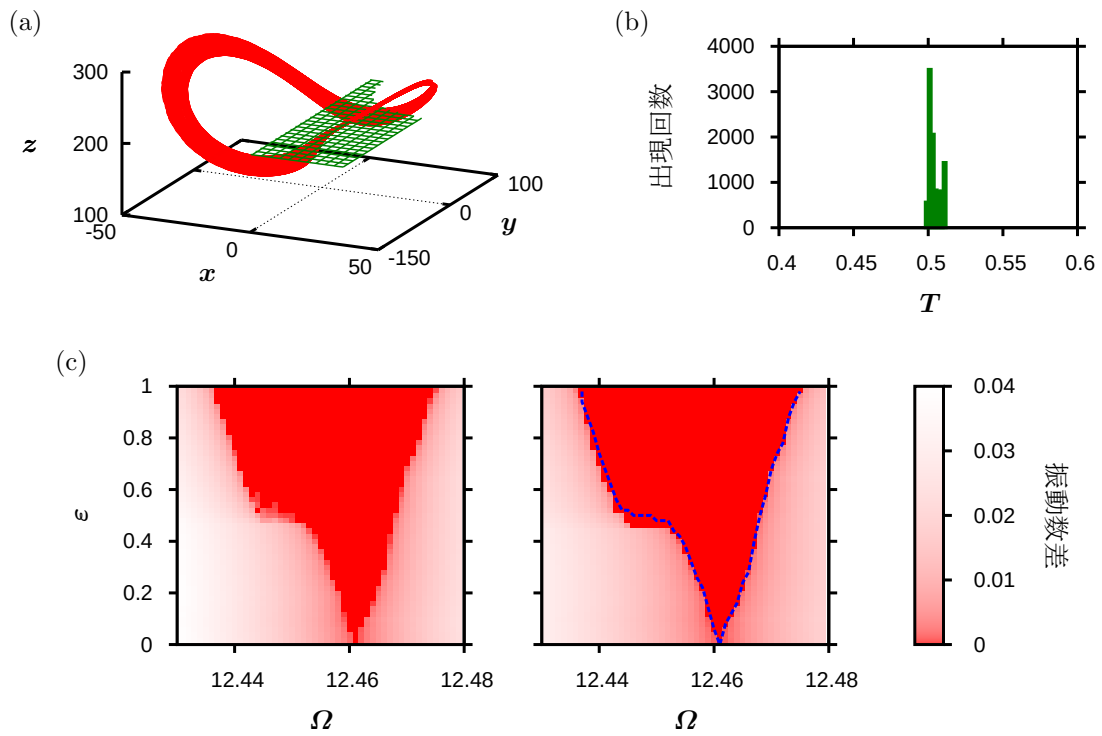


図 7.3: Lorenz 振動子 (7.17) の縮約記述に関する数値実験の結果. (a) 元のモデルの軌道 (赤色実線) と採用された Poincaré 断面 (緑色メッシュ面). (b) Poincaré 断面への再帰時間分布. (c) 系の平均振動数と周期外力の振動数 Ω との差. 左は式 (7.16) を直に数値積分して得られた結果であり, 右は MAPO モデルから得られた結果である. MAPO モデルの数値シミュレーションにおいては, 移動平均をとって平滑化した $\delta\omega$, G を用いた. 比較のため, 左図の Arnold の舌の輪郭を右図に青色破線で描く. MAPO モデルは元のモデルの振動数変化をよく再現している.

ている。ただ一点異なるのは、この拡大に対応する周期窓は広く、 ψ の揺らぎが存在してもなお Arnold の舌に顕著な影響をもたらすということである。ここで、境界 $\varepsilon = \varepsilon_c$ の上方でも下方でも MAPO モデルは振動数変化を正確に再現していることに注意しよう。元のモデルにおいて位相以外の状態変数が摂動によって振る舞いを変化させるような状況であっても、MAPO モデルは正しく機能している。カオス振動子の縮約記述は文献 [3, 28, 45] などでも試みられているが、いずれも位相以外の状態変数の振る舞いが定性的に変化するような状況は考慮していない。しかし、この Lorenz 振動子の例が示すように、位相以外の状態変数の振る舞いが定性的に変化すると、振動子の同期特性は劇的に変化する。しかも、このような非位相変数の振る舞いの定性的変化は、カオス振動子では頻繁に見られる現象である。カオス振動子に対する縮約理論を構築するうえでは、非位相変数の振る舞いの定性的変化は考慮すべき事項である。非位相変数が摂動によって振る舞いを変化させるような状況であっても元のモデルの振る舞いを再現する MAPO モデルは、カオス位相同期の解析において一定の有用性をもつであろう。

第8章 結論

本稿では、リミットサイクル振動子およびカオス振動子に対する新たな縮約理論を構築し、それを用いて

- リミットサイクル振動子の位相感受性を計測するための方法の開発
- カオス振動子の同期特性が決定されるメカニズムについての考察

を行った。

リミットサイクル振動子に対しては、第2章で述べた位相記述とよばれる縮約理論がすでに知られており広く用いられている。しかしながら、そこで採用されている位相変数の定義が実験において使いやすいものではないため、異なる定義の位相が実験においては用いられ、それが結果として理論と実験との食い違いをしばしば生じさせている。本稿の縮約理論では、この問題を考慮し、実験の状況に即した定義の位相を状態変数として採用している。本稿の提案する縮約記述を用いれば、実験への応用の容易な理論を組み立てることができる。

このことを利用して行ったのが、4.3節で述べた、新たな位相応答曲線計測手法の開発である。位相応答曲線の計測手法としては、第3章で紹介した方法などがすでに知られている。それらの方法の中でも特に先行研究 [42] で提案された計測手法は、優れたノイズ耐性をもち、実験系などで位相応答曲線を計測する際には非常に有用であるように思われた。しかし、その理論的妥当性は伝統的な位相記述に依拠しているため、4.1節で示したように、一般的な実験設定のもとでは正しく機能しない。そこで本稿では、McWSTA法とよぶ新たな計測手法を提案し、上記の新たな縮約記述を介してその妥当性を証明した。第5章で紹介した適用例が示しているように、McWSTA法を用いれば、ノイズの影響を受けにくい計測を一般的な実験設定のもとで実現することができる。

また、第6章では、McWSTA法をカオス振動子に適用し、得られた曲線が“カオス振動子の位相応答曲線”とよびうる性質を備えていることを確認した。この結果は、位相記述の適用対象がカオス振動子に拡張できる可能性を示している。そのことを踏まえ、第7章ではカオス振動子に対する縮約理論を構築した。

第7章では、さらに、カオス振動子に対するこの縮約理論を典型的なカオス振動子に適用した。その結果、カオス振動子の位相に見られる短い時間スケールでの揺らぎや位相以外の状態変数のダイナミクスに見られる分岐現象が同期特性にどのような影響をもたらすかが明らかになった。

以上のいずれの結果も、リズム現象に関する今後の研究に大いに役立つであろう。

謝辞

本研究は、著者が京都大学 大学院情報学研究科 複雑系科学専攻 博士後期課程在学中に、同大学 大学院情報学研究科 青柳富誌生教授の指導のもとに行ったものである。本研究を進めるにあたり丁寧かつ熱心にご指導いただいた青柳富誌生教授に深謝いたします。また、本稿をご精読いただきました同大学 大学院情報学研究科 西村直志教授、船越満明教授、宮崎修次講師に心より感謝申し上げます。

第4, 5章の研究を進めるにあたってはサイボウズ株式会社 太田絵一郎氏、電気通信大学 大学院情報理工学研究科 船戸徹郎助教、京都大学 大学院工学研究科 青井伸也講師、京都大学 土屋和雄名誉教授との議論が大きな助けとなりました。また、第6, 7章の研究を進めるにあたっては大分大学 工学部 末谷大道教授との議論が大きな助けとなりました。ご協力いただいた皆様に対し、ここに感謝の意を表します。

著者が非線形系に興味をもつきっかけとなったのは、京都大学 工学部在学時に受けた藤坂博一教授（当時、2007年8月逝去）の講義である。藤坂先生の講義からは、さまざまな方法でアプローチしてもなお明らかにし尽くせない非線形系（特にカオス系）の不思議さが感じられた。そのときの感動があったからこそ、本研究をやり遂げることができたのだと思う。非線形系の不思議さに触れる機会を与えてくださった藤坂先生に感謝いたします。

最後になりましたが、研究生生活全般にわたりさまざまな相談に乗っていただいた東京大学 大学院情報理工学系研究科 森野佳生特任助教ならびに香川大学 教育学部 青木高明准教授に対し、ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] ANDRONOV, A. A., VITT, A. A., AND KHAĬKIN, S. É. *Theory of Oscillators*. Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [2] BABLOYANTZ, A., AND DESTEXHE, A. Is the normal heart a periodic oscillator? *Biological Cybernetics* 58, 3 (1988), 203–211.
- [3] BECK, M., AND JOSIĆ, K. A geometric theory of chaotic phase synchronization. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 13, 1 (2003), 247–258.
- [4] BLEKHMAN, I. I. *Synchronization in Science and Technology*. American Society of Mechanical Engineers, New York, 1988.
- [5] BLEKHMAN, I. I. *Vibrational Mechanics: Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications*. World Scientific, Singapore, 2000.
- [6] BROWN, E., MOEHLIS, J., AND HOLMES, P. On the phase reduction and response dynamics of neural oscillator populations. *Neural Computation* 16, 4 (2004), 673–715.
- [7] BUZSÁKI, G., ANASTASSIOU, C. A., AND KOCH, C. The origin of extracellular fields and currents — EEG, ECoG, LFP and spikes. *Nature Reviews Neuroscience* 13, 6 (2012), 407–420.
- [8] CANAVIER, C. C., BUTERA, R. J., DROR, R. O., BAXTER, D. A., CLARK, J. W., AND BYRNE, J. H. Phase response characteristics of model neurons determine which patterns are expressed in a ring circuit model of gait generation. *Biological Cybernetics* 77, 6 (1997), 367–380.
- [9] CODDINGTON, E. A., AND LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [10] CORRON, N. J. A simple circuit implementation of a van der Pol oscillator. in *CCREWeb.org* [<http://ccreweb.org/documents/physics/chaos/vdp2006.html>], 2006.
- [11] COSTA, M., PIMENTEL, I. R., SANTIAGO, T., SARREIRA, P., MELO, J., AND DUCLA-SOARES, E. No evidence of chaos in the heart rate variability of normal and cardiac transplant human subjects. *Journal of Cardiovascular Electrophysiology* 10, 10 (1999), 1350–1357.
- [12] ERMENTROUT, B. Type I membranes, phase resetting curves, and synchrony. *Neural Computation* 8, 5 (1996), 979–1001.

- [13] ERMENTROUT, G. B., GALÁN, R. F., AND URBAN, N. N. Relating neural dynamics to neural coding. *Physical Review Letters* 99, 24 (2007), 248103.
- [14] ERMENTROUT, G. B., AND KOPELL, N. Multiple pulse interactions and averaging in systems of coupled neural oscillators. *Journal of Mathematical Biology* 29, 3 (1991), 195–217.
- [15] FELDMAN, A. G., KRASOVSKY, T., BANIÑA, M. C., LAMONTAGNE, A., AND LEVIN, M. F. Changes in the referent body location and configuration may underlie human gait, as confirmed by findings of multi-muscle activity minimizations and phase resetting. *Experimental Brain Research* 210, 1 (2011), 91–115.
- [16] FUNATO, T., YAMAMOTO, Y., AOI, S., IMAI, T., AOYAGI, T., TOMITA, N., AND TSUCHIYA, K. Evaluation of the phase-dependent rhythm control of human walking using phase response curves. *PLoS Computational Biology* 12, 5 (2016), 1004950.
- [17] GLASS, L. Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature* 410, 6825 (2001), 277–284.
- [18] GLASS, L., AND MACKEY, M. C. *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life*. Princeton University Press, Princeton, 1988.
- [19] GLASS, L., NAGAI, Y., HALL, K., TALAJIC, M., AND NATTEL, S. Predicting the entrainment of reentrant cardiac waves using phase resetting curves. *Physical Review E* 65, 2 (2002), 021908.
- [20] GOLDOBIN, D. S., TERAMAE, J., NAKAO, H., AND ERMENTROUT, G. B. Dynamics of limit-cycle oscillators subject to general noise. *Physical Review Letters* 105, 15 (2010), 154101.
- [21] GRAY, P., AND SCOTT, S. K. *Chemical Oscillations and Instabilities: Non-linear Chemical Kinetics*. Oxford University Press, New York, 1994.
- [22] GUCKENHEIMER, J. Isochrons and phaseless sets. *Journal of Mathematical Biology* 1, 3 (1975), 259–273.
- [23] HODGKIN, A. L., AND HUXLEY, A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology* 117, 4 (1952), 500–544.
- [24] HOPPENSTEADT, F. C., AND IZHIKEVICH, E. M. *Weakly Connected Neural Networks*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [25] IMAI, T., AND AOYAGI, T. Improvement effect of measuring phase response curves by using multicycle data. *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE* 7, 2 (2016), 58–65.
- [26] IMAI, T., OTA, K., AND AOYAGI, T. Robust measurements of phase response curves realized via multicycle weighted spike-triggered averages. *Journal of the Physical Society of Japan* 86, 2 (2017), 024009.

- [27] IZHIKEVICH, E. M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, Cambridge, MA, 2007.
- [28] JOSIĆ, K., AND MAR, D. J. Phase synchronization of chaotic systems with small phase diffusion. *Physical Review E* 64, 5 (2001), 056234.
- [29] KANTERS, J. K., HOLSTEIN-RATHLOU, N.-H., AND AGNER, E. Lack of evidence for low-dimensional chaos in heart rate variability. *Journal of Cardiovascular Electrophysiology* 5, 7 (1994), 591–601.
- [30] KOBAYASHI, M., NOMURA, T., AND SATO, S. Phase-dependent response during human locomotion to impulsive perturbation and its interpretation based on neural mechanism. *Japanese Journal of Medical Electronics and Biological Engineering* 38, 1 (2000), 20–32.
- [31] KURAMOTO, Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [32] LANDAU, L. D. On the problem of turbulence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS* 44 (1944), 311–314.
- [33] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, 2 (1963), 130–141.
- [34] MANRUBIA, S. C., MIKHAILOV, A. S., AND ZANETTE, D. H. *Emergence of Dynamical Order: Synchronization Phenomena in Complex Systems*. World Scientific, Singapore, 2004.
- [35] MAY, R. M., AND MCLEAN, A. R. *Theoretical Ecology: Principles and Applications*. Oxford University Press, New York, 2007.
- [36] NAKAO, H., YANAGITA, T., AND KAWAMURA, Y. Phase description of stable limit-cycle solutions in reaction-diffusion systems. *Procedia IUTAM* 5 (2012), 227–233.
- [37] NAKAO, H., YANAGITA, T., AND KAWAMURA, Y. Phase-reduction approach to synchronization of spatiotemporal rhythms in reaction-diffusion systems. *Physical Review X* 4, 2 (2014), 021032.
- [38] NANA, B., AND WOAF, P. Synchronization in a ring of four mutually coupled van der Pol oscillators: Theory and experiment. *Physical Review E* 74 (2006), 046213.
- [39] NESSLER, J. A., SPARGO, T., CRAIG-JONES, A., AND MILTON, J. G. Phase resetting behavior in human gait is influenced by treadmill walking speed. *Gait & Posture* 43 (2016), 187–191.
- [40] OPRISAN, S. A., PRINZ, A. A., AND CANAVIER, C. C. Phase resetting and phase locking in hybrid circuits of one model and one biological neuron. *Biophysical Journal* 87, 4 (2004), 2283–2298.
- [41] OSIPOV, G. V., KURTHS, J., AND ZHOU, C. *Synchronization in Oscillatory Networks*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

- [42] OTA, K., NOMURA, M., AND AOYAGI, T. Weighted spike-triggered average of a fluctuating stimulus yielding the phase response curve. *Physical Review Letters* 103, 2 (2009), 024101.
- [43] PARK, E.-H., ZAKS, M. A., AND KURTHS, J. Phase synchronization in the forced Lorenz system. *Physical Review E* 60, 6 (1999), 6627–6638.
- [44] PIKOVSKY, A., ROSENBLUM, M., AND KURTHS, J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [45] PIKOVSKY, A., ZAKS, M., ROSENBLUM, M., OSIPOV, G., AND KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillations in terms of periodic orbits. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 7, 4 (1997), 680–687.
- [46] PIKOVSKY, A. S. Phase synchronization of chaotic oscillations by a periodic external field. *Soviet Journal of Communications Technology and Electronics* 30, 10 (1985), 1970–1974.
- [47] PIKOVSKY, A. S., ROSENBLUM, M. G., AND KURTHS, J. Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators. *Europhysics Letters* 34 (1996), 165–170.
- [48] PIKOVSKY, A. S., ROSENBLUM, M. G., OSIPOV, G. V., AND KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 104, 3-4 (1997), 219–238.
- [49] POON, C.-S., AND MERRILL, C. K. Decrease of cardiac chaos in congestive heart failure. *Nature* 389, 6650 (1997), 492–495.
- [50] PREYER, A. J., AND BUTERA, R. J. Neuronal oscillators in *Aplysia californica* that demonstrate weak coupling in vitro. *Physical Review Letters* 95, 13 (2005), 138103.
- [51] ROSENBLUM, M. G., PIKOVSKY, A. S., AND KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical Review Letters* 76, 11 (1996), 1804–1807.
- [52] RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A* 57, 5 (1976), 397–398.
- [53] SAKAGUCHI, H. Phase transition in globally coupled Rössler oscillators. *Physical Review E* 61, 6 (2000), 7212–7214.
- [54] SCHULTHEISS, N. W., PRINZ, A. A., AND BUTERA, R. J., Eds. *Phase Response Curves in Neuroscience: Theory, Experiment, and Analysis*. Springer Science+Business Media, New York, 2012.
- [55] SCHWABEDAL, J. T. C., PIKOVSKY, A., KRALEMANN, B., AND ROSENBLUM, M. Optimal phase description of chaotic oscillators. *Physical Review E* 85 (2012), 026216.
- [56] STONE, E. F. Frequency entrainment of a phase coherent attractor. *Physics Letters A* 163, 5-6 (1992), 367–374.

- [57] STUART, J. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows: Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics* 9, 03 (1960), 353–370.
- [58] TERAMAE, J., NAKAO, H., AND ERMENTROUT, G. B. Stochastic phase reduction for a general class of noisy limit cycle oscillators. *Physical Review Letters* 102, 19 (2009), 194102.
- [59] VAN DER POL, B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations. *Radio Review* 1 (1920), 701–710, 754–762.
- [60] WANG, X.-J. Neurophysiological and computational principles of cortical rhythms in cognition. *Physiological Reviews* 90, 3 (2010), 1195–1268.
- [61] WINFREE, A. T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology* 16, 1 (1967), 15–42.
- [62] WINFREE, A. T. *The Geometry of Biological Time*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [63] YOSHIMURA, K., AND ARAI, K. Phase reduction of stochastic limit cycle oscillators. *Physical Review Letters* 101, 15 (2008), 154101.