

オートマタ群と箱玉系 (Automata Groups and Box-Ball Systems)

By

Satoshi TSUJIMOTO*

Tsuyoshi KATO**

Andrzej ZUK***

Abstract

We give the automata which describe the time evolution rules of the box-ball system with a carrier and discuss the relation with the lamplighter group known as an automata group. In particular we present a spectral analysis of the stochastic matrix induced by the automaton which corresponds to the box-ball system with a carrier, and make a conjecture about the spectrum of the stochastic processes.

§ 1. はじめに

可積分系における箱玉系とは、高橋、薩摩によって1990年に発見されたソリトンセルオートマトンの一つであり、その後の超離散化手法の確立へと繋がり、現在もなお発展している重要なモデルである [8, 9]. また、オートマタ群と呼ばれる分野においても活発な研究活動がなされている [1, 3, 4]. オートマタ群に関連する問題として Burnside 問題, Milnor 問題, Atiyah 問題などがあり, Aleshin-Grigorchuk 群, 点灯夫 (Lamplighter) 群などのオートマタ群によって解かれてきた. 本稿では, これまで個別の分野として発展してきた箱玉系とオートマタ群の各理論を相補的にとらえ関連付けることを試みる. 特に,

Received February 21, 2014. Revised May 25, 2014.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 51K10 (primary), 39A13, 35B20 (secondary)

Key Words: Automata groups, integrable systems, piece-wise linear system

This work was partially supported by KAKENHI (25287009, 25400110) and the Aihara project through the FIRST program (initiated by CSTP) from JSPS

*Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto 606-8501, Japan.

e-mail: tujimoto@i.kyoto-u.ac.jp

**Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.

e-mail: tkato@math.kyoto-u.ac.jp

***Institut de Mathématiques, Université Paris 7, 13 rue Albert Einstein, 75013 Paris, France.

e-mail: andrzej.zuk@imj-prg.fr

オートマタ群で用いられる手法を箱玉系に適用することで新しい箱玉系の解析手法を提案したい。

§2. オートマトン

本節では、決定性有限オートマトンの一つであるミーリ・オートマトン (mealy automaton) を導入し、オートマタ群の定義を与える。

定義 2.1. ミーリ・オートマトン A は以下の4つ組 (S, Q, ϕ, ψ) で特徴づけられる。

- 入力および出力文字集合 $S = \{0, 1, \dots, d-1\}$
- 有限の状態集合 Q
- 状態遷移関数 $\phi: Q \times S \rightarrow Q$
- 出力関数 $\psi: Q \times S \rightarrow S$

状態遷移図を用いてオートマトン A を表すことも多い。状態を頂点に対応させることで同一視し、2つの頂点 q と r の間で $\phi(q, i) = r$ が成り立つとき、頂点 q と頂点 r を q から r に向き付けられた辺で結び、この辺に状態 q における入出力対応の $i|\psi(q, i)$ を書き加えることにする。これにより、オートマトン A に対応する状態遷移図が得られる。

例 2.2 (2状態オートマトン $A = (S, Q, \phi, \psi)$ の例)。

$S = \{0, 1\}$, $Q = \{a, b\}$ とし、状態遷移関数 ϕ と出力関数 ψ をそれぞれ以下で定義する。

$$\begin{aligned} \phi(a, 0) = a, \phi(a, 1) = b, \phi(b, 0) = a, \phi(b, 1) = b, \\ \psi(a, 0) = 1, \psi(a, 1) = 0, \psi(b, 0) = 0, \psi(b, 1) = 1. \end{aligned}$$

このとき、対応する状態遷移図は図1で与えられる。

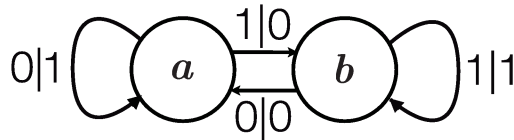


図1. 2状態オートマトン A の状態遷移図

ここで定義したオートマトンに初期状態を付加することで、文字列への標準的な作用が定まる。文字集合 S から生成される文字列の集合 X_S を

$$X_S = \{(s_0, s_1, s_2, \dots) : s_i \in S\}.$$

で定義する. このとき, 任意の $q \in Q$ と $\bar{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots) \in X_S$ に対して, X_S 上の写像

$$A_q : X_S \rightarrow X_S$$

を

$$s'_i = \psi(q_i, s_i), \quad q_{i+1} = \phi(q_i, s_i) \quad (q_0 = q)$$

によって, $A_q(\bar{s}) = (s'_0, s'_1, \dots)$ と定める. これにより, 任意の列 $\bar{q}^j = (q^0, \dots, q^j) \in Q^{j+1}$ から, 時間発展が

$$A_{\bar{q}^j} = A_{q^j} \circ \dots \circ A_{q^0} : X_S \rightarrow X_S.$$

によって与えられる. このとき, オートマトンは, X_S を $d (= |S|)$ 分木 T_d とみなすことにより, 木 T_d への標準的な作用を持つ.

特に, オートマトン A が invertible, すなわち, 初期状態 q を付与された出力関数による写像 $\psi(q, \cdot) : S \rightarrow S$ が全単射ならば, オートマトン A の木 T_d への作用から群を導入することができる. この時, 写像 $\psi(q, \cdot)$ は, d 次対称群 \mathfrak{S}_d の元の一つとみなすことができる. この invertible なオートマトンは, 木 T_d の葉 (端点) の集合に自己同型として作用し, 群が自然に誘導される.

定義 2.3. オートマトン A の木 T_d への作用から, オートマタ群 $G(A)$ が得られる.

$$G(A) = \langle A_{q_1}, A_{q_2}, \dots, A_{q_t} \rangle$$

ここで, q_1, \dots, q_t はオートマトン A の初期状態を表す.

§ 3. 点灯夫群

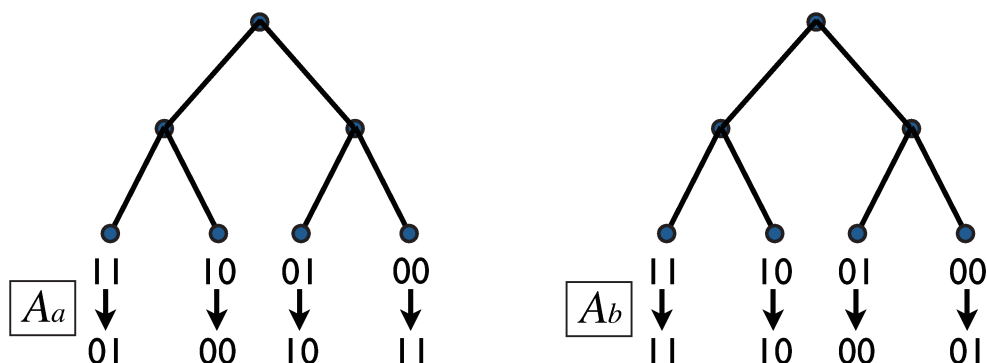
文字集合 S が $\{0, 1\}$ のみの 2 状態オートマトンから得られる群は次の 6 つのみであることが知られている.

- (1) 自明な群; (2) 位数 2 の群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; (3) Klein 群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; (4) 無限位数の巡回群 \mathbb{Z} ; (5) 無限位数の 2 面体群 \mathbb{D}_∞ ; (6) 点灯夫群 $(\oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$.

この中で, 特に点灯夫群は, その群上のランダム・ウォークにおいて特有の性質を持っており [2, 6], 興味深いオートマトン群の例となっている. 点灯夫群を生成するオートマトンの 4 つ組およびその状態遷移図は, それぞれ前節の例 2.2 と図 1 で与えられる. このとき, 点灯夫群

$$\langle A_a, A_b \rangle$$

の 2 つの生成元と, この群の標準的生成元である $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の u と \mathbb{Z} の v との間の対応関係は, それぞれ, A_a は $u^{-1}v$ に対応し, A_b は v に対応している. 各初期状態付オートマトンの高さ 2 の 2 分木への作用は,



となる. また, ここで定義した A_a を 2 進系列 $11111\dots$ に繰り返し作用させると

```

11111111111111111111111111111111...
01111111111111111111111111111111...
10111111111111111111111111111111...
00011111111111111111111111111111...
11101111111111111111111111111111...
01100111111111111111111111111111...
10101011111111111111111111111111...
00000001111111111111111111111111...
11111101111111111111111111111111...
01111100111111111111111111111111...
10111101011111111111111111111111...
000111000011111111111111111111...
11101110111011111111111111111111...
01100110011001111111111111111111...
101010101010101111111111111111...
000000000000000111111111111111...
11111111111111110111111111111111...
    
```

と Sierpinski gasket 型のパターンを見て取ることができる.

さらに, 次のように群上のランダム・ウォーク演算子に相当する確率行列を考えることもできる. 高さ無限大の 2 分木のもつ自己再帰性

$$T_2 = T_2 \oplus T_2$$

から, オートマトンの 2 分木への作用は, 再帰的に特徴づけることができる. 点灯夫群の場合,

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & A_b \\ A_a & 0 \end{pmatrix}, \quad A_b = \begin{pmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_b \end{pmatrix}$$

となる. オートマトンの高さ k の 2 分木, すなわち, 有限列 $x \in \{0, 1\}^k$ への作用を $A_a^{(k)}$ と $A_b^{(k)}$ によって表すと, この再帰性は

$$A_a^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & A_b^{(n)} \\ A_a^{(n)} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_b^{(n+1)} = \begin{pmatrix} A_a^{(n)} & 0 \\ 0 & A_b^{(n)} \end{pmatrix}$$

で表される. ここで, $A_a^{(0)} = A_b^{(0)} = 1$ とすれば, 再帰的に $2^n \times 2^n$ の行列である $A_a^{(n)}$ と $A_b^{(n)}$ が定まる. さらに, この行列表現から確率行列

$$M_{\text{lamp}}^{(n)} = \frac{1}{2^n} (A_a^{(n)} + A_b^{(n)} + (A_a^{(n)})^{-1} + (A_b^{(n)})^{-1})$$

を導入することができ, この極限 $n \rightarrow \infty$ から群 $G(A)$ 上のランダム・ウォーク演算子

$$(3.1) \quad M_{\text{lamp}} = \frac{1}{4} (A_a + A_b + (A_a)^{-1} + (A_b)^{-1})$$

のスペクトルが厳密に計算できることが示されている [1].

§ 4. 箱玉系のオートマトン表示

超離散ソリトン方程式研究の出発点でもある箱玉系は, 下記の有限あるいは無限個の 1 次元セル上の簡単な時間発展ルールで与えられる [7, 8].

箱玉系 (BBS) 箱容量を 1 とし, 半無限個の箱を一行に並べ, 有限個の玉を適当に詰める. この状態を時刻 $t = 0$ とし, 次の手続きに従い時間発展が定まる.

- (i) 左から順に玉を選び, 選んだ玉をその玉の右側の最近接となる空箱へ移動する.
- (ii) 全部の玉を移動した後, 時刻を $t \mapsto t + 1$ とすすめ, (i) に戻る.

運搬車付き箱玉系 (BBS^(k)) 箱容量を 1 とし, 半無限個の箱を一行に並べ, 有限個の玉を適当に詰める. この状態を時刻 $t = 0$ とする. さらに, 玉を運ぶ運搬車を 1 台用意し, この運搬車に載せることのできる最大の玉の個数を k とする.

- (i) 運搬車は, 箱の列に沿って左から右へ移動し, 各箱の前で以下の玉の移動を行う.
 - (a) 箱に玉があり, 運搬車の積載容量に空きがあれば, 玉を箱から車へ移動させる.
 - (b) 箱に玉がなく, 運搬車に玉が載っていれば, 玉を車から箱へ移動させる.
 - (c) 上記の (a), (b) に当てはまらない場合は, 何もしない.
- (ii) 全ての玉の入っている箱の前を通過し, 運搬車に載せている玉がなくなったら, 時刻を $t \mapsto t + 1$ とすすめ, (i) に戻る.

これらの時間発展ルールの下で, 任意の初期状態において, 箱玉系および運搬車付き箱玉系の各時間発展は, 離散可積分系として知られる離散 KdV 方程式および離散 modified KdV 方程式の超離散化された方程式を用いて与えられることも知られている [7]. 箱玉系の場合,

$$U_n^{(t+1)} = \min \left(1 - U_n^{(t)}, \sum_{j=-\infty}^{n-1} (U_j^{(t)} - U_j^{(t+1)}) \right), \quad n, t \in \mathbb{Z}$$

の時間発展として表すことも可能である. この表示では, 連続する玉の 1 群を 1 つのソリトンとみなせることがわかる. また, 玉を 1, 空き箱を 0 に対応させることができる. 従属変数の初期値 $U_n^{(0)}$ を $\{0, 1\}$ に制限することで, 以後の時間発展においても $U_n^{(t)} \in \{0, 1\}$

に値が限定される．なお、通常の箱玉系の時間発展は、運搬車付き箱玉系のルールにおいて最大積載容量を $k = \infty$ とした場合の時間発展と等しくなることを注意しておく．

箱玉系および運搬車付き箱玉系に対応するオートマトンは、運搬車の状態に着目することで得られ、それぞれ BBS オートマトン (図 2) および $BBS^{(k)}$ オートマトン (図 3) と呼ぶことにする．より厳密には、BBS おおび $BBS^{(k)}$ のルールは、それぞれ初期状態とし

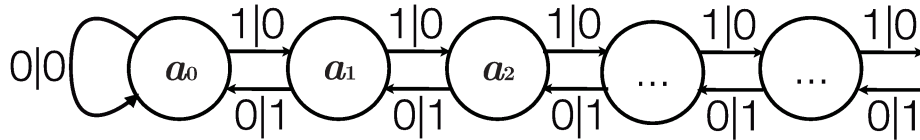


図 2. BBS オートマトンの状態遷移図

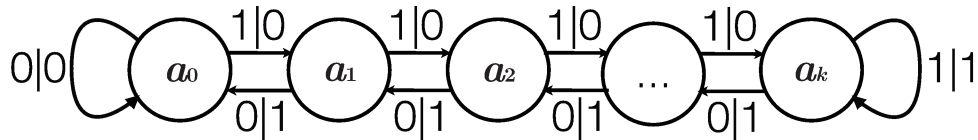


図 3. $BBS^{(k)}$ オートマトンの状態遷移図 (最大積載容量 k の運搬車に対応)

て a_0 を選ぶことで定まるオートマトンの作用 A_{a_0} と等価になる．初期状態として $a_{j(>0)}$ を選ぶことで定まる A_{a_j} の作用は、境界条件として、運搬車に j 個の玉を積載している状態で箱の列の左端から移動を始めるルールに対応している．ここで、状態 a_0 における出力関数は入力によらず 0 を出力しており、全単射とはなっておらず、オートマタ群を生成するオートマトンではないことに注意してほしい．

次に、オートマタ群の場合に倣い、箱玉系オートマトンに付随する確率行列とそのスペクトルについて考察する．BBS オートマトンは無限個の状態を持つオートマトンであり、これ以降は主に、有限オートマトンである運搬車付き箱玉系に対応する $BBS^{(k)}$ オートマトンを議論の対象とする．

まず、 $BBS^{(k)}$ オートマトンの高さ n の 2 分木への作用を $2^n \times 2^n$ の行列 $A_{k,a_i}^{(n)}$ ($i = 0, 1, \dots, k$) で表す．これらの行列は関係式

$$A_{k,a_0}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} A_{k,a_0}^{(n)} & A_{k,a_1}^{(n)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{k,a_k}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{k,a_{k-1}}^{(n)} & A_{k,a_k}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$A_{k,a_i}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & A_{k,a_{i+1}}^{(n)} \\ A_{k,a_{i-1}}^{(n)} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, k-1$$

と $A_{k,a_0}^{(0)} = A_{k,a_1}^{(0)} = \dots = A_{k,a_k}^{(0)} = 1$ から定まる．この箱玉系由来のオートマトンからも、点灯夫群の時と同様に確率行列

$$M_k^{(n)} = \frac{1}{2k+2} \left(A_{k,a_0}^{(n)} + (A_{k,a_0}^{(n)})^* + \dots + A_{k,a_k}^{(n)} + (A_{k,a_k}^{(n)})^* \right)$$

が自然に導入される．ここで，添字 $*$ は転置を表す．

点灯夫群との比較のため $k = 1$ に限ると，状態遷移図は図 4 で与えることができる．点灯夫群の状態遷移図 1 と $\text{BBK}^{(k=1)}$ オートマトンの状態遷移図 4 は似ているように見えるが，前者は群構造を有する invertible なオートマトンであるのに対し，後者は invertible にはならない．両者はオートマトンとして全く異なる．運搬車容量 $k = 1$ の運搬車付き箱玉系の時間発展は，単に平行移動であり，ソリトン特有の非線形な相互作用は一切生じない．しかしながら，対応する確率行列は自明ではなく，そのスペクトルも自明ではない．

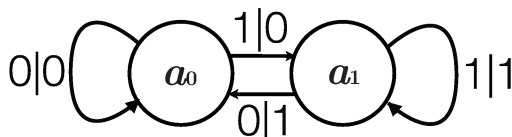


図 4. $\text{BBS}^{(k=1)}$ オートマトンの状態遷移図

実際に固有値の計算をしてみたところ，以下の結果を得た [5]．

定理 4.1. $M_{k=1}^{(n)}$ のスペクトル $Sp(M_{k=1}^{(n)})$ は，以下で与えられる．

$$Sp(M_{k=1}^{(n)}) = \left\{ 1 \cup \cos\left(\frac{p}{q}\pi\right) \mid p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq p < q \leq n+1 \right\}$$

また， p と q を互いに素な整数としたとき，固有値 $\cos(pq^{-1}\pi)$ の重複度 $m_{p,q}^{(n)}$ は，

$$m_{p,q}^{(n)} = \left\lceil 2^n \left(\frac{2^{-q} - 2^{-q(\lfloor \frac{n}{q} \rfloor + 1)}}{1 - 2^{-q}} \right) \right\rceil$$

で表される．

さらにこの場合， $M_{k=1}^{(n)}$ の固有値は点灯夫群から導入される確率行列 $M_{\text{lamp}}^{(n)}$ の固有値と重複度も含めて一致していることがわかった． $k > 1$ の場合も，対応する確率行列の固有値を数値的に求める ($k = 2, 3, 4, n \leq 12$) と，重複度 3 以上の固有値の集合は $k = 1$ の場合と一致している．極限 $n \rightarrow \infty$ で連続スペクトルとなり得る固有値の出現頻度を n ごとに計算すると， n の増加とともに指数関数的に減少していることが観測できる．この事実は，

$$(4.1) \quad Sp(M_{\text{lamp}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} Sp(M_k^{(n)}) \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

の成立を支持している．この等式 (4.1) が成立することは， $k = 1$ の場合のみ証明されており， $k \neq 1$ の場合は予想である．オートマタ群と可積分系のそれぞれの分野で重要な地位を占めている点灯夫群と箱玉系との間に非自明な一致がみられたのは，興味深い事実と思われる．ここでの解析手法は，より一般のオートマトンに対しても適用可能であり，今後の課題としたい．

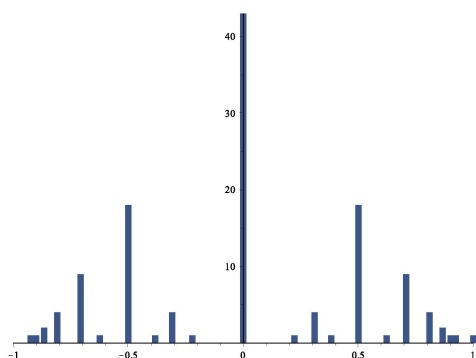


図 5. $M_{k=1}^{(7)}$ の固有値分布

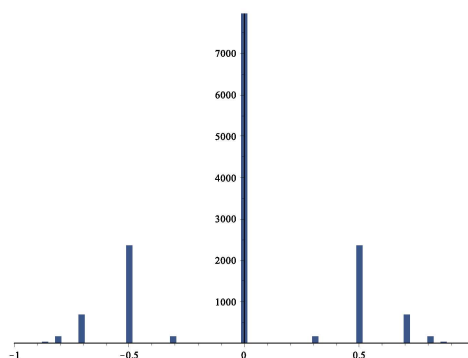


図 6. $M_{k=2}^{(14)}$ の固有値分布

参考文献

- [1] R. GRIGORCHUK AND A. ZUK, *The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton and its spectrum*, *Geom. Dedicata*, **87** pp.209–244 (2001).
- [2] V. A. KAMANOVICH AND A. M. VERSHIK, *Random walks on discrete groups: boundary and entropy*, *Ann. Probab.*, **11** pp. 457–490 (1983).
- [3] T. KATO, *Pattern formation from projectively dynamical systems and iterations by families of maps*, in the proc. of the 1st MSJ-SI, *Probabilistic Approach to Geometry*, *Adv. Stud. Pure Math.* **57** pp. 243–262 (2010).
- [4] T. KATO, *Automata in groups and dynamics and induced systems of PDE in tropical geometry*, *J. Geom. Anal.*, **24** pp. 901–987 (2014).
- [5] T. KATO, S. TSUJIMOTO AND A. ZUK, *Spectral coincidence of transition operators, Automata groups and BBS in tropical geometry*, arXiv:1406.5557 [math.SP].
- [6] R. LYONS, R. PEMANTLE AND Y. PERES, *Random walks on the lamplighter group*, *Ann. Probab.*, **24** pp. 1993–2006 (1996).
- [7] D. TAKAHASHI AND J. MATSUKIDAIRA, *Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30** pp. 733–739 (1997).
- [8] D. TAKAHASHI AND J. SATSUMA, *A soliton cellular automaton*, *J. Phys. Soc. Japan*, **59** pp. 3514–3519 (1990).
- [9] T. TOKIHIRO, D. TAKAHASHI, J. MATSUKIDAIRA AND J. SATSUMA, *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, pp. 3247–3250 (1996).