解説

安定結婚問題

The Stable Marriage Problem

宮崎修一

Abstract

安定結婚問題は二部グラフにおけるマッチング問題の一種である．複数の男女がおり，各人は異性を自分の好みで順序付けした希望リストを持っている．その希望リストに基づいて「安定性」を満たすマッチング（結婚）を求めるのが，安定結婚問題である．この問題は，アメリカの研修医配属への応用が有名であるが，近年日本の研修医配属でも利用され始めた．本稿では，安定結婚問題の基本的性質や応用例を紹介する．

キーワード：マッチング，安定マッチング，研修医配属，Gale-Shapley アルゴリズム

1. はじめに

二部グラフにおけるマッチング問題は，労働者に仕事を割り当てる問題の数学モデルとして知られている．労働者と仕事をグラフの頂点で表し，労働者 l が仕事 j を行うことができるとき，2 頂点 l と j の間に枝を張る．このグラフのマッチング（頂点を共有しない枝集合）はすなわち，重複なく労働者へ仕事を割り当てることに対応する．安定結婚問題は更に，マッチングの「安定性」という概念を導入したものである．通常のマッチング問題の応用例には，上記の仕事割当てがよく用いられるが，安定結婚問題ではその名のとおり男女間の結婚が最も適した例であろう．同数の男女がおり，男性は女性に対する選好順序を持っており，女性も男性に対する好みを持っている．安定結婚問題は，この好みの下で，不倫の起きないカップリングを求める問題である（正確な定義は 2. で述べる）．

この問題は，1962 年に Gale と Shapley により提案された[(1)]．彼らがこの問題を考えるきっかけとなったのが，アメリカにおける研修医（インターン）の病院配属である[(2)]． 1950 年以前，アメリカでの研修医配属は，病院と研修医の間で独立に行われていたため，できるだけ優秀な研修医を得るために病院側がいわゆる青田刈りを行ったり，できるだけ好みの病院に入るために研修医側がぎりぎりまで複数の病院と仮契約を結んでおくなどの問題が発生した．これを解消するために，1950 年ごろから双方の希望リストに基づいた中央でのマッチング体制に移行した．それ以来，半世紀もの間利用され続けているわけであるが，これはマッチングの安定性に起因するところが大きいといわれている．（安定でないマッチングが問題となった例は，例えば年輩の読者であれば「空白の一日」といえばピンとくるであろう．）この研修医配属は多対 1 の割当てであるが，その最も単純なケース，すなわち一つの研修コースの定員を 1 人に絞ったものが本稿で述べる安定結婚問題である．本稿では，安定結婚問題の基本的性質や応用例を紹介する．

2. 安定結婚問題

以下に，安定結婚問題の最も基本的な定義を述べる（様々な拡張があるが，それについては 7. で述べる）．安定結婚問題の例題は，同数 n 人ずつの男女と，各個人の希望リストからなる．希望リストとは，異性全員を好みの順番に並べた全順序リストである． $n=5$ の例を表 1 に示す．男性が 1 ～ 5，女性が a ～ e で，リストは左から右に向かって好きな順に並んでいる．例えば男性 3 は，女性を b,a,e,d,c の順に好きである．

安定結婚問題は，このような入力が与えられたときに，男性と女性のペア n 組（結婚またはマッチングという）を作る問題である．ただし，求めるマッチングは安定でなければならない．以下にマッチングの安定性の定義を述べる．

マッチング M において，男性 m と女性 w がペアになっているとき， $M(m)=w$， $M(w)=m$ と書くことに

宮崎修一　正員　京都大学学術情報メディアセンターネットワーク研究部門
E-mail shuichi@media.kyoto-u.ac.jp
Shuichi MIYAZAKI, Member (Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University, Kyoto-shi, 606-8501 Japan).

電子情報通信学会誌　Vol.88 No.3 pp.195-199 2005 年 3 月

する．マッチング M において m と w がペアになっておらず，m は $M(m)$ より w を好み，w は $M(w)$ よりも m を好むとき（つまり，m と w が不倫を起す関係にあるとき），m と w はマッチング M の不安定ペア（英語では blocking pair）という．不安定ペアの存在しないマッチングを安定マッチングという．（どの男女が不倫を試みても，少なくともどちらかは損するので，不倫は成立しない．この意味で安定である．）安定結婚問題は，与えられた例題の安定マッチングを求める問題である．

3. 安定結婚問題の応用

安定結婚問題の応用例として最も有名なのが，先に述べた研修医配属であろう．安定結婚問題をベースにした同様の研修医配属システムは，カナダ[3]やスコットランド[4],[5]にも見られる．我が日本も，臨床研修の必修化に伴い，2004 年度配属者から，安定結婚を利用した配属が行われるようになった．初年度は募集定員 10,870 人に対して登録者は 8,109 人で，そのうちの 7,756 人が配属先を得た．マッチ率は 95.6% である[6]．（ちなみにアメリカの 2004 年度配属用マッチングでは，募集定員 20,908 人，登録者 23,965 人，マッチ者 18,806 であった．）

研修医配属のほかにも，学校への生徒配属[7]や計算機ネットワークにおけるルータやスイッチの設計[8]にも利用されている．

4. Gale-Shapley アルゴリズム

どのような入力に対しても安定マッチングは存在するのだろうか？　また，もし存在するなら，それを簡単に見つけることができるのだろうか？　答えは共に YES である．任意の入力例題に対して $O(n^2)$ 時間で安定マッチングを見つけるアルゴリズム（Gale-Shapley アルゴリズム[1],[9]）が知られている．正確な記述は文献(9)を見て頂くことにし，以下では簡単に説明する．アルゴリズムの実行中，男性と女性は婚約中（今，とりあえず相手がいる状態）とフリー（独身の状態）の二つの状態のどちらかをとる．最初は全員がフリーである．アルゴリズムの 1 ステップでは，フリーの男性の中から任意の 1 人が，自分の（現在の）リストのトップにいる女性にプロポーズする．プロポーズを受けた女性は，現在フリーならその男性と婚約し，現在婚約中なら，今の婚約者とプロポーズしてきた男性とを比べ，自分の好きな方（自分のリストで上位の人）と婚約する．振られた男性はフリーとなり，その女性を自分のリストから削除する．（つまり，リスト中でトップの女性が削除される．）これを，プロポーズする男性がいなくなるまで繰り返し，そのときの婚約者が最終的なマッチングの相手となる．

アルゴリズムの動作を，表 1 の例題に沿って説明しよう．男性 1 がリストのトップの女性 a にプロポーズし，a は現在フリーであるから，そのプロポーズを受け入れる．同様に 3 が b に，4 が c にプロポーズし，共に受け入れられる．次に 5 は自分のリストのトップである c にプロポーズするが，c は既に婚約中である．c は現在の婚約者 4 と今プロポーズしてきた 5 を比べ，5 の方が好きなので 4 を振る．その結果，5 と c が婚約し，振られた 4 はフリーになり，リストのトップにいた c をリストから削除する．以後同様に繰り返していくと，$(1,a)$, $(2,c)$, $(3,e)$, $(4,b)$, $(5,d)$ というマッチングが得られる．このマッチングが安定であることは，容易に確かめられる．

表 1　安定結婚問題の例題

1:	a	c	b	d	e	a:	2	1	3	4	5
2:	c	a	e	b	d	b:	2	1	4	5	3
3:	b	a	e	d	c	c:	1	2	3	5	4
4:	c	b	d	e	a	d:	3	1	4	2	5
5:	c	d	b	e	a	e:	4	3	1	2	5

得られるマッチングの安定性について，一般的に証明しよう．まず，アルゴリズムの実行過程における以下の事実は，アルゴリズムの動作から明らかである．

(i) 男性は，リストのトップから順番にプロポーズしていく．

(ii) 女性が相手を変える場合には，より好きな相手に変える．

さて，得られたマッチング M に不安定ペア (m,w) がいたとしよう．不安定ペアの定義より，m は $M(m)$ よりも w を好み，w は $M(w)$ よりも m を好む．上記(i)より，m は w にプロポーズして振られている．ということは，その時点で w は m よりも好きな人と婚約している．そして，上記(ii)より，以後 w の婚約者の順位が下がることはないので，最終的に w は m より好きな人とマッチしているはずである．これは不安定ペアの定義に矛盾する．

5. 安定マッチングの数

任意の例題に少なくとも一つの安定マッチングが存在することは分かった．安定マッチングをただ一つしか持たない例題を作ることは簡単である．（例えば，先にマッチングを決めて，全員が自分の相手をリストの第 1 位に書けばよい．）それでは逆に，一つの例題はどれだけ多くの安定マッチングを持ち得るだろうか？　この問題は，最初 Knuth によって提案された[10]．これを受けて，Irving と Leather は以下の結果を発表した[11]．

定理 5.1　n が 2 のべき乗の場合，サイズ n の例題（男

表2　安定マッチングを二つ持つサイズ2の例題

1:	a	b	a:	2	1
2:	b	a	b:	1	2

表3　安定マッチングを10個持つサイズ4の例題

1:	a	b	a'	b'	a:	$2'$	$1'$	2	1
2:	b	a	b'	a'	b:	$1'$	$2'$	1	2
$1'$:	a'	b'	a	b	a':	2	1	$2'$	$1'$
$2'$:	b'	a'	b	a	b':	1	2	$1'$	$2'$

性 n 人，女性 n 人の例題）で，少なくとも 2^{n-1} 個の安定マッチングを持つものが存在する．

証明の概略を述べる．表2の例題は，サイズ2で二つの安定マッチングを持つので，$n=2$ のときは成立する．

後は，サイズ n で安定マッチング数 r の例題が与えられたとき，サイズ $2n$ で安定マッチング数が $2r^2$ 以上の例題を作ることができれば，上記の定理は帰納的に証明できる．ここでは簡単のため，表2の例題からサイズ4の例題を作る方法を示す．

まず表2の例題のコピーを作る．（男性を $1'$, $2'$, 女性を a', b' とする．）そして，オリジナル例題とコピー例題を組み合わせて，表3に示すサイズ4の例題を作る．

作り方の説明は不要であろう．安定マッチングの数を数える．オリジナル例題の男性1，2をオリジナル例題の女性 a, b と（元の例題における安定マッチングに従って）マッチさせる方法は2通りある．同様に，コピー例題の男性 $1'$, $2'$ をコピー例題の女性 a', b' にマッチさせる方法は2通りである．これらの組合せからなる $2^2=4$ 通りのマッチングは，いずれも表3の例題において安定である．同様に，オリジナル例題の男性をコピー例題の女性へ，コピー例題の男性をオリジナル例題の女性へマッチさせると，やはり安定マッチングが得られる．結果，安定マッチングの数は，少なくとも 2×2^2 となる．

なお，この同じ構成法で，安定マッチングの数をうまく数えることにより，マッチング数のより良い下限が得られる[(11),(12)]．上記の構成法によるサイズ n の例題での安定マッチングの個数を $g(n)$ とすると，$g(n)=3(g(n/2)^2)-2(g(n/4)^2)$ $(g(1)=1,\ g(2)=2)$ となる．つまり，表3の例題は，安定マッチングを（8個ではなく）実は10個持つ．$n=4$ の場合はこの「10個」がベストであることが，計算機を使った全探索によって示されている[(13)]．ちなみに，上の漸化式を満たす $g(n)$ について，$g(n)>2.28^n/(1+\sqrt{3})$ が示されている[(9),(12)]．また，GusfieldとIrvingは，定理5.1と同じ下限を与える別証明を文献(9)で与えている．安定マッチング数に関するその他の研究結果は，文献(12)，(14)を参照して欲しい．

6.　最適安定マッチング

このように，一つの例題には複数の安定マッチングが存在し得る．4.で述べたGale-Shapleyアルゴリズムは，そのうちの一つを求めるわけであるが，その一つは特別なものである．男性 m が少なくとも一つの安定マッチングでペアになる女性の集合を $W(m)$ と書くと，上記の特別な安定マッチングでは，すべての男性 m が $W(m)$ の中で最も好きな女性とペアになる[(1),(9)]．これを男性最適安定マッチングという．面白いことに，男性最適安定マッチングは女性最悪安定マッチング，すなわち，全女性が，安定マッチングでペアとなる男性の中で最悪の相手と結ばれるのである．もちろん，女性側からプロポーズするアルゴリズムを使えば，女性最適，男性最悪安定マッチングが得られる．

余談ではあるが，前述したアメリカでの研修医マッチングにおいては，病院側からプロポーズするアルゴリズム（すなわち病院最適，研修医最悪安定マッチングが求まる）が従来使われていたが，これに不満を持った学生団体の抗議により，1998年から研修医側がプロポーズするアルゴリズムに変更されたそうである．しかし，二つのアルゴリズムでのマッチング結果を数年分の実データでシミュレートしてみたところ，わずか0.1%の研修医が異なる配属を得るのみであったという[(15)]．

7.　問題の拡張

安定結婚問題では，希望リストに異性 n 人全員を書かなければならず，更に，その n 人は全順序で並べられていなければならない．例えば研修医配属のように例題のサイズが大きい場合には，これらの制約は非現実的であるので，自然な拡張として以下の二つが考えられる．一つは，リスト中に同順位を許す同順位リスト，もう一つは，嫌いな相手をリストに書かないことを許す不完全リストである．

7.1　同順位リスト

同順位リストの場合，安定性には，弱安定性，強安定性，超安定性という三つの定義がある．以下，それぞれについて定義と性質を述べる．以下では，「人 p が異性 q_2 より異性 q_1 を好む」という場合，q_1 と q_2 は p のリストで同順位でなく，真に優劣関係がついているものとする．p が q_2 より q_1 を好む場合と，p にとって q_1 と q_2 が同順位の場合をまとめて，「p は q_2 以上に q_1 を好む」ということにする．

m を男性，w を女性とする．マッチング M において m が $M(m)$ よりも w を好み，w が $M(w)$ よりも m を好む場合に (m, w) を不安定ペアと定義する．この定義の下で不安定ペアの存在しないマッチングを弱安定マッチ

表4 強安定マッチングの存在しない例題

1:	a	b	c	a:	(1	2	3)
2:	a	b	c	b:	1	2	3
3:	a	b	c	c:	1	2	3

表5 異なるサイズの安定マッチングを持つ例題

1:	a		a:	(1	2)
2:	(a	b)	b:	2	

ングと呼ぶ．この場合，拡張を施さない場合と同様に，任意の例題に少なくとも一つの安定マッチングが存在することが以下のようにして分かる．与えられた例題Iに含まれるすべての同順位を壊す（すなわち，同じ順位の人に無理やり順位を付ける）．このようにして得られた例題I'は拡張を施さないオリジナルの問題の例題であるため，4.の議論より，I'に対する安定マッチングは少なくとも一つ存在する．そのマッチングがIにおいて弱安定であることは容易に分かる．

p，qの片方を男性，他方を女性とする．マッチングMにおいてpが$M(p)$よりもqを好み，qが$M(q)$以上にpを好むとき，(p,q)を不安定ペアと定義する．この定義の下で不安定ペアの存在しないマッチングを強安定マッチングと呼ぶ．この場合は弱安定の場合と違い，強安定マッチングを持たない例題が存在するが，与えられた例題に強安定マッチングが存在するか否かを判定し，存在するならばそれを出力する多項式時間アルゴリズムが存在する[16]．表4に，強安定マッチングを持たないサイズ3の例題を示す（かっこの中は同順位であることを意味する）．どんなマッチングにおいても，女性aとペアになれなかった男性が，女性aとの間で不安定ペアを形成する．

マッチングMにおいてmが$M(m)$以上にwを好み，wが$M(w)$以上にmを好む場合に，(m,w)を不安定ペアと定義する．この定義の下で不安定ペアの存在しないマッチングを超安定マッチングと呼ぶ．つまり，同程度の好みであれば自分の配偶者でない方に惹かれてしまうという，弱い意思の持ち主集団でも大丈夫ということである．超安定マッチングは強安定であるし，強安定マッチングは弱安定である．したがって，上記の表4の例題は超安定マッチングの存在しない例にもなっている．この場合も強安定の場合と同様に，安定マッチングの存在判定，及び存在する場合の探索が多項式時間で行える[16]．

7.2 不完全リスト

不完全リストを許した場合，リストに書いていない人とはペアになれない．そこで，この場合は完全ではない（すなわち，ペア数がnよりも少ない）マッチングも考慮する．マッチングMにおいて男性mと女性wが以下の(i)～(iii)の条件をすべて満たすとき，(m,w)は不安定ペアと定義される．

(i) mとwはMでマッチしていないが，お互いをリストに書き合っている．
(ii) mはMで独身であるか，$M(m)$よりwを好む．
(iii) wはMで独身であるか，$M(w)$よりmを好む．

この設定においては，以下の定理が知られている[17]．

定理7.1 Mを例題Iの任意の安定マッチングとする．Mでマッチしている人はIのどの安定マッチングでもマッチしているし，Mで独身の人はIのどの安定マッチングでも独身である．

定理7.1より，一つの例題に対する安定マッチングはどれも同サイズであることが分かる．定理7.1を多対1版へ拡張すると，各研修コースに配属される研修医の数はどの安定マッチングでも同じであるという定理が得られる．これは「Rural Hospitals Theorem」と呼ばれている．アメリカの研修医配属において，特に田舎の病院は配属される研修医の数が少ないため，別の安定マッチングを得るようアルゴリズムの変更を訴えた．しかし，この定理により，「どんなアルゴリズムを使おうとも，配属者数は変らない（すなわち，アルゴリズムのせいではなく，病院に人気がないせいである）」ことが証明されたわけである[9]．

7.3 同順位＆不完全リスト

上記二つの拡張では，一つの例題に対する安定マッチングのサイズは，どれも皆同じであった．ところが，同順位リストと不完全リストを両方許した場合には，同じ例題にサイズの異なる弱安定マッチングが存在し得る．表5はその典型例で，$\{(1,a),(2,b)\}$というサイズ2のマッチングも，$\{(2,a)\}$というサイズ1のマッチングも安定である．

こうなると，できるだけサイズの大きな安定マッチングを求めることが好ましいが，残念ながらこの問題は，実用時間では最適解を求めるのが難しい，NP困難問題であることが示された[18]．したがって，実用性を考えるならば，例えば近似解を探索することになる．常に最大サイズの$1/r$倍以上の解を求めるアルゴリズムを，近似度rのアルゴリズムという．最小サイズが最大サイズの半分以上であることは定義より明らかであるため，近似度2のアルゴリズムは簡単に構築できるが，定数$\epsilon(>0)$に対して近似度$2-\epsilon$の多項式時間アルゴリズムの存在は未解決である．現在最良の近似度は，任意の正定数cに対して$2-c\frac{\log n}{n}$である[19]．また，例題を制限した場合の非自明なアルゴリズムも幾つか知られている[20],[21]．

8. 公平な安定マッチング

話を全順序完全リストに戻す．6. で述べた男性最適安定マッチングは，男性側から見れば最良であるが女性から見れば最悪である．女性最適安定マッチングはその逆である．ここでは，男女を区別しない場合の最適安定マッチングや，男女に公平な安定マッチングについて考える．以下では，安定マッチング M と人 p に対して，p のリスト上での $M(p)$ の順位を $c_M(p)$ と書き，p の M でのコストと呼ぶことにする．また，男性集合を X，女性集合を Y とする．

$$\sum_{p \in X \cup Y} c_M(p)$$

が最小となる M を最小コスト安定マッチング（Minimum Egalitarian Stable Matching）という．すなわち，全員のコストの和を最小とするものである．

$$\max_{p \in X \cup Y} \; c_M(p)$$

が最小となる M を最小後悔安定マッチング（Minimum Regret Stable Matchig）という．すなわち，最大コストを最小化する安定マッチングである．

$$\left| \sum_{p \in X} c_M(p) - \sum_{p \in Y} c_M(p) \right|$$

が最小となる M を男女平等安定マッチング（Sex-equal Stable Matching）という．

最小コスト安定マッチングと最小後悔安定マッチングは多項式時間で求まる[(9),(22),(23)]が，男女平等安定マッチングを求める問題はNP困難である[(24)]．

9. おわりに

本稿では，安定結婚問題の基本的性質と応用例について簡単に紹介した．安定結婚問題は応用の広さと数学的面白さから深く研究されており，関係する論文も数多い．最近でも，問題を実用的に拡張・変形し，その計算量や実験結果を評価する論文などが毎年幾つか出ている．本稿をお読みになった方が，少しでもこの問題に興味を持って下されば幸いである．

文献

(1) D. Gale and L.S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," Amer, Math. Monthly, vol.69, pp.9-15, 1962.

(2) National Resident Matching Program, http://www.nrmp.org/

(3) Canadian Resident Matching Service, http://www.carms.ca/

(4) R.W. Irving, "Matching medical students to pairs of hospitals: a new variation on an old theme," Proc. ESA 98, LNCS 1461, pp.381-392, 1998.

(5) Scottish PRHO Allocations, http://www.dcs.gla.ac.uk/rwi/SPA.html

(6) 阿部好文，マッチングを上手に乗り切るために，診断と治療社，2004.

(7) C. Teo, J. Sethuraman, and W. Tan, "Gale-Shapley stable marriage problem revisited: strategic issues and applications," Proc. IPCO 99, LNCS 1610, pp.429-438, 1999.

(8) G. Nong and M. Hamdi, "On the provision of quality-of-service guarantees for input queued switches," IEEE Commun. Mag., vol.38, issue 12, pp.62-69, 2000.

(9) D. Gusfield and R.W. Irving, The Stable Marriage Problems: Structure and Algorithms, MIT Press, Boston, MA, 1989.

(10) D.E. Knuth, "Mariages Stables," Les Presses de l'Université Montréal, 1976. (Translated and corrected edition, Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol.10, American mathematical Society, 1997.

(11) R.W. Irving and P. Leather, "The complexity of counting stable marriages," SIAM J. Comput., vol.15, no.3, pp.655-667, 1986.

(12) E.G. Thurber, "Concerning the maximum number of stable matchings in the stable marriage problem," Discrete Math., vol.248, issue 1-3, pp.195-219, 2002.

(13) D. Eilers, Irvine Compiler Corporation Technical Report, ICC TR1999-2, 1999.

(14) A.T. Benjamn, C. Converse, and H.A. Krieger, "How do I marry thee? Let me count the ways," Discrete Appl. Math., vol.59, no.3, pp.285-292, 1995.

(15) A.E. Roth and P. Elliott, "The effects of the change in the NRMP matching algorithm," Journal of the American Medical Association, pp.729-732, 1997.

(16) R.W. Irving, "Stable marriage and indifference," Discrete Appl. Math., vol.48, no.3, pp.261-272, 1994.

(17) D. Gale and M. Sotomayor, "Some remarks on the stable matching problem," Discrete Appl. Math., vol.11, no.3, pp.223-232, 1985.

(18) K. Iwama, D. Manlove, S. Miyazaki, and Y. Morita, "Stable marriage with incomplete lists and ties," Proc. ICALP 99, LNCS 1644, pp.443-452, 1999.

(19) K. Iwama, S. Miyazaki, and K. Okamoto, "A $(2-c\log N/N)$-approximation algorithm for the stable marriage problem," Proc. SWAT 2004, LNCS 3111, pp.349-361, 2004.

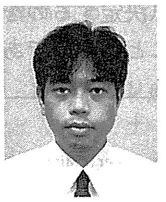
(20) M.M. Halldórsson, K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa, "Randomized approximation of the stable marriage problem," Theor. Comput. Sci., vol.325, no.3, pp.439-465, 2004.

(21) M.M. Halldórsson, K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa, "Improved approximation of the stable marriage problem," Proc. ESA 2003, LNCS 2832, pp.266-277, 2003.

(22) D. Gusfield, "Three fast algorithms for four problems in stable marriage," SIAM J. Comput., vol.16, no.1, pp.111-128, 1987.

(23) R.W. Irving, P. Leather, and D. Gusfield, "An efficient algorithm for the "optimal" stable marriage," J. ACM, vol.34, no.3, pp.532-543, 1987.

(24) A. Kato, "Complexity of the sex-equal stable marriage problem," Japan J. Iudust. Appl. Math., vol.10, pp.1-19, 1993.



宮崎 修一（みやざき しゅういち）（正員）

平5九大・工・情報卒．平7同大学院修士課程了．平10同大学院博士課程了．同年京大・情報学研究科・助手．平14同学術情報メディアセンター助教授．博士（工学）．アルゴリズム，計算量理論の研究に従事．