物性研究・電子版 Vol. 6, No. 4, 064221 (2017年11月号)

マクロ化創発のパラドックス

小嶋 泉
ドレスト光子研究起点

第62回物性若手夏の学校

Abstract

ミクロ／マクロ，量子／古典の相互関係は，前者での物理量の非可換性が「古典極限」$\hbar \to 0$ で消えて可換変数を持つ古典論が現れ，逆に後者を「量子化」し正準交換関係で量子論的非可換性を持込めば量子論が得られる，というのが常識的・標準的な「量子古典対応」の理解だろう。

こういう常識的想定が崩れ，ミクロレベルに存在しなかった物理的自由度，物理変数がマクロレベルで物理的自由度に「化ける」状況とそこではどんなメカニズムが働くのか？をここでは論じたい。典型例は量子電気力学における縦波 Coulomb モード：量子論的ミクロレベルに Coulomb モードは存在せず，縦波光子はたとえ「存在」しても観測に掛からない「非物理的モード」だというのが「ゲージ場の共変的演算子形式」の結論だが，しかしマクロレベルには立派に Coulomb モードが存在して電荷間のポテンシャルを記述する。

この見方で BCS 超伝導理論と Higg 機構とを比較すれば，前者に存在する Cooper 対が後者では「非物理的モード」として消去され，両者の間には重要な食い違いが残る。ここで重要な役割を担うのは長らく「悪者扱い」されてきた「不定計量」だが，実は，熱力学，統計力学の文脈も踏まえて見直せば，そこからはもっとダイナミックな物理が展開する！無限自由度系の統計力学や超伝導モデル等々の例を通して，鞍点法との面白いつながりを読み解くことを試みよう。

1 非可換力学系としてのミクロ自然

前世紀前半以前の時期に確立した物理学諸分野の標準的な理論構成は,《力学系理論として見た物理的自然》，つまり，物理系の動力学とそれによって駆動される物理量のシステム：$G \underset{\alpha}{\curvearrowright} \mathcal{X}$, という形に要約される。ここで，$G$ は動力学を記述する群で，例えば，$G = \mathbb{R}$ or $\mathbb{Z}$：加法群としての時間。$\mathcal{X}$ は物理量の代数で，和，積，スカラー倍の演算を持つ： $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \ni (A, B) \mapsto A + B$, $AB \in \mathcal{X}$, $K \times \mathcal{X} \ni (c, A) \mapsto cA \in \mathcal{X}$。スカラー K は多くの場合，$K = \mathbb{R}$：実数体，量子論の理論的扱いのためには $\mathbb{C}$：複素係数，結晶等の離散構造が問題になる場合には有限体が便利な場合も出て来るが，取り敢えずは，$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ という想定で議論を始めたい。

《力学系としての物理的自然》を定義するのは，**群作用** $\alpha : G \times \mathcal{X} \ni (s, A) \mapsto \alpha_s(A) \in \mathcal{X}$ の本質的な働きで，それは，$\alpha_s(c_1A_1 + c_2A_2) = c_1\alpha_s(A_1) + c_2\alpha_s(A_2)$, $\alpha_{st}(A) = \alpha_s(\alpha_t(A))$ という性質で特徴づけられる。このような**群作用を持つ代数構造**を（数学的に）「**力学系**」と呼び，通常 $G \underset{\alpha}{\curvearrowright} \mathcal{X}$ と略記する。古典物理だけで平穏無事な時代なら,《力学系＝物理的自然》で十分だったということである。

1.1 状態概念の本質的関与

そこへ量子論及び前後してブラウン運動が発見され，自然認識において**量子ゆらぎ・確率ゆらぎ**が本質的役割を果たすようになる。それ以降,《力学系＝時間発展する代数構造 $G \underset{\alpha}{\curvearrowright} \mathcal{X}$》だけでは自然記述の語彙が不足し，新たに**ミクロとマクロとの境目**に割り込んできたのが《**状態概念・確率概念**》である (IO)。

このような「状態概念」の位置づけは，後程“5W1H” という一般的視点から見るように，種々異なる領域の比較検討を通じて十分説得的なものである。ただし，この「状態」解釈とそれに基づく量子論理解は，未だ広く認知されたものではなく，筆者と共同研究者の限られた周辺での了解に留まることに十分留意されたい。

「**状態**」概念が**ミクロ量子系とそれを「観測する」マクロ古典系との間の媒介項だ**ということを捉え損なうと，巷に氾濫する誤解の一例として，量子系の物理量を観測装置と見誤る解釈に導き，ミクロ量子系を特徴づけるはずの物理量代数がミクロとマクロとの間に入り込む一方，状態はミクロ系固有のものとなってしまう。すると，孤立系として対象系を扱う記述と，測定過程を対象系と測定系との合成系と見て扱う記述との間で等価性が壊れ，深刻な困難が生ずる。《量子系の物理量》と観測装置とのこの混同は，量子系の物理量 A を測定するためには，A の**双対量**B に対応した観測装置を用意しなければ測定過程を駆動する相互作用項 $A \otimes B$ が作れない，という単純な事情の見落としに由来する。

1.2 帰納・演繹の往復とミクロ・マクロ双対性

「量子的ミクロのみが本物で，マクロ古典は粗視化に依る虚像」と見る現代科学に特徴的な自然観・世界観では，法則・理論を偏重するあまり，ミクロ理論からマクロ現象を導出する「演繹のみが理論的に正しい」との偏見が支配的である。しかし，外的自然を対象とする科学において，一方的に法則・理論だけを主張するだけでその正しさが保証されるわけではなく（たとえそれを「確信犯的に」企図する（!?）理論分野が流行最先端なのが現実だとしても），「真理性」の保証には記述対象の現実的振舞と理論内容との間の一致を検証することが不可欠。

そのとき，推論の正否は導かれた帰結の実験的検証に基づく。では演繹的推論の出発点にあるミクロ量子系に関する理論的仮定それ自体の正しさは，どう判定・検証され保証されるのか？それもやはり，実験観測データとの比較以外にはないはずで,「マクロ古典は $\cdots$ 虚像」でどんなデータも誤差

等「信頼できないマクロ性」を免れないとすれば，結果的に「マクロ虚像」を以て「本物のミクロ」の品質を保証する，という本末転倒は避けられない：「Duhem-Quine の逆理」!

この一面性・逆理を回避・克服する途は，マクロとミクロの間の系統的な往復を可能にする理論の定式化と，そこで実現される帰納と演繹との往復反復のみ！

→ **ミクロ・マクロ双対性** [MicMac] = [帰納 ⇄ 演繹] に基づく真理
とそれを具体化する理論形式としての **4 項図式** [MicMac, Unif03]

ちょうど，適切な縮尺の局所地図が対象領域のみを正確に再現するように，記述・分類・解釈さるべき対象・現象（→ 対象系）とそこで必要な語彙・参照系・理論枠（→ 記述系）とは，適切な条件下，相互に表現論的双対の関係で結ばれ，対象系と記述系の「マッチング」= 圏論的普遍性の成立によって，帰納と演繹の間の自由な往復が保証される。その保証された往復自由の範囲・限界内だけ真理性が意味を持つ。

2 5W1H と 4 項図式

物理理論の一般構造の中で，物理現象はどう記述されているか？

→ 重要なのは，**帰納的推論と演繹的推論の間を双方向的に動く自由度の確保**

そのためには，帰納的推論過程を取り込めるような理論枠の用意が不可欠

⟹ そうした要件を満たす普遍的な理論枠の候補として次の *4* **項図式**：

↗	**分類空間** $=$ ***Spec***	
状態(族)	⇆ ↿(**表現**)⇃ ⇆	**代数**
	動力学	↗

.

その構成要素は，事象を記述しそれを他者に伝達するとき，標準的に要求される "5W1H" という 4(+1) 個の基本要素に対応：

分類空間 [いつ & どこで= 事象の時空局在を指定する語彙の空間],
状態(族) ["誰が"= 記述の文脈を選択・指定する "主体・主語"],
(記述変数の) **代数** [何を= 記述されるべき対象の指定],
((代数の) **表現**) [如何に= 現象の様相記述 = "表現加群"],
動力学 [なぜ= 過程を駆動する原因・動機 = 法則].

2.1 4 項図式= ミクロ力学系とそのマクロ双対をつなぐ表現=状態

量子ゆらぎ・確率ゆらぎを記述する状態概念が導入される以前の古典物理は,《力学系=時間発展する代数構造 $G \underset{\alpha}{\curvearrowright} \mathcal{X}$》の描像で十分ということだった。

上の 4 項図式のミクロサイド

	代数
動力学	↗: ミクロ

は，ミクロレベルに置かれた力学系,《ミクロ力学系》から成り,

このミクロ力学系の双対 dual がちょうど

マクロ: ↗	***Spec***
状態(族)	

であることを了解すると,

結局，4 項図式

マクロ: ↗	**分類空間** $=$ ***Spec***	
状態(族)	⇆ 「**表現**」 ⇆	**代数**
	動力学	↗: ミクロ

の本質は,

ミクロ力学系とその dual とを

状態(族)	⇆ **表現** ⇆	**代数**

による**橋渡し**で結び合わせて成り立っていることになる！

2.2　４項図式と創発＋量子場

「**ミクロ・マクロ双対性**」に基づく双方向的移動の「実効化」には,

創発過程

Spec
↗
状態族)

による**ミクロからマクロへの可視化**と,

創発した ***Spec*** **によるパラメータ付けで代数を量子場** ***quantum fields*** へと変量化する「論理拡大函手」**:**

Spec
↘
Alg

との合成・一体化が重要 !:

マクロ:	***Spec***	
創発：↗		↘ :量子場
状態(族)	⇆ **表現** ⇆	**代数** ***Alg***
		↗
	動力学	: ミクロ

2.3　４項図式に潜む種々の双対性

状態(族) からの *Spec* **の創発& 創発した** *Spec* **上に定義される量子場**を,

作用素環論に由来する水平方向の *Fourier* 双対性としての**状態(族)**⇆ **表現**⇆ **代数** の往還と組み合せると，つながりのネットワークが４項図式中に張り巡らされる:

	Spec	
創発↗↙	$V\uparrow\ \ \downarrow I$	↖↘ 量子場
状態 (族) $(\sim L^1)$	⇆ **表現** $(\sim L^2)$ ⇆	**代数**$(\sim L^\infty)$
双対場 ↘↖	↑ ↓ Galois	↙↗ 余創発
	動力学	

事象の局在(***event localization***) を指定する ***Spec***= [いつどこで] は，物理的には相分離 phase separation に起源を持ち，数学的には（多値論理の）

拡張された「意味論空間」semantic space を定める「強制法」 forcing に由来する創発過程 emergence によって，その現実的意味が保証される。

(**代数**)* = **状態 *(*族*)* と** (**状態 *(*族*)***)* = **代数** との双対性より，創発：**状態 *(*族*)*** → ***Spec*** の矢印には，その双対として**余創発過程 *co-emergence*** が伴う：

	Spec	
創発↗	↑	↖
状態 *(*族*)*	⇆ **表現** ⇆	**代数**
↖	↑	↗ 余創発
	動力学	

: **余創発**は，**動力学＝ 動的流れが，代数で記述されるモノ・対象の形に凝固する過程**で

水平方向の双対性と組み合せれば他の４つの上向き矢印をももたらす。

逆に上から下への帰納過程は，量子場の local net ***Spec*** → ***Alg*** が引き金を引いて下向き矢印全体が走る：

	Spec	
↙	↓	↘ 量子場
状態 *(*族*)*	⇆ **表現** ⇆	**代数**
↘	↓ Galois	↙
	動力学	

.

2.4 見えるマクロ=現象 から 見えないミクロ=動力学 へ

ここで最も重要な働きを担うのは，**表現圏**から動力学 ***Dyn*** を Galois 群による反復可逆法則として抽出する ***Galois* 対応**:

表現
↓ Galois
動力学

.

Spec はセクターを分類するセクター分類空間，それに属する個々のセクターは表現の center のスペクトル１点１点に対応する。

$$\text{こうして，}\textbf{自然の歴史的歩みのボトムアップ}\ \begin{array}{ccc} & \nearrow & \boldsymbol{Spec} & \\ \boldsymbol{States} & & \leftarrow\downarrow\leftarrow & \boldsymbol{Alg} \\ & & \boldsymbol{Dyn} & \nearrow \end{array}$$

に由来す**る *Spec* の物理的起源とそれに基く諸機能**が，ミクロからのマクロ創発 Spec← States← Alg← Dyn を主導する一方，

その逆過程として**帰納的認識**をトップダウン Spec→States→Alg→Dyn の形で実現する。

これが**見えるマクロから見えないミクロの認識を可能にする仕組み**！
それなしには,「高邁深遠なるミクロ理論」も**単なる当て推量に過ぎない！**

2.5 セクター分類空間 Spec の創発

さて，この創発過程の数学的定式化には「**セクター**」概念の役割が不可欠！

セクター ***sectors*** **とは?: 量子系の数学的記述には，対象系を特徴づける物理量達のなす非可換**(C*-) 環 $\mathcal{X}$ (: ***Alg***) と，**特定の文脈の中で**それを Hilbert 空間の線型作用素として具体化する表現 von Neumann 環 $\pi(\mathcal{X})''$ (: **表現**) が重要。

後者の中で全ての元と可換な**中心**$\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{X}) = \pi(\mathcal{X})'' \cap \pi(\mathcal{X})'$ は，巨視的観測可能量として「**秩序変数**」の役割をする：

秩序変数の値が定まった状況は物理的には**純粋相** (***pure phase***)，数学的には**中心自明**の**因子状態**：$\mathfrak{Z}_{\pi_\gamma}(\mathcal{X}) := \pi_\gamma(\mathcal{X})'' \cap \pi_\gamma(\mathcal{X})' = \mathbb{C}1$，の**準同値類**に対応し，以下ではこれを (数学的文脈で) **セクター** と呼ぶ。

ただし，**準同値**とは**多重度を無視したユニタリー同値性**のことで，因子状態はそれ以上中心を分解できないという意味で**状態・表現の極小単位**になっている。

*) ***Warning!***: 通常の量子力学では，その自由度有限の特殊性より ***sector*** **は唯１つ** （→ **マクロなし**！）で，因子性条件が既約性・純粋状態=「重ね合せの原理」に帰着し，そのことが余りにも無批判に流布している。ところが，不可視のミクロと可視的マクロとをつなぐ上で必須の無限大自由度，それと不可分一体の量子場を含む一般状況でこの単純化は機能しない！“Quantum physics 業界” と科学ジャーナリズムに蔓延する「量子パラドックス」（「シュレディンガーの猫」，etc.）の殆どは，この事情への無知に基く誤解！

2.6 セクター内 vs. セクター間のミクロ・マクロ双対性

このように定義されたセクターは，不可視の量子的ミクロと可視的マクロ古典との間の「**ミクロ・マクロ境界**」として機能し，それによって**「量子古典対応」**の正確な定式化を与える一般的理論枠としての**４項図式を実現する。**

より詳しく言うと，**セクター内ミクロレベル**と**セクター間マクロレベルとの間のミクロ・マクロ双対性が，中心スペクトル** $Spec(\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{X}))$ **の幾何構造によって記述される**:

⟵	可視的	マ**クロ**	as ***Spec*** =	**分類空間**	⟶	**セクター間**
$\cdots$	γ_N	$\cdots$	**セクター** γ	γ_2	γ_1	$Spec(\mathfrak{Z})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	**セクター内**
$\cdots$	π_{γ_N}	$\cdots$	π_γ	π_{γ_2}	π_{γ_1}	$\parallel$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	不可視の **ミクロ**

Cf. マクロ変数を生成し得ない**有限自由度量子力学ではマクロ= １点しかない**ため上の状況は起き得ない！このゆえに，量子力学が扱う「時空・マクロ世界」は，物理的自然とは無縁な別世界から密輸入した正体不明の幾何学概念に過ぎない。

3 量子論の基本構成

《可視的マクロ=現象と微視的ミクロ=理論との相互関係？》という文脈で量子論を構成する基本概念の意味を掘り下げようとすると,《セクター= 相の概念》及び 《対称性の破れの判定条件》が不可欠な役割を演じ，その正確な定式化には「ミクロ・マクロ双対性」の枠組が重要である。それを見るために,

「**ミクロ・マクロ双対性**」**に基づく**「**4項図式**」とは?:

どうすれば見えるデータに基いて見えないレベルの状況を推測できるのか?

そのような推論を可能にしその正しさを保証する根拠は一体どこにあるのか？

に答えることが重要。

この課題の解明を通じて得られた結論を（或る抽象レベルで）まとめれば,

見えないミクロと見えるマクロとの間の相互関係を,

「**ミクロ・マクロ双対性**」という**双方向的関係：「マクロ」**$\leftrightarrows$**「ミクロ」**,

として理解する方法論の確立 *[IO03]***,**

それによって多くの自然の謎に合理的な答を大筋で与えることができるということで，それについてお話するのが以下の目標。

3.1 「ボトムアップ」的概念構成と無限自由度=量子場

とすれば,《Stone-vN thm $\Rightarrow$ **創発過程欠如**》のため，蠢くミクロ動力学からのマクロ秩序生成の道を封じてしまった量子力学が抱える理論的欠陥，その本質解明こそ,《**ミクロマクロ不整合** $\Rightarrow$ ***QM paradoxes***》解決への道の出発点では？

物理量の代数から出発した我々の「圏論的代数的アプローチ」の場合，**同一の物理系**を記述する一つの代数に対して，非自明な中心を持つ表現は，その中心のスペクトル分解を通じて**無数の異なる**中心自明な因子表現 = 「**セクター**」に分解され，中心スペクトルが，ミクロ量子系の**マクロに異なる**配置 =「相」=「セクター」を分類し識別する**秩序変数**として機能する。

相転移のような物理系の動的振舞は，安定配置の状況下で相互に断絶していた異なる複数の「**相**」=「**セクター**」の関係が特異点= "short cut" (e.g., 「電流のショート」や Josephson 接合を流れる Josephson 電流, etc.) を介して起こす遷移として記述可能！

$\Longrightarrow$ この見方に立てば,「(自発的および明示的) **対称性の破れ**」の理論的数学的記述が以下の形で実現され，それを用いれば，Einstein 方程式に本来内在した物理的本質=《**物質運動からの時空生成**》も整合的に記述可能：

「いつどこで」を記述する**時空概念も，単に** ***universality*** **の高い秩序変数の一種**として，物性論的な秩序変数，凝縮状態の index と同格の存在に格下げ！

3.2 量子場＝無限自由度量子系: 真空・純粋状態・重合せ原理への過剰依存

上に述べた理由から，有限自由度の「量子力学」ではなく，無限自由度量子系としての「量子場」の考察が不可欠となる。

ただし,「場の量子論」においてしばしば繰り返される主張：《真空状態・真空表現での量子論こそが本物の理論》は，以下で見るように，量子論・量子場理論の真空表現にまつわる理論構造の特殊性に基づく思い込みに起因し，もし絶対零度の真空と有限温度の熱的状況とをスムーズにつなぐ理論形式が存在していれば，無意味な主張に帰してしまう。

まず，黒体輻射に関する Planck の量子仮説に始まる量子論・量子場理論の歴史は，元々，電磁輻射の量子論，つまり，量子電磁場が記述する現象に端を発するが，それが量子論・量子場理論へと直線的に展開することを望むのは無論非現実的で，現実の量子論が辿った歴史は，原子・分子の量子論として有限自由度系の量子論 = 量子力学を経由する。

その量子力学の理論的本質は，**有限自由度**の正準交換関係で定まる物理量代数で記述され，有限次元正準交換関係（の Weyl 表現）の際立った特徴は，**Stone-von Neumann 一意性定理**によってただ一つのユニタリー同値類から成る既約表現を持ち，どんな表現も多重度とユニタリー変換を通じて全て Schrödinger 表現に帰着され，**「Dirac 変換理論」**が機能するということ。

3.3 表現されるもの vs. 表現するもの：群と群表現の双対性

そこで量子場理論とそこでの量子場概念，その表現等々という問題は，もう少し柔軟な眼で見直しておく必要がある。

その目的で,「量子場理論」における代数構造の扱いを,《群と表現との間の往復関係》という文脈と比較してみよう。Hilbert 空間に働く作用素としての「場の演算子」= field operators は,「群の表現論」の文脈なら「行列表示」された群要素の具体形に対応する：実際,（有限次元）ベクトル空間に働く作用素は，基底ベクトルを決めれば行列として書き下せるのだから。

そこで,「群表現論」= 調和解析が，様々な行列表現から区別され・それらを統合する代数構造として「抽象群」の概念を自立させ,《**同じ一つの抽象群** G **の多様な具体的諸表現**[1] (γ_i, V_i)》を扱うことで**諸表現の多様性**とそれを貫く**統一性**とを見事に捉えることに成功した例を振り返ろう。これは,「抽象群」の概念とその「具体的諸表現」という双対性構造（= Fourier duality）の持つ「二重化」の効用で，この仕組みを取込めば，同じ一つの物理系がとる**多様な現象諸形態を統一的に**理解することが可能になる。

伝統的な「場の量子論」(= quantum theory of fields) では，抽象的な「量子場」をその具体的な真空表現である「場の演算子」(= field operators) から分離せず両者を一体のものとして扱う。このため，全てを無理矢理「真空」に結び付けて語るという不自然さが避けられず，その趣旨を述べた発言や著

[1] 群 G の表現 (γ, V) の定義は，ベクトル空間 V 上の線型作用素 $End(V)$ に値を取る G 上の写像 $\gamma : G \ni g \longmapsto \gamma(g) \in End(V)$ で，関係 $\gamma(e) = I, \gamma(g_1 g_2) = \gamma(g_1)\gamma(g_2), \gamma(g^{-1}) = \gamma(g)^{-1}$ を満たすもののこと。

述には事欠かない：《真空状態・真空表現での量子論こそが本物の理論》という主張の essence も，実はそこにあったのである。

それに対して，Hilbert 空間上の作用素の形で表現される以前の抽象的な代数構造を一旦独自の自由度として「**量子場**」(= quantum fields) という形で同定し取り出せば，その多様な実現形態を様々な状態と表現を用いて扱う理論を「**量子場理論**」(= QFT) と呼んで区別することで，抽象的量子場代数の多様な実現形態を扱う自由度が得られる。

3.4 場の量子論 vs. 量子場理論

「場の演算子」から「量子場」を抜き出して区別するとはつまり，標準的「表現」である真空状況での「量子場」，即ち，真空表現された量子場としての「場の演算子」で書かれた「場の量子論」＝「真空場の量子論」から,「純代数的」概念としての「量子場」を真空概念から切り離して取出すことであり，ちょうど群論での行列表現とそれによって表現される「群そのもの」との間の**「表現するもの」vs.「表現されるもの」**という関係を明示化することに対応する：

	量子場理論	$\longleftrightarrow$	群論
表現するもの	場の演算子	$\longleftrightarrow$	表現行列
$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$		$\downarrow\uparrow$
表現されるもの	量子場	$\longleftrightarrow$	抽象群

こうして得られた「二重構造= 双対性」の自由度を活かして,「場の量子論と統計力学との関係」という問題を再考すると,《量子場理論 と 統計力学 の関係》という形に変換され，より深くかつ明快な答えが可能になる。

3.5 量子場理論 vs. 統計力学

普通「統計力学と場の量子論」という言い方で理解されるのは,「場の量子論」と「統計力学」という非常に異なる２つの物理理論の組合せまたは対比というのが通り相場だろう: 片や素粒子を含む物理的自然の基礎レベルで専ら機能する「場の量子論」に対して，他方の「統計力学」は物性理論を中心に熱的散逸的効果が重要になる現象領域で確率的統計的ゆらぎを扱う物理理論というのがその中味。もう少し立入ったレベルなら，**真空概念との深いつながり**の下に専ら**純粋状態**とそれに付随する**既約表現**に基いてミクロの量子ゆらぎを扱うのが場の量子論，それをベースに熱現象に伴う統計的ゆらぎを**混合状態としての Gibbs 状態**（及び対応する**可約表現**）を用いて論ずるのが統計力学という解釈が標準的な了解。

実際，真空状況での量子力学・場の量子論と，有限温度の統計力学とを扱う形式は非常に異なっている：前者には実時間による時間発展と物理量・状態が関与する状態 Hilbert 空間が伴うが，1950 年代，松原が創めた虚時間形式：$Z(\beta) := Tr(\exp(-\beta H))$ にそれらはなく，虚時間パラメーターは逆温

度として機能する。真空以外の熱的状態に置かれた量子場を扱う議論としては，高橋-梅沢の"thermo field dynamics"(1975 年) という実時間形式があるが，それ以外，大半の統計物理学・物性論の議論は虚時間形式を用いてなされてきた。

真空状態と統計力学的温度状態とを比較し，深いレベルでその相互関係を理解しようとしても，これほど大きな外観の違いに躓いては先に進めない。なるほど，温度 Green 関数の中で逆温度として機能する虚時間パラメーターを解析接続すれば，実時間領域での Green 関数が得られるのだから，それでも問題ないと expert は主張するかも知れないが，そうした解析接続を明示的に実行して時間的振舞を論じる場面に出くわす機会は non-expert には滅多にない。

それゆえ，真空状態及び対応する真空表現の範囲を越えて，熱的状態の family やそれに対応した統計力学的状況を統一的に扱う整合的視点を確保することが，真空場の量子論と量子統計力学との相互関係を吟味する上で重要になる。

するとすぐに思い浮かぶのは，高橋-梅沢 "thermo field dynamics" でなされたように,《「場の演算子」= 真空表現された量子場 $\varphi_{T=0}$ を如何にして有限温度の量子場 φ_T に拡張するか?: $\varphi_{T=0} \Longrightarrow \varphi_T$》という発想に違いない。

ここで先の議論:《単一の群 G とその多様な表現 (γ_i, V_i) との間の Fourier duality》，を思い出すことが重要になる！

3.6 抽象代数構造としての量子場と GNS 表現定理

そのために，真空 $T=0$ での量子場 $\varphi_{T=0}$ から有限温度の量子場 φ_T at $T \neq 0$ への直接の拡張：$\varphi_{T=0} \Longrightarrow \varphi_T$ ，を考えるのではなく，一旦量子場 $\varphi_{T=0}$ から温度に依らない「量子場そのもの」φ への抽出・移行を想定し，その抽象的 φ を真空状態 $\omega_{T=0}$ での Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_{T=0}$ 上の作用素 $\pi_{T=0}(\varphi)$ として真空表現したものと捉え直す。

ここで物理量代数 $\mathcal{A}$ で記述される量子系とその上の状態を 1 つ取って ω と書くと，ω は $\mathcal{A}$ 上の規格化された正値線型汎函数として数学的に定式化され，状態の全体 $E_{\mathcal{A}}$ は,

$$E_{\mathcal{A}} := \{\omega \in \mathcal{A}^* \text{ s.t. } \omega(A^*A) \geq 0 \text{ (for } \forall A \in \mathcal{A}), \ \omega(\mathbf{1}) = 1\}.$$

このとき，量子力学で周知の「状態ベクトルの Hilbert 空間」$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\omega$ の数学的由来は，次の $\boldsymbol{G}$(el'fand-)$\boldsymbol{N}$(aimark-)$\boldsymbol{S}$(egal) **再構成定理**に求められる：

***GNS* 再構成定理**

正値線型汎函数 $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ に対して，Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\omega$，各物理量 $A \in \mathcal{A}$ を $\mathfrak{H}_\omega$ 上の線型作用素 $\pi_\omega(A)$ として表わす表現 $\pi_\omega : \mathcal{A} \to B(\mathfrak{H}_\omega)$ が定まる。ω が $\omega(\mathbf{1}) = 1$ で規格化されていれば $\mathfrak{H}_\omega$ のノルム 1 の巡回ベクトル Ω_ω が,

$$\omega(A) = \langle \Omega_\omega \mid \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle, \qquad \overline{\pi_\omega(\mathcal{X})\Omega_\omega} = \mathfrak{H}_\omega$$

を満たして存在し，二番目の巡回性条件から３つ組 $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega, \Omega_\omega)$ は unitary 同値の範囲で一意に定まる。

このように物理量代数 $\mathcal{A}$ を前提すれば，状態 $\omega \in E_{\mathcal{A}}$ から表現加群 Mod $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega)$ が GNS 再構成で定まるが，自由度無限なら，状態 ω もその GNS 表現 $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega, \Omega_\omega)$ も無数に存在する：量子力学で当たり前だった添え字 ω なしの ***the*** Hilbert space 一意的決定の誤謬！[反例は無限次元 CCR の表現]。

こうして GNS 定理により任意の状態 ω に対して $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega, \Omega_\omega)$ が定まり，対応して状態 ω での量子場 $\varphi_\omega = \pi_\omega(\varphi)$ が定まるから，状態レベルで真空状態 $\omega_{T=0}$ を温度状態 ω_T の族に拡張，$\omega_{T=0} \Longrightarrow \omega_T$ すれば，それに付随して量子場は自動的に拡張される： $\varphi_{T=0} \Longrightarrow \varphi_T$

状態	表現	代数
温度状態族 ω_T	$\varphi_T = \pi_T(\varphi)$ $\nwarrow \pi_T$	
$\Uparrow$	$\Uparrow$	φ
真空 $\omega_{T=0}$	$\varphi_{T=0} = \pi_{T=0}(\varphi)$ $\swarrow \pi_{T=0}$	

以下で考えるのは，真空状態 $\omega_{T=0}$ を温度状態族 $\{\omega_T\}_{T>0}$ に拡張し埋め込むこと，$\omega_{T=0} \Longrightarrow \omega_T$，によって量子場で記述される多様な物理的状況を，**同じ量子場**の**異なる状態での記述として**統一的に見れば，状態遷移，相転移に関してどんな新しい視点が焦点化されて来るかを吟味することである：

3.7 表現論的量子場理論

量子場理論

量子統計力学		場の量子論
Gibbs 状態族	$\overset{\longleftarrow}{\rightarrow}$	真空状態・真空表現
$\nwarrow$		$\nearrow$
	量子場	

「量子場とその諸表現」という視点の導入によって，量子場= 表現される統一性 vs. 統計力学= その多様な表現形態，という隠れた関係が明示化される。その上で「真空状態と熱平衡状態」との相互関係を吟味するなら，状態概念に関して先行するのは「熱平衡状態の族」のほうであり,「真空状態」はその特殊な極限概念に過ぎず，それが「真空状態・真空表現」を特権的地位から引き摺り下ろすことになる。なぜなら，逆温度 $\beta = (k_B T)^{-1}$ における Gibbs 状態を ω_β と書けば，真空状態 $\omega_{vac} = \omega_\infty$ とは $\beta = +\infty$ の極限で実現される特殊な Gibbs 状態として，Gibbs 状態族の特殊な構成員であると同時に，勝手な Gibbs 状態 ω_β からそのスケール極限において現われる状態なのだから： $\omega_\infty = \lim_{\beta \to +\infty} \omega_\beta$。

4 「量子場の統計力学」とは？Gibbs 公式の限界

上の考察から，量子場理論全体の中で真空状態・真空表現が第二義的な位置付けしか持たず，熱的状態とそれに付随する表現の方が本源的な概念であることが明らかになった。物理量代数の generic な表現を von Neumann 環の構造として解析する数学的文脈はそれを更に補強する。ごく手短にそれを見ておこう。

物理の文脈で「Gibbs 状態」と言えば，十中八九 trace と密度行列による公式：

$$\omega_\beta(A) = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta\hat{H}})} = \mathrm{Tr}(e^{\beta(F-\hat{H})}A), \tag{1}$$

が想定される。$\mathrm{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}A), \mathrm{Tr}(e^{-\beta\hat{H}})$ は operator $e^{-\beta\hat{H}}$ が ***trace-class*** に属する時しか意味がなく，有限体積中に閉じ込められエネルギー準位が離散的な物理系なら OK だが，ひとたび Hamiltonian $\hat{H}$ が連続スペクトルを持てば意味を失う。また，この統計集団に属するミクロ量子系の各々は,「本当は決まったエネルギーをもつ純粋状態にあるが，温度や熱的効果が現れる現象論的レベルでは我々人間側の情報不足ゆえ，粗視化の近似操作として統計平均が入り込む」という解釈が採用される。しかし，無限自由度系である量子場を考慮した我々の視点だと物理量代数 $\mathcal{A}$ の上には trace 演算 (Tr) の定義すら保証されず，式 (1) と併せこのような確率解釈の妥当性それ自体の見直しが避けられない。

4.1 量子場の熱平衡状態と KMS 条件

そこでまず，式 (1) に係わる問題を解決した Haag-Hugenholtz-Winnink [HHW] の定式化を見よう。彼らが着目したのは Gibbs 公式から導かれる次の関係式で，

$$\begin{aligned}\omega_\beta(A\alpha_t(B)) & \left[= \mathrm{Tr}(e^{\beta(F-H)}Ae^{itH}Be^{-itH})\right. \\ & \left.= \mathrm{Tr}(e^{\beta(F-H)}e^{i(t-i\beta)H}Be^{-i(t-i\beta)H}A)\right] = \omega_\beta(\alpha_{t-i\beta}(B)A),\end{aligned} \tag{2}$$

最初と最後を結ぶ等式を K(ubo)-M(artin)-S(chwinger) 条件，それを満たす状態 ω_β を KMS 状態と呼ぶ。数学的に正確な定式化は次の通り：

Definition 1 (KMS 条件) 物理量代数 $\mathcal{A}$ の状態 $\omega_\beta \in E_\mathcal{A}$ は次の ***KMS* 条件**を満たす時，*(β-)**KMS*** **状態と呼ばれる***:* 任意の物理量の対 $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，複素領域 $\mathcal{D}_\beta \equiv \{z \in \mathbb{C};\ 0 \le \mathrm{Im}(z) \le \beta\}$ の内部で解析的，その閉包 $\overline{\mathcal{D}_\beta}$ で連続な函数 $F_{AB}(z)$ が存在し，$F_{AB}(t) = \omega_\beta(A\alpha_t(B))$ および $F_{AB}(t+i\beta) = \omega_\beta(\alpha_t(B)A)$ という関係が任意の $\forall t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ。

4.2 KMS 状態と Gibbs 状態

上の定義では，時間発展 $\alpha_t(B) := e^{it\hat{H}}Be^{-it\hat{H}}$ のパラメータ[2] t を解析接続する際，物理量 B に無用の制限が課されるのを巧妙に回避している。

KMS 条件は，trace にまつわる制約を取り除くため，trace を使わずに熱平衡状態を特徴づける条件として持込まれたが，$\mathcal{A}$ が trace を持つ場合，例えば，有限次元行列環 $M_n(C)$ や有限自由度の正準交換関係（の準自由状態）というような場合には，Gibbs 公式 (1) を再現する。その意味で，KMS 状態は，無限自由度系にも適用可能な形に Gibbs 状態を一般化し熱平衡状態を記述するものとして，Gibbs 状態の本質を引き継ぐ概念である。

この解釈は，例えば，系の動力学に対する摂動のもとでの「平衡への回帰」という形で示される KMS 状態の安定性や，自由エネルギーについての変分原理との密接な関係を通じて正当化される。

4.3 KMS 状態と冨田・竹崎理論

KMS 状態 ω_β は混合状態ゆえ，対応する GNS 表現 $(\pi_\beta, \mathfrak{H}_\beta, \Omega_\beta)$ s.t. $\omega_\beta(A) = \langle \Omega_\beta, \pi_\beta(A)\Omega_\beta \rangle, \mathfrak{H}_\beta \equiv \overline{\pi_\beta(\mathcal{A})\ \Omega_\beta}$ は可約，つまり，$\pi_\beta(\mathcal{A})$ の可換子環 (communtant) は非自明: $\pi_\beta(\mathcal{A})' \neq \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}_\beta}$ である。

もっと詳しく，冨田・竹崎理論によれば，$\mathcal{M} \equiv \overline{\pi_\beta(\mathcal{A})}^w = \pi_\beta(\mathcal{A})''$ は，その可換子環 $\mathcal{M}' = \pi_\beta(\mathcal{A})'$ と次の意味で鏡像関係にあることがわかる。即ち，$\mathfrak{H}_\beta$ には次の関係を満たすような反ユニタリー作用素 J が存在して **modular 共役作用素**と呼ばれる：

$$Je^{-\beta H_\beta/2}A\Omega_\beta = A^*\Omega_\beta \qquad (A \in \mathcal{M}), \tag{3}$$

$$J\Omega_\beta = \Omega_\beta, \quad e^{itH_\beta}\Omega_\beta = \Omega_\beta, \tag{4}$$

$$J^2 = \mathbf{1}, \qquad \langle J\Phi \mid J\Psi \rangle = \overline{\langle \Phi \mid \Psi \rangle}, \tag{5}$$

$$J\mathcal{M}J = \mathcal{M}', \ \ e^{itH_\beta}\mathcal{M}e^{-itH_\beta} = \mathcal{M}, \tag{6}$$

$$JH_\beta J = -H_\beta. \tag{7}$$

上の関係式: $Je^{-\beta H_\beta/2}A\Omega_\beta = A^*\Omega_\beta$ (3) を使えば trace と無関係に元の式 (2) を導くことも容易。

4.4 Modular 作用素 $\Delta_\beta = e^{-\beta H_\beta}$ と modular 共役 J

A) 可換子環 $\mathcal{M}'$ 及びモジュラー共役 J の物理的意味は，対象系に接する熱浴及び対象系と熱浴とを入替える操作として解釈される。

A1) 現実の対象系と熱浴は $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}'$ のように完全な鏡像関係になく，対象系と瓜二つの「熱浴」は不自然に見えるかも知れないが，それで OK なのは熱力学第０法則に依る： 第０法則とは，物体 A, B の「熱平衡的接触関係」$A \sim B$ が推移律を満たす：$A \sim B$ & $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ という経験的事

[2] これは物理量代数とその状態，動力学を明確に区別して扱うのが当然の数理物理学的定式化なので，実時間形式での統計力学であることは改めて断るまでもない。

実から，二物体間の「熱平衡的接触関係」の同値律性を保証し，それに伴う同値類として熱平衡状態の概念を導くもので，同値類を区別するパラメータ (の一つ) が「温度」。

よって熱平衡概念には,「熱平衡的接触関係」を保つ限り対象系に接触させる「熱浴」は任意という意味の普遍性がある。何れにせよ対象系の熱平衡は，対象系と「熱浴」との「接触面」でのエネルギー授受に規定され,「熱浴」内部の物理的構造の詳細には無関係。

A2) **Modular 共役作用素** J は，系の物理量の代数 $\mathcal{M}$ と熱浴に対応する可換子環 $\mathcal{M}'$ とを入替える: $J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'$ & $J\mathcal{M}'J = \mathcal{M}$.

系と熱浴から成る全体系の**熱的 Hamiltonian** H_β は GNS 表現 $(\pi_\beta, \mathfrak{H}_\beta, \Omega_\beta)$ における時間発展の無限小生成子だが，$JH_\beta J = -H_\beta$ よりこの「Hamiltonian」H_β の**スペクトルは正負対称**。これは「**負エネルギー**」の存在を意味するが，それでもなお KMS 状態は真空状態より高い安定性を示すことが知られている。

4.5 熱平衡 modular 構造に内在する「不定計量」

B) これは，状態の「安定性」をスペクトル条件（エネルギーの正値性）の形でしか理解しない物理学的「常識」の盲点を鋭く突く observation に他ならない。

作用素 $e^{-\beta H}$ が trace class ではない無限系で物理系と熱浴とを分離することは一般に不可能だが，形式的に系の Hamiltonian を H と書けば，J による系と熱浴との入替えに対する「反転対称性」 $JH_\beta J = -H_\beta$ の由来は

$$H_\beta = H - JHJ \tag{8}$$

という形で了解されるだろう。H_β の**正負対称性**という形で式 (8) に示された**負エネルギー**は，対象系と熱浴の間のエネルギー授受に際して系から熱浴へ移るエネルギーと見做される。統計力学の Gibbs 公式を通じて一旦葬り去られたかに見えた「熱浴」なる不可解にして重要な熱力学的概念は，こういう抽象的な形で統計力学の代数的・一般的定式化の中に生き残っていたということである。

そして，“**負計量**”を持つ縦波光子同様，H_β には負符号の成分（$-JHJ$）が含まれ，それは熱平衡状態に付随する**鞍部点**の構造の存在を意味する。ここに含まれた**不安定モード**とその集積がもたらすのは，恐らく，熱浴という巨視的存在に違いない。

4.6 純粋状態 vs. 混合状態，どちらが近似か？

C) Gibbs 公式 (1) は,「真空上の既約表現の理論から統計的混合という粗視化を通じて熱平衡状態が現れる」という通常の解釈に適合するが，無限自由度系にも適用可能な形での熱平衡状態定式化の観点からは，この解釈には次の欠陥がある：

C1) 量子場のような無限自由度系では，表現された物理量の代数 (を弱位相で完備化した von Neumann 環) $\mathcal{M}$ は，trace をもたない III 型が普通

で，混合状態である KMS 状態は純粋状態に分解できる (端点分解) が，分解は非一意的・恣意的で式 (1) の場合のような解釈は不成立。つまり，**本質的に混合状態**で，熱平衡状態の根拠を**人間の「無知」という主観的要因に帰することはできない**。

C2) 《真空上の「本物の」理論から巨視的現象を抽き出すために粗視化＝「近似」操作を施すことで温度のある熱力学的状況が得られる》との通常の解釈とは逆に，真空上の理論は，ミクロ対象系と「外界・環境」との間の coupling を無視して対象系の外に実在する「熱浴」を無視し，対象系にのみ注意を向けることで「近似的に」得られるものに「過ぎない」という認識が成立つ。即ち，この理論形式で有限温度の理論から出発して，ミクロ領域に向かって時間尺度を scale up $t_{\mathrm{micro}} = \lambda t_{\mathrm{macro}}$，$\lambda \gg 1$ すると，KMS 条件より温度は $T_{\mathrm{micro}} = T_{\mathrm{macro}}/\lambda \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (：真空) と変換し，$T = 0$ K に近づく。同時に，$T \neq 0$ K では式 (3) 及び期待値を通して“couple” していた対象系 $\mathcal{M}$ と熱浴 $\mathcal{M}'$ とが，$T = 0$ K の真空では“decouple”し，対象系のみの理論が残る。

C3) $T \longrightarrow 0$ K の極限を真空期待値 $\omega_{vac}(A) = \langle \Omega, \pi_{vac}(A)\Omega \rangle$ と書くと，摂動論的には，二重 Feynman 図形法で相関関数が互いに複素共役な２つの量のテンソル積に分解することに対応して，

$$\omega_{\beta=\infty}(A \otimes B) = \omega_{vac}(A)\omega_{vac}(B) = \omega_{vac}(A)\overline{\omega_{vac}(B^*)}, \tag{9}$$

となる。それにより，時間の scale up で bulk matter の影響を近似的に無視できて真空状態に帰着するのである。つまり，熱的・散逸的なマクロ領域の概念・理論のみが一方的に「近似」なのではなく，真空表現に基づくミクロ世界の記述にも，本来あるはずの対象系と「外界」との相互作用・相関が記述に際して十分良い精度で無視可能という意味の「近似」が入込んでいるということなのだ。

勿論，この「現実世界」が温度一定でない以上，熱平衡状態も限られた適用範囲の中で意味のある一つの近似にすぎない。実際，熱平衡状態の概念を可能にした上記第０法則の同値関係の根拠には，熱平衡状態の安定性，即ち，平衡への回帰があり，これは熱力学第２法則の主張する内容に他ならない。「平衡への回帰」は，時間が短すぎても長すぎても成り立たず，熱平衡概念の「近似性」と「歴史的非反復性」の問題がここに潜んでいる。ひとたび平衡状態を離れれば,「熱浴」を，対象系 $\mathcal{M}$ の単なる“影武者” $\mathcal{M}'$ で済ませることはできず，環境自身の“個性”とその内部構造が重要で，それは非平衡統計力学の対象となってくる。

5　対称性の破れ，鞍部点とマクロ化創発

こうした反省に立ちつつ，ミクロの動的振舞を踏まえて，非自明なマクロ現象の面白さを如実に掴み取ろうとすれば,［**安定・不安定の分岐点**］である**鞍部点**をきちんと捉えることこそ不可欠の前提であるに違いない。

だとすれば，これは，専ら［安定性・安定点］に focus した「記述」に特化してきたこれまでの科学・工学主流の盲点を突いて，自然に対して我々

が自然な態度を取り得るために必須の前提であり，そのための突破口となるのかも知れない。

もしこの視点からの動的過程の具体的系統的記述が可能となれば，［安定性］の考察の意味は，どの“branch”なら（条件的）安定性が満たされるか，それを支える条件は何か？という問題を吟味することに帰着され，そのための舞台設定が多重 sector 構造を記述する分類空間 Spec に他ならない。こうして，広い視野の中に［安定性，不安定性］の問題が自然に位置付け直されることになるのではないか？更にこれは，鞍部点＝［安定・不安定の分岐点］における不安定性から**「創発」を通じて分類空間 Spec が形成される過程**を追え！という課題を要求することにもなる。

恐らくそれによって，動が基本で，静は条件的，という当たり前の認識を素直に記述するという大きな転換が可能となるに違いない。そのための基本が実は，これまで忌み嫌われた「不定計量」に潜んでいるということではないだろうか？更にひょっとするとこれは，ルネ・トムのカタストロフィの考察とその分類を鞍部点，不定計量という形で具体化することになるのではないか？

5.1 対称性の破れ

対称性の破れの一般的定義 [Unif03]：

Definition 2 代数 $\mathcal{F}$ の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ に対して，その中心 $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F}) = \mathfrak{Z}(\pi(\mathcal{F})'')$ のスペクトル $Spec(\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F}))$ の各点が G-不変なら，この表現において，(G, τ) は *unbroken*，そうでなければ 破れているという。

対称性の破れの本質は，マクロ変数 = **低エネルギーモード**としての秩序変数から成る表現環の中心が G の作用で動くということ $\Longrightarrow$ 対称性の破れ = 「**赤外不安定性**」。

任意の表現は，G-*unbroken* 因子表現と G-中心エルゴード的非因子表現（後者が対称性の破れ）との直和に分解され，中心スペクトル上に「**相図**」が描ける。

躍動する自然の動きを捉えるには，それを駆動するミクロレベルの動力学に足を踏み入れることが不可避だが，当のミクロ現象は，それを可視化 and/or 拡大する何らかの device なしにそのままでは不可視！とすれば，いつでもどこでも論理整合的な現象記述が可能だと思い込むことは，如何に非現実的な要求であるかが分かる。とすれば，論理整合的な現象記述が可能な stabilized Macro level のデータから，それを産み出した dynamical Micro system とは何であったか？を後知恵的に遡及する「逆問題」の介在なしに我々の現象記述はそもそもあり得ない。

5.2 対称性の破れとセクター：マクロ創発現象

そこで，現代物理学の基礎をなす量子場理論の基本構造を再考する： ここでは，直接目には見えず理論的にのみ記述されるミクロ系と実験観測を介したマクロレベルへのその可視化（＝マクロ化）とがどんな関係で結ばれるか？と

いう問題構成の典型例が見出される。この視点から理論の定式化を振り返るとき，対象とする物理系の記述には，系の動力学／物理量の代数／その上の物理的状態の族／その状態族に対する状態分類の空間，という４項が最小限必要だった（4 項図式)。

a) まず，物理系の物理量 A を集めると，その全体は非可換抽象代数 $\mathcal{A}$ をなし，逆に個々の物理量 A は物理量代数 $\mathcal{A}$ の要素となる（：積の非可換性＝量子性)。

$\mathcal{A}$ 上の期待値汎函数である状態 $\omega : \mathcal{A} \ni A \longmapsto \omega(A) \in \mathbb{C}$ は非可換ミクロ世界 $\mathcal{A}$ をマクロ期待値 $\omega(A)$ に橋渡しする"***Micro-Macro interface***"として測定結果を生成・記録し，GNS 定理: $\omega(A) = \langle\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega\rangle, \Omega_\omega \in \mathfrak{H}_\omega$ を通じて Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\omega$ 上の作用素による $\mathcal{A}$ の表現 $\pi_\omega : \mathcal{A} \ni A \longmapsto \pi_\omega(A) \in B(\mathfrak{H}_\omega)$ を与える。抽象代数 $\mathcal{A}$ のレベルは測定過程に晒される前の量子系の virtual なあり方に対応し，Hilbert 空間での表現 $A \longmapsto \pi_\omega(A)$ は測定= マクロ化過程でのミクロ・マクロ相互関係の特定の文脈を選択する。

表現以前に古典的自由度を持たない純量子系が無数の異なる表現（：正確には次に述べる disjoint 表現）を持つ状況は,「古典的マクロ対象=無限量子の集積効果」という「量子古典対応」の本質を体現する無限自由度量子系固有の現象である。

（Cf. 有限自由度量子力学はこの状況を記述できないため,「Schrödinger の猫」はじめ多くの無用な概念的混乱が避けられない一方，有限量子系の量子論的本質は無限量子系から容易に特殊ケースとして再現されるので，無限量子系への限定で議論の一般性が失われる心配はない）

こうして，マクロ秩序変数は人為的に外から持ち込まずとも，ミクロ量子系内部から自然に生成し，そのスペクトルがミクロ量子系の取る多様な構造・配置を記述する分類空間を与える。これによって古典的マクロレベルの幾何構造の物理的由来とその数学的普遍性が基礎づけられ，ミクロ系と種々のマクロ古典レベルとをつなぐ普遍的相互関係が「ミクロ・マクロ双対性」として明確に定式化される [MicMac, Unif03, IO13, IOOk13]。

重要な点は，セクター構造を記述する秩序変数 $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A}) := \pi_\omega(\mathcal{A})'' \cap \pi_\omega(\mathcal{A})'$ のスペクトル $Sp(\mathfrak{Z}) := Sp(\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A})) =: Spec$ が担う「分類空間」の機能で，時空の物理的創発の解明 [IO10] がその延長上に可能となる。

b) ここでは，相対論的量子場の局所熱的状態の数学的定式化 [BOR] と D(oplicher) H(aag)R(oberts) セクター理論 [DHR, DR89] から抽出した「セクター」概念及び「セクター」=「純粋相」を選び出す「判定基準」を「方程式」と見るガロア方程式論の視点 [Unif03, IO04, IO13] が重要で，記述対象の物理的状況に応じた量子状態の然るべき族を「方程式」の「解」として選び出せば，自然な物理的解釈が「圏論的随伴」によって定まる。

内部対称性の考察では直接測定に掛らない非物理量を含む量子場の代数 $\mathcal{F}$ が必要だが，物理的解釈のためには観測可能量の代数 $\mathcal{A} = \mathcal{F}^G$ が重要になる。ここで中心的働きをする $\mathcal{A}$ の拡張された「セクター」=「純粋相」は,「中心」が自明な「因子表現」$(\pi, \mathfrak{H})$ s.t. $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A}) = \mathbb{C}1$ の「準同値類」(= 重複度を無視した unitary 同値類) として定義される。「中心」が非自明 $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A}) \neq \mathbb{C}1$ なら，可換環 $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A})$ を「同時対角化」によってスペクトル分解すれば，それに伴って $\pi(\mathcal{A})''$ がスペクトル $Sp(\mathfrak{Z}) = Spec$ 上で「セクター」の直積分に中

心分解される： $\pi(\mathcal{A})'' = \int^{\oplus}_{\chi \in Spec} \pi_\chi(\mathcal{A})'' d\mu(\chi)$。

5.3 **セクター** due to disjointness

ここで異なる「セクター」π_1, π_2 相互は,「unitary 非同値性」よりはるかに強く含意の深い「無縁性 (disjointness)」条件を満たす：i.e., $T\pi_1(A) = \pi_2(A)T$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ ならば $T = 0$。可換性を特徴とするマクロ量は，複数の「セクター」=「純粋相」から成る「混合相」の「中心」$\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A})$ として現われ，そのスペクトル=実現値 $\chi \in Spec$ は「純粋相」を識別する「秩序変数」として機能する。

「セクター」=「純粋相」は，ミクロ量子系とマクロ古典系=「環境系」とを分ける「境界」として機能すると共に，両者を「ミクロ・マクロ複合系」=「混合相」に統合する。それによって既に見たセクター内 vs. セクター間の duality が成立つ：

⟵ **セクター**の	作る可視的	**マクロ**		⟶	**セクター間**関係
$\cdots$	γ_N	**セクター** γ	γ_2	γ_1	$Spec$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	↑ セクター**内部**
$\cdots$	$\pi_{\gamma_N}\vdots$	$\pi_\gamma\vdots$	$\pi_{\gamma_2}\vdots$	$\pi_{\gamma_1}\vdots$	‖
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	↓ 不可視の**ミクロ**

5.4 DHR **セクター理論とその限界**

c) そこでの理論は，時空共変な量子場代数 $\mathcal{F}$ の時空的振舞を記述する動力学と $\mathcal{F}$ への群作用 $G \underset{\tau}{\curvearrowright} \mathcal{F}$ で定まる内部対称性とから構成されるが，内部対称性が破れない状況で測定可能な $\mathcal{F}$ の物理量は G-不変量 $\mathcal{A} := \mathcal{F}^G$ のみで，非自明な G-変換性を持つ量は観測不能。通常,「何が測定可能で何がそうでないか？」は殆ど問わず，対称性 G の仮定から物理量の期待値間に想定される関係式が実験結果と整合すれば，それを理論構成の正当化と看做すのだが，実はこれは不十分：観測不能量を含む $\mathcal{F}$ で記述された理論の［G-力学系 $G \underset{\tau}{\curvearrowright} \mathcal{F}$］と現象側の［測定可能量 $\mathcal{A} \overset{\text{状態族 } \{\omega_\alpha\}}{\longrightarrow}$ 測定値 $\omega_\alpha(A), A \in \mathcal{A}$］との間の gap は，測定可能量 $\mathcal{A}$ だけから群 G と非自明な G-変換則に従う代数 $\mathcal{F}$ とを一意に定める「逆問題」の解なしには埋まらない。DHR 理論は，有界時空領域 $\mathcal{O}$ 毎にその因果的補集合 $\mathcal{O}'$ 上で $\mathcal{A}$ の真空表現 π_0 との同値性を要求する DHR 判定基準: $\pi\restriction_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \cong \pi_0\restriction_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}$ を満たす $\mathcal{A}$ の表現 π= 「セクター」全体を群双対 $\hat{G}$ と同定し，$\mathcal{F}$ と G とを $\mathcal{A}$ のガロア拡大 $\mathcal{F} = \mathcal{A} \rtimes \hat{G}$ 及びガロア群 $Gal(\mathcal{F}/\mathcal{A}) = G$ として定め，この逆問題を解いた [DR89](π_0 は $\mathcal{A}$ の真空表現，$\mathcal{A}(\mathcal{O}')$ は $\mathcal{O}$ の因果的補集合 $\mathcal{O}'$ 内で測定可能な物理量の C*-環)。こうして DHR 理論は，目に見えるマクロデータであるセクター構造 $\hat{G}$ から，ミクロレベルの内部対称性 $G \underset{\tau}{\curvearrowright} \mathcal{F}$ を群双対性（$G \leftrightarrows \hat{G}$）とガロア拡

大によって導出するという画期的意味を持つ。

d) ただしこの DHR 理論は，真空状況とそこからの局所的ズレに focus し既約表現に依拠して「セクター」を扱うため，群 G の全ての表現が ***unitary* 表現された**破れなしの対称性に帰着し，自然界で重要な「対称性の破れ」が扱えない。量子場代数 $\mathcal{F}$ の群対称性 $G \underset{\tau}{\curvearrowright} \mathcal{F}$ は，$\mathcal{F}$ の既約 (より一般には因子) 表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ で共変性: $\pi(\tau_g(F)) = U(g)\pi(F)U(g)^*$ $(\forall F \in \mathcal{F})$ を満たす G の unitary 表現 $(U, \mathfrak{H})$ が存在すれば破れない対称性，そうでなければ破れた対称性を記述する。通常物理で用いる言い方は，G を Lie 群としてその Lie 環表現の生成子の定義不能性を対称性の自発的破れと定義するがこれは不正確で，対称性の破れは［$\mathcal{F}$ の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ の因子性 $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F}) := \pi(\mathcal{F})'' \cap \pi(\mathcal{F})' = \mathbb{C}1$］と［$G$-表現 $(U, \mathfrak{H})$ の共変性］との非両立性にある [Unif03]。つまり，$\mathcal{F}$ の因子表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ で G の共変的 unitary 表現が存在しないか，または G の共変的 unitary 表現 $(U, \mathfrak{H})$ は存在するが G の破れのため $\mathcal{F}$ の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ の因子性が破れるか： $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F}) \neq \mathbb{C}1$，の二通りの記述がある。更にセクター概念を互いに disjoint な「因子表現」に拡張すると，**対称性の自発的破れ**だけでなく明示的に破れた対称性を取込むことも可能であり，例えば温度はスケール不変性の破れに伴う秩序変数として同定される [IO04]。

5.5 「4 項図式」:「ミクロ化転回」⇄「マクロ化創発」

こうして「ミクロ・マクロ双対性」を軸に物理量とその測定値，ミクロ量子とマクロ古典の双方向的一般的関係が理解された [IO13]。ただし，これは時空的に変化発展する物理系のスナップショットであり，変化発展の過程を取込んで一つの物理系を十全に記述するには，過程を引き起こす「原因」= dynamics と「時間空間」の物理的本性の解明が不可欠で，そのための理論的枠組として「4 項図式」[IO13, IOOk13] が有効に機能する：

マクロ： 創発 ↗	Spec= 分類空間	↘量子場
States =状態族	↓↑ $\underset{\text{GNS}}{\leftrightarrows}$ RepMod= 表現加群 $\leftrightarrows$ Galois ↓↑	Alg =対象系の代数
双対場 ↘	Dyn= 動力学	↗余創発 ：ミクロ

。

古典的マクロ対象を「無限個の量子の集積効果」と見る「量子古典対応」の直観的描像は，マクロ世界しか知らない古典物理学が未知のミクロ量子世界に踏込む際，道案内を務めた重要な発見法的理念だが,「無限個量子の集積」という「**無限自由度量子系**」の数学的扱いなしには理論的定式化が不可能である一方，通常の量子力学では**有限自由度系**しか扱えないため,「量子古典対応」は永らく棚晒しにされてきた。「4 項図式」に基づく「ミクロ・マクロ双対性」は，無限自由度量子系の扱いを可能にした現代の数学的技術水準を踏まえて,「量子古典対応」の重要な核心に数学的定式化を与えて救出し，量子場のミクロ動力学とそれが産み出す多様なマクロ現象・構造との動的・有機的な相互関係を解明する研究の本格的展開を可能にした。例えば，見慣れたマクロ世界から見知らぬミクロ世界へのジャンプを（地球中心的現象論的世界観を宇宙を中心に据えた動力学へと開いた「コペルニクス転回」を一

 物性研究・電子版 Vol. 6, No. 4, 064221 (2017年11月号)

般化して）総称的に「ミクロ化転回」と呼べば，創発した分類空間 $Spec$ を Alg(ebra) に map する量子場 $\varphi : Spec \to Alg$ とその双対概念である双対場 $\varphi^* : States \to Dyn$(amics) がこの転回を実現する概念装置となり，状態を表現加群 $RepMod$ へ移す GNS 構成 $GNS : States \to RepMod$ を介して双対場は Galois 対応 $RepMod \to Dyn$ と直結する：$\varphi^* = Gal \circ GNS$，等々。

5.6 Goldstone 凝縮モードの軸とホロノミー

「対称性の破れ」の文脈で，セクター分類空間は次の３つのレベルの軸を持つ:

a) **破れのない**内部対称性 H の諸表現を指定する表現のパラメータ空間 $\widehat{H}$,

b) **破れた**内部対称性に伴う縮退真空族の記述空間 $G/H = M$ [IO03, 04],

c) 対称性の（外部的）破れ[3]に付随した**時空創発** $\Gamma/G = \mathcal{R}$ [IO10].

これに対応するのは，構造群の系列 $\Gamma \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow H$ に伴う時空 $\mathcal{R}$ 上の主束の系列 $P_\Gamma \hookleftarrow P_G \hookleftarrow P_H$ とそれらの間の ***soldering*** の系列 $\mathcal{R} \overset{\rho}{\hookrightarrow} P_G/H$, $P_G/H \overset{\sigma}{\hookrightarrow} P_\Gamma/H$, $\mathcal{R} \overset{\tau}{\hookrightarrow} P_\Gamma/G$ を記述する ***Goldstone* モード** ρ, σ, τ である：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{R} & \underset{\Gamma/G}{\twoheadleftarrow} & P_\Gamma/G & \underset{G/H}{\twoheadleftarrow} & P_\Gamma/H & \underset{H}{\twoheadleftarrow} & P_\Gamma & \hookleftarrow & \Gamma \\
 & \diagdown\diagdown\circlearrowleft & \uparrow\tau & \circlearrowleft & \uparrow\sigma & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\
 & & \mathcal{R} & \underset{G/H}{\twoheadleftarrow} & P_G/H & \underset{H}{\twoheadleftarrow} & P_G & \hookleftarrow & G \\
 & & & \diagdown\diagdown\circlearrowleft & \uparrow\rho & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\
 & & & & \mathcal{R} & \underset{H}{\twoheadleftarrow} & P_H & \hookleftarrow & H
\end{array}.$$

6 セクター分類空間= Spec に基づく統一的理解

既に触れたように，**量子力学の通説的理論枠は，*Stone-von Neumann* 一意性定理ゆえにセクター構造がなく**，非自明なセクター分類空間が創発しないためマクロ古典レベルが欠落し，**ミクロ量子レベルとマクロ古典レベルとを架橋する論理は量子力学の理論に内在していない**。

それゆえ，例えば量子力学での「対称性」は“ユニタリー変換” と不離一体で,《**対称性の破れ**》**は起こり得ない**。歴史的には，真空＋少数粒子の励起，という量子場理論の狭い枠組に期待された役割が，この《破れた対称性》を《自発的破れ》という限られた形で取り込むことにあった。

しかるに，ハドロン物理学での対称性の例を見るまでもなく，殆ど全ての《破れた対称性》は，明示的に破れた近似的対称性であり,《自発的破れ》(= 系の動力学を不変に保つ broken symmetries）の限定はあまりに狭隘に見える。

そこで，元々破れのない対称性のみに限定されていた Doplicher-Haag-Roberts セクター理論を，**添加代数**《***augmented algebra***》の機構を通じて

[3]「常識では」，内部対称性・外部対称性の区別は「事前に」明らかだが，**外部時空の** ***epigenetic*** **な創発**の文脈で，内部外部の区別は対称性が破れた**事後**にしか付かないことに注意！

物性研究・電子版 Vol. 6, No. 4, 064221 (2017年11月号)

破れた対称性に拡張する際,《自発的破れ》と《明示的破れ》との区別も取り払うことができた [IO03] ので，次にそれを略述しよう。

6.1 量子場理論を基本に据えた量子力学の見直し

《相対論的不変な真空状態こそ量子場理論の表舞台であり，多少の微調整で量子力学の殆どの「常識」が依然としてそこで通用する》と思い込むのが，現行通説版の「場の量子論」。そこに色濃く滲み込んだ先入見は，**相互作用する量子場**と相互作用がなく生成消滅作用素で記述される**自由場との間に横たわる深遠な** ***gap*** に対する無理解に由来する。

そして，真空から励起した少数粒子状態で量子場理論の本質が理解し切れるとの得手勝手な思い込みが，**自然の全てを真空と「粒子」の言葉で**語り得ると信じる 20 世紀以降現代に特徴的な "***particle physics***" **的誤解**[4]を産み出してきた。

もし全ての物理現象が「粒子」間相互作用で記述し切れるなら大変結構だが，あいにく，**相対論的粒子は散乱現象を記述し得ない**，との No Go thm により，この「願望」は潰え去る !:

これは，量子場の p-space support の比較から容易に了解され，on-shell p_μ $(p^2 = m^2)$ [$\sim$ Einstein の関係式 $E = mc^2$] のみに support を持つ**自由場**に対して，**相互作用する量子場**は p-***space*** **全体に** ***support*** **が及ぶ**ため，両者を橋渡しする intertwiner は 0 しかない $\Longrightarrow$ ***Haag*** **の定理**！

こうした基本事項を総合すると，有限粒子系のみを基にして理論を構成する量子力学の致命的な欠陥は今や明らか。

より適切には，理論の骨格をなす量子場が，4(+1) 項図式の中で事象 events の形を取って Spec のレベルへ巨視化・可視化 (= 創発＋事象化）する際の現象形態が，事後的暫定的に「粒子像」を形作る，と見るべきで，

そうした途端，巷に流布する「Schrödinger の猫」はじめ，多くの「量子パラドックス」は氷解する (IO, 岡村 & 西郷, in preparation)：

例えば,「猫の生死の**重ね合せ状態**」なる言葉が「Schrödinger の猫」を巡る「量子パラドックス」の議論を賑わせるが，その《**生死の遷移を惹き起こす** ***intertwiner*** $|$ 生 $\rangle\langle$ 死 $| + |$ 死 $\rangle\langle$ 生 $|$ **が測定可能量でない限り**》,「生と死の**重ね合せ状態**」$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ with $|\psi\rangle = (|$ 生 $\rangle \pm |$ 死 $\rangle)/\sqrt{2}$ は，非対角項 $|$ 生 $\rangle\langle$ 死 $|+|$ 死 $\rangle\langle$ 生 $|$ なしの**混合状態** $\sigma = [|$ 生 $\rangle\langle$ 生 $| + |$ 死 $\rangle\langle$ 死 $|]/2$ **と識別不能** (IO '96):

$$\rho(A) = \sigma(A) \quad \text{for all observables } A,$$

ゆえ,「確率 1/2 で猫は生きているか死んでいる」という常識的状況に帰着し，何ら「ミステリー」は残らない！[：このように，巷に流布する多くの「量子パラドックス」には正確な定式化と条件付けが欠けている！]

という次第で，与えられた物理的状況で**どういうマクロ化過程が可能か？**の吟味なしに「波動関数の意味を深読み」してみても，現実の物理は始まらない！

[4] これは圏論を忌み嫌って集合論に執着する数学的偏見と軌を一にするもの。

: 誤解の原因は，GNS 表現 Hilbert 空間で物理量代数は《常に**既約表現**され，**どんな状態遷移も物理的に実現可能**》との暗黙の前提が密輸入されてしまうためだが，これは有限自由度量子力学でしかあり得ないこと！

しかるに，**無限自由度量子系に固有の凝縮現象の助けなしにミクロ量子現象をマクロ世界に可視化することは無理**な相談ゆえ，**有限自由度量子系しかない状況で観測・測定は実行不可能**！

同種の「早とちり」が「有名な EPR entangled states のパラドックス」にも潜んでいる!: ここでは，２つの量子系の「波動関数」のテンソル積の「重ね合わせ」$[|\psi_1^{(A)}\rangle \otimes |\varphi_1^{(B)}\rangle + |\psi_2^{(A)}\rangle \otimes |\varphi_2^{(B)}\rangle/]\sqrt{2}$ が論じられるが，この state vector を「**重ね合わせ状態**」として同定し得る物理量は現実の局所測定状況では存在せず,「テンソル積の重ね合わせか否か？」を判定する非局所的保存量の確認なしに，(A) 系または (B) 系の一方に対する局所測定だけでは,「EPR 状況」は「EPR パラドックス」にはなり得ない。

6.2 対称性の破れに伴う幾何構造の創発と添加代数

「**対称性の破れ**」**の判定条件**: 群 G の変換作用で記述される量子場の**対称性が破れるか否か**は**セクターの可動性で判定**され，G-作用で動くセクターで対称性は破れ，不変なセクターでは破れない。

群 G の対称性が破れるとき，破れずに留まる部分群を H とすると，破れに伴う**秩序変数族**が形成する等質空間 G/H のマクロ幾何構造としてセクター分類空間が**創発**する。この創発過程で本質的なのは，CT scan でよく知られた Radon 変換に基く Helgason 双対性と Hecke 環，それらと dual な関係の**添加代数** (***augmented algebra***) $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \rtimes \widehat{H\backslash G} = \mathcal{X}^H \rtimes \widehat{G}$ [IO03] である:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & K\backslash G/H : \text{Hecke 環} & & \\
 & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \\
K\backslash G & & \overset{\text{Helgason 双対性}}{\leftrightarrow} & & G/H \\
\uparrow & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & \uparrow \\
\uparrow & & G & & \uparrow \\
\uparrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\
H & & \uparrow & & K \\
 & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & \\
 & & H \times K & &
\end{array}
\quad \overset{\text{dual}}{\Longleftrightarrow} \quad
\begin{array}{ccccc}
 & & \widetilde{\mathcal{X}}^G = \mathcal{X}^H & & \\
 & {}^{G/H}\swarrow & \Downarrow & \searrow^{H} & \\
\widetilde{\mathcal{X}}^H & & G \Downarrow & & \mathcal{X} \\
\downarrow & \searrow\searrow_H & \Downarrow & \swarrow_{G/H} & \downarrow \\
\downarrow & & \widetilde{\mathcal{X}} & & \downarrow \\
\downarrow \swarrow & & \Downarrow & \searrow\searrow & \downarrow \\
\widehat{H\backslash G} & \hookrightarrow & \widehat{G} & \twoheadrightarrow & \widehat{H}
\end{array}
$$

6.3 対称性の破れと対称空間の創発

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \widetilde{\mathcal{X}}^G = \mathcal{X}^H & & \\
 {}^{G/H}\swarrow & & \Downarrow & & \searrow^{H} \\
 \widetilde{\mathcal{X}}^H & & \Downarrow & & \mathcal{X} \\
 \downarrow & \searrow\searrow_{H} & \Downarrow & \swarrow_{G/H} & \downarrow \\
 \downarrow & & \widetilde{\mathcal{X}} & & \downarrow \\
 \downarrow\ \swarrow & & \Downarrow & \searrow\searrow & \downarrow \\
 \widehat{H\backslash G} & \hookrightarrow & \widehat{G} & \twoheadrightarrow & \widehat{H}
\end{array}
\quad :
$$

$\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^H \rtimes \widehat{G}$ は観測可能量の代数 $\mathcal{X}^H$ の Galois 拡大で，創発した「解」の空間 G/H に Galois 群 $G = Gal(\widetilde{\mathcal{X}}/\mathcal{X}^H)$ が働いて「解」=セクターを相互に入れ替える

こうした対称性の破れとそれに基づくマクロ古典対象の創発現象の例は，枚挙に暇がない：

例１） 個々のミクロ電子の磁気モーメントの向きは絶えずゆらいでいるが，凝縮状態では一斉に整列し，特定の空間方向に磁化した強磁性体が成立する，

例２) 電磁現象を統制する $U(1)$ 内部対称性が Cooper 対の凝縮で破れると超伝導現象が起きる，等々，等々。

Lie 環 $\mathfrak{g}$ を持つ Lie 群 G で記述される対称性の破れは，破れのない部分 Lie 群 H & 部分 Lie 環 $\mathfrak{h}$ の下で不変なミクロレベルと，縮退真空族の凝縮を通じて可視的マクロレベルに創発したセクター分類空間 $M = G/H$ との間に面白い交叉を顕わす：即ち，Lie 構造 $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を持つ空間 M は，関係式 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ で特徴づけられた「**対称空間**」(É. Cartan) になることが証明できる [IO, unpublished]。

ここで $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ はホロノミー= 曲率効果を表す項で，セクター分類空間 M 上を経巡る loop に沿って M 上の元の点に戻れば,「対称性の破れ」の判定条件より，$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ は破れなしの対称性 $\mathfrak{h}$ に帰着する：i.e.,《**マクロの輪っ架** $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ **を貫くミクロの矢** $\mathfrak{h}$》

Chiral symmetry に伴う「カレント代数」構造: $[V, V] = V, [V, A] = A, [A, A] = V$ ($V \in \mathfrak{h}$: vector currents, $A \in \mathfrak{m}$: axial currents) は，このような対称空間の典型例を与える。

6.4 対称空間の諸例

G として Lorentz 群 $L_+^\uparrow$, H として回転群 $SO(3)$ を選べば，互いに Lorentz boosts で結ばれる Lorentz 枠全体の空間 $M = G/H \cong \mathbb{R}^3$ が対称空間となる。

実際， $\mathfrak{h} := \{M_{ij}; i, j = 1, 2, 3, i < j\}$, $\mathfrak{m} := \{M_{0i}; i = 1, 2, 3\}$ と定義すれば，関係 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ が，Lorentz 群の Lie 環構造より従う：

$$[iM_{\mu\nu}, iM_{\rho\sigma}] = -(\eta_{\nu\rho} iM_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} iM_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho} iM_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} iM_{\nu\rho}).$$

通常，回転群も Lorentz boosts も破れは想定されないが，実は，***Lorentz boosts* が破れないのは真空の特殊性**で［∵) Borchers-Arveson-Araki 定理より，エネルギーが観測可能な物理量となるのは正エネルギーかつ $T = 0K$ の真

空表現のみで，温度 $T \neq 0$ で Lorentz boosts は破れた対称性 (IO'86)]，この意味で, 破れた Lorentz 対称性に対する Lorentz 枠全体 $M \cong \mathbb{R}^3$ は，[boost, boost] = 回転という関係で特徴づけられた対称空間を創発する時空対称性の破れの典型例である。

《**マクロの輪っ架を貫くミクロの矢**》という一般的本質を，マクロ世界で直接例示するのは，熱力学第 2 法則。

熱力学第 1 法則の数学的本質は,

$$\Delta' Q \quad \overset{q}{\hookrightarrow} \quad \Delta E = \Delta' Q + \Delta' W \quad \overset{p}{\twoheadrightarrow} \quad \Delta' W,$$
$$\text{i.e., } \operatorname{Im}(q) = \ker(p),$$

という「完全系列」[5]で記述され，これは等質空間の Lie 構造を要約する $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の関係式と同じ形。

熱機関の循環過程は熱力学変数で定まる熱力学的相空間 M 上のループに対応し，それに伴うホロノミー $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ は，$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ と $\Delta E = \Delta' Q + \Delta' W = 0$ より熱機関から外界への熱産生・放出を記述する：$-\Delta' W = -[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \Delta' Q > 0$。

$\Rightarrow$ 対称空間性 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ は**熱力学第２法則** in ***Kelvin's version*** **!**

6.5 Helgason 双対性と Hecke 環

状態空間の構造変化を通して対称性の破れを見る上の説明の数学的機構は, ***Hecke* 環** $K\backslash G/H$ に伴なう Radon 変換及び ***Helgason* 双対性** $K\backslash G \leftrightarrow G/H$:

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & K\backslash G/H & \nwarrow & \\ K\backslash G & & \leftrightarrow & & G/H \\ & \nwarrow & G & \nearrow & \end{array}$$

にその本質がある。これに対してその代数的双対を動員すると,

$$\begin{array}{ccccc} & & K\backslash G/H : \text{Hecke 環} & & \\ & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \\ K\backslash G & & \overset{\text{Helgason 双対性}}{\leftrightarrow} & & G/H \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ \uparrow & & G & & \uparrow \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ H & & \uparrow & & K \\ & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & H \times K & & \end{array} \quad \overset{\text{dual}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{ccccc} & & \widetilde{\mathcal{X}}^G = \mathcal{X}^H & & \\ & {}^{G/H}\swarrow & \Downarrow & \searrow^{H} & \\ \widetilde{\mathcal{X}}^H & & G \Downarrow & & \mathcal{X} \\ \downarrow & \searrow\searrow_H & \Downarrow & \swarrow_{G/H} & \downarrow \\ \downarrow & & \widetilde{\mathcal{X}} & & \downarrow \\ \downarrow \ \swarrow & & \Downarrow & \searrow\searrow & \downarrow \\ \widehat{H\backslash G} & \hookrightarrow & \widehat{G} & \twoheadrightarrow & \widehat{H} \end{array}$$

[因みに，Helgason duality を媒介する Radon 変換とは CT scan 変換の一般化]

---

[5] $\operatorname{Im}(q) = \ker(p)$ は，可視化可能な仕事として見た energy 収支 0 ($\ker(p)$) と，熱の出入りだということ ($\operatorname{Im}(q)$) とは同値，を意味する。

6.6 添加代数構成法の立体化

対称性の破れの代数的幾何学的構造の本質は，**添加代数** [IO03] の接合積を制御する平面構造:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & {}_{G/H}\swarrow & \mathcal{X}^H = \widetilde{\mathcal{X}}^G & \searrow_H & \\
\widetilde{\mathcal{X}}^H & & \Downarrow & & \mathcal{X} \\
\downarrow_H & \searrow\searrow & \widetilde{\mathcal{X}} & \swarrow_{G/H} & \downarrow \\
\downarrow & \swarrow & \Downarrow & \searrow\searrow & \downarrow \\
\widehat{H\backslash G} & \hookrightarrow & \widehat{G} & \twoheadrightarrow & \widehat{H}
\end{array}
\quad \rightleftarrows \quad
\begin{array}{ccccc}
 & {}_{\mathcal{R}}\swarrow & \mathcal{O}_\rho = \mathcal{O}_d^H & \searrow_H & \\
\mathcal{A}(\mathcal{R}) & & \Downarrow & & \mathcal{O}_d \\
\downarrow_H & \searrow\searrow & \mathcal{X}(\mathcal{R}) & \swarrow_{\mathcal{R}} & \downarrow \\
\downarrow & \swarrow & \Downarrow & \searrow\searrow & \downarrow \\
\widehat{\mathcal{R}} & \hookrightarrow & \widehat{\Gamma} & \twoheadrightarrow & \widehat{H}
\end{array}
\quad : \quad
\begin{array}{c}
\text{[同種の線は} \\ \text{同じ完全系列} \\ \text{に対応する]}
\end{array}
$$

（およびその「立体化拡張」）として，以下のように了解できる。

（ただし，$\mathcal{O}_d, \mathcal{O}_\rho = \mathcal{O}_d^H$ は Cuntz 環と呼ばれる線型空間の基底のなす直交性と完全性の関係から生成された代数。）

7 対称性の破れとしての時空創発

対称性の破れの可換図式
$$
\begin{array}{ccc}
{}^{\widehat{H\backslash G}}\swarrow & \mathcal{X}^H = \widetilde{\mathcal{X}}^G & \searrow^{\hat{H}} \\
\widetilde{\mathcal{X}}^H & \downarrow & \mathcal{X} \\
{}_{\hat{H}}\downarrow\ \searrow & \widetilde{\mathcal{X}} & {}^{\widehat{H\backslash G}}\swarrow\downarrow \\
\downarrow\ \swarrow & \downarrow & \searrow\downarrow \\
\widehat{H\backslash G} & \downarrow & \hat{H} \\
\searrow & \hat{G} & \nearrow
\end{array}
$$
の

上半分
$$
\begin{array}{ccccc}
 & {}^{\widehat{H\backslash G}}\swarrow & \mathcal{X}^H = \widetilde{\mathcal{X}}^G & \searrow^{\hat{H}} & \\
\widetilde{\mathcal{X}}^H & & \Downarrow G & & \mathcal{X} \\
 & {}_{\hat{H}}\searrow & \widetilde{\mathcal{X}} & \swarrow_{\widehat{H\backslash G}} &
\end{array}
$$
は，Doplicher, Roberts の破れのない内部対称性再構成で Galois 拡大 $\mathcal{X}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{R}) \underset{\mathcal{O}_\rho}{\otimes} \mathcal{O}_d$ を特徴づける
$$
\begin{array}{ccccc}
 & {}_{\mathcal{R}}\swarrow & \mathcal{O}_\rho = \mathcal{O}_d^H & \searrow_H & \\
\mathcal{A}(\mathcal{R}) & & \Downarrow & & \mathcal{O}_d \\
 & \searrow\searrow & \mathcal{X}(\mathcal{R}) & \swarrow_{\mathcal{R}} &
\end{array}
$$
とそっくり同じ構造！元々の DHR-DR セクター理論は**破れのない内部対称性に *focus*** し,「対称性の破れ」を論ずる余地はなかったが，添加代数を用いた我々の視点で後者を見直せば，実はここには**破れが介在し**，それによって**時空自由度の対称空間 $\mathcal{R}$ が凝縮・創発している**，ということが読み取れる！

7.1 破れに伴う創発と局所ゲージ不変性

対称性の破れに関わる可換図式は**平面的構造**を通じて導入されたので，上の３段階の破れのパターンを統合して Galois 拡大環を扱う には，全体を**立体化**し六面体の各面で $(H, G), (G, \Gamma), (H, \Gamma)$ 等々の相互関係を記述する必要がある：

物性研究・電子版 Vol. 6, No. 4, 064221 (2017年11月号)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & \tilde{\tilde{\mathcal{X}}}^{G} = \tilde{\mathcal{X}}^{H} & \overset{\widehat{\mathcal{R}}=\widehat{G\backslash\Gamma}}{\hookleftarrow} & \text{後面} \overset{\widehat{\mathcal{R}}=\widehat{G\backslash\Gamma}}{\hookleftarrow} & \tilde{\mathcal{X}}^{G} = \mathcal{X}^{H} \\
 & \widehat{H\backslash G} \swarrow & \hat{H} \downarrow & \text{天井面} & \widehat{H\backslash G} \swarrow & \downarrow \hat{H} \\
\tilde{\tilde{\mathcal{X}}}^{H} & \overset{\widehat{\mathcal{R}}=\widehat{G\backslash\Gamma}}{\hookleftarrow} & \leftarrow\downarrow\leftarrow & \tilde{\mathcal{X}}^{H} & \text{右側面} & \downarrow \hat{H} \\
\hat{H} \downarrow & \text{左側面} & \tilde{\tilde{\mathcal{X}}}^{G} \rtimes \hat{H} & \leftarrow\downarrow\leftarrow & \underset{\widehat{\mathcal{R}}=\widehat{G\backslash\Gamma}}{\hookleftarrow} & \mathcal{X} \\
\hat{H} \downarrow & \widehat{H\backslash G} \swarrow & \text{底面} & \downarrow \hat{H} & \swarrow_{\widehat{H\backslash G}} & \\
\tilde{\tilde{\tilde{\mathcal{X}}}} & \underset{\widehat{\mathcal{R}}=\widehat{G\backslash\Gamma}}{\hookleftarrow} & \text{前面} \underset{\widehat{\mathcal{R}}=\widehat{G\backslash\Gamma}}{\hookleftarrow} & \tilde{\mathcal{X}} & &
\end{array}
$$

$\underset{\rtimes\widehat{\mathcal{R}}=\rtimes\widehat{G\backslash\Gamma}}{\hookleftarrow}$ は代数を時空化＝局所化＝圏論化して量子場を創る時空化函手。

7.2 量子場の圏論的定式化に基づく局所ゲージ化

世間での量子場理論の "標準的" 扱いは,《"Lagrangian" で記述された「作用積分」を想定し，それに「正準量子化」なる形式的操作を施す》，というシナリオに（数学者も含めて）退化してしまっているが，数学的に正当化可能な関係を基に理論を展開する立場に立てば，**これは単なる "フィクション"，"作り話"，"お伽噺"** に過ぎず，作用積分の局所ゲージ不変性から Maxwell 方程式を導き出す「標準的」導出法には意味がない！

　　しかし，**量子場の圏論的定式化**を採用すればこの困難は回避可能であり，得られる理論の対称性は，創発したセクター分類空間の各点毎に勝手な変換を許す，という意味で,「**局所ゲージ不変性**」を実現し（: 対称性の**論理拡大**），分類空間上の並進不変性等の付加的条件の下で,「大域的ゲージ不変性」が帰結する。更に，Einstein の「自由落下系」と「等価原理」を revise して，**時空の物理的創発**も実現可能。

7.3 対称性の Doplicher-Roberts 再構成における Galois 函手

通常「作用積分」に課せられた役割は，理論の持つ対称性の《表現内容》を決めることだが，Doplicher & Roberts (DR) の定式化の場合には，理論が記述する「局所励起モード」としてのセクターを集めた DR 圏 $\mathcal{T}$ に書き込まれた Galois 群に関する圏論的データがその役割を担う。圏 $\mathcal{T}$ の構造は,

Obj($\mathcal{T}$)：DHR 局在性の判定基準 $\pi_0 \circ \rho \restriction_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \cong \pi_0 \restriction_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}$ が定める観測量代数 $\mathcal{A}$ 上の局所内部準同型 $\rho \in End(\mathcal{A})$,

Mor($\mathcal{T}$): $\mathcal{T}$ の対象の対 ρ, σ ごとに，条件 $\rho(A)T = T\sigma(A)$ for $\forall A \in \mathcal{A}$ で定まる intertwiners $T \in \mathcal{T}(\rho \leftarrow \sigma) \subset \mathcal{A}$.

　DR 圏 $\mathcal{T}$ が決まると，各局所内部準同型 $\rho \in End(\mathcal{A})$ に対応して線型空間 V_ρ,

　V_ρ 達を Hilbert 空間（とその間の有界線型写像）のなす圏 $Hilb$ に埋込む再表現函手 $V : \mathcal{T} \hookrightarrow Hilb$ （：***Galois* 函手**と呼ぼう）が定まり,

DR 圏 $\mathcal{T}$ のテンソル積構造を保つ V から V への unitary 自然変換 $u = (u_\rho)_{\rho\in\mathcal{T}}$ の全体：

$$End_\otimes(V) = \{u : V \stackrel{\cdot}{\leftarrow} V; u_\rho^* = u_\rho^{-1}, u_{\rho_1\rho_2} = u_{\rho_1}u_{\rho_2} \text{ for } \forall\rho\forall\rho_1\forall\rho_2 \in T\}$$

として破れのない内部対称性の群 H が定まる：$H = End_\otimes(V)$.

7.4 Galois 函手とその局所ゲージ不変性

函手 V から函手 W への自然変換 $v : W \stackrel{\cdot}{\leftarrow} V$ を定める可換図式: $\begin{array}{ccc} W(\rho) & \stackrel{v_\rho}{\leftarrow} & V(\rho) \\ W(T)\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow V(T) \\ W(\sigma) & \underset{v_\sigma}{\leftarrow} & V(\sigma) \end{array}$,

i.e., $W(T)v_\sigma = v_\rho V(T) \quad (\forall T \in \mathcal{T}(\rho \leftarrow \sigma))$

を参照し，函手 V から函手 $\tau_v(V)$ への自然変換 $\tau_v : \tau_v(V) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} V$ を

$$\tau_v(V)(T) := v_\rho V(T) v_\sigma^{-1} \quad \text{for } T \in \mathcal{T}(\rho \leftarrow \sigma),$$

と定義すれば，τ_v を**局所ゲージ変換の圏論版**と見ることができる。実際，格子ゲージ理論なら gauge link に対する**局所ゲージ変換**にちょうどこれが対応する。

すると, $u \in End_\otimes(V)$ を定義する可換図式 $u_\rho V(T) = V(T)u_\sigma$ は, 自然変換 $u \in H = End_\otimes(V)$ が定める**局所ゲージ変換** τ_u **の下での** ***Galois*** **函手** V **の局所ゲージ不変性**

$$\tau_u(V) = V$$

として再解釈できる。

7.5 局所ゲージ不変性と Maxwell 方程式

局所内部準同型 $\rho \in \mathcal{T} \subset End(\mathcal{A})$ は，元々「局所励起モード」の記述のため Doplicher-Haag-Roberts 理論に導入されたが，時空並進による移送可能性[6]の役割の強調につれていつしか大域的定数項を表わすものと誤解され，実現される対称性も大域的ゲージ構造のみが注目されてきた。更に，Galois 函手 V の局所ゲージ変換

$$\tau_u(V)(T) := u_\rho V(T) u_\sigma^{-1} \quad \text{for } T \in \mathcal{T}(\rho \leftarrow \sigma)$$

における u_ρ と u_σ との左右差は，局所ゲージ構造の関与を示唆する重要な徴候であるにも関わらず，その本質的な意義は（数理物理学者からも数学者からも）永年見過ごされてきた。

しかし，自然変換 $u = (u_\rho)_{\rho\in\mathcal{T}}$ の ρ-依存性は，**定数項の変量化**として論理拡大・強制法の本質的関与を示唆し，**等式**

$$\tau_u(V)(T) = u_\rho V(T) u_\sigma^{-1} = V(T)$$

[6] このため，数学的文脈での “sectors” は $End(A)/Inn(A)$ で定義されてしまった！

こそは**局所ゲージ変換** $u : \mathcal{T} \ni \rho \longmapsto u_\rho \in \mathcal{U}(V_\rho)$ **の下での函手** V **の局所ゲージ不変性**を特徴づける式に他ならない。この解釈は，群に値を取る Čech コホモロジーとして主束を定式化する見方とも整合する。

上の DR 理論の予備的考察で unbroken symmetry の群 H はコンパクト Lie 群で, セクター分類空間 $\hat{H}$ は離散的ゆえ微分演算は（不可能ではないが）少々扱いにくい。

対称性の破れと時空創発を含む文脈で，DR 圏 $\mathcal{T} \subset End(\mathcal{A}) = End(\mathcal{X}^H)$ を用いてセクター分類空間を factor スペクトルとして決めるには，それを拡張された添加代数 (augmented algebra) $\widetilde{\widetilde{\mathcal{X}}} = \mathcal{X}^H \rtimes \widehat{\mathcal{R}}$ の観測可能量代数に付随した局所的内部準同型の圏 $\widetilde{\widetilde{\mathcal{T}}} = End(\widetilde{\widetilde{\mathcal{X}}}^H)$ に置き換える必要がある。ただし，群 Γ は，unbroken symmetry の群 H から破れた内部対称性の群 G を経て２段階の群拡大で得られる破れた外部対称性の群であり，$\Gamma/G = \mathcal{R}$(: 時空) の条件を満たす。

観測可能量の代数として固定部分環 $\widetilde{\widetilde{\mathcal{X}}}^H$ を採る理由は，破れのない対称性の群 H のみが不可視のミクロ領域に留まるから。

このように拡張された DR 圏 $\widetilde{\widetilde{\mathcal{T}}}$ を用いて $\Gamma = End_\otimes(\widetilde{\widetilde{V}} : \widetilde{\widetilde{\mathcal{T}}} \hookrightarrow Hilb)$ として群 Γ を再構成すれば，局所ゲージ不変性と Maxwell 方程式とを結ぶ Noether 第二定理の本質が再現できる。

References

[1] Bratteli, O. and Robinson, D.W., *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* (2nd ed.), Vol.1, Springer-Verlag, 1987.

[2] Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermal situations and physical meanings of classifying categorical adjunctions–, Open Sys. Info. Dyn. **10**, 235-279 (2003); Micro-macro duality in quantum physics, 143-161, Proc. Intern. Conf. “Stochastic Analysis: Classical and Quantum”, World Sci., 2005, arXiv:math-ph/0502038.

[3] Ojima, I., Lévy Process and Innovation Theory in the context of Micro-Macro Duality, 15 December 2006 at The 5th Lévy Seminar in Nagoya, Japan.

[4] Ojima, I. and Okamura, K., Large deviation strategy for inverse problem I & II, Open Sys. Inf. Dyn., **19**, 1250021 & 1250022 (2012)

[5] Ojima, I., Okamura, K. and Saigo, H., Derivation of Born rule from algebraic and statistical axioms. **21**, 1450005-1450018 (2014).

[6] Ojima, I., Temperature as order parameter of broken scale invariance, Publ. RIMS (Kyoto Univ.) **40**, 731-756 (2004) (math-ph0311025).

[7] Ojima, I., Lorentz invariance vs. temperature in QFT, Lett. Math. Phys. **11**, 73-80 (1986).

[8] Ojima, I., Space(-Time) Emergence as Symmetry Breaking Effect, Quantum Bio-Informatics IV, 279 - 289 (2011). (arXiv:math-ph/1102.0838 (2011)); Micro-Macro Duality and Space-Time Emergence, Proc. Intern. Conf. “Advances in Quantum Theory”, 197 – 206 (2011); New interpretation of equivalence principle in General Relativity from the viewpoint of Micro-Macro duality (arXiv:gen-ph/1112.5525), Foundations of Probability and Physics 6, Sweden, 2011.6 (invited talk).

[9] Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, 143-161, Proc. Intern. Conf. “Stochastic Analysis: Classical and Quantum –Perspectives of White Noise Theory” ed. by T. Hida, World Scientific (2005), arXiv:math-ph/0502038.

[10] Haag, R., On quantum field theories, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd., **29**, no.12, 1-37 (1955); *Local Quantum Physics–Fields, Particles, Algebras*, Springer-Verlag (1992).

[11] Wightman, A.S., Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, Phys. Rev. **101**, 860-866 (1956); Streater, R.F. & Wightman, A.S., *PCT, Spin and Statistics and All That*, Benjamin (1964).

[12] Ojima, I., Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and its Extension to Finite Temperature, pp.161-165 *in* Lecture Notes in Physics, No.176, *Gauge Theory and Gravitation* (Proceedings, Nara, Japan 1982), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[13] Buchholz, D. and Ojima, I., Spontaneous collapse of supersymmetry, Nucl. Phys. **B498**, Nos.1,2, 228-242 (1997).

[14] Matsubara, T., Prog. Thcor. Phys. **14**, 351 (1955); Takahashi, Y. and Umezawa, H., Thermo field dynamics, Collect. Phenom. **2**, 55-80 (1975).

[15] 小嶋泉：量子場とミクロ・マクロ双対性 (丸善出版, 2013).

[16] 小嶋泉・岡村和弥：無限量子系の物理と数理 (サイエンス社 SGC98, 2013).

[17] Buchholz, D., Ojima, I. and Roos, H., Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory, Ann. Phys. (N.Y.) **297**, 219 - 242 (2002).

[18] Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J. E., Fields, observables and gauge transformations I & II, Comm. Math. Phys. **13**, 1-23 (1969); **15,** 173-200 (1969); Local observables and particle statistics, I & II, **23**, 199-230 (1971) & **35**, 49-85 (1974).

[19] Doplicher, S. and Roberts, J.E., Endomorphism of C*-algebras, cross products and duality for compact groups, Ann. Math. **130**, 75-119 (1989); A new duality theory for compact groups, Inventiones Math. **98**, 157-218 (1989); Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Comm. Math. Phys. **131**, 51-107 (1990).

[20] Ojima, I., Dynamical relativity in family of dynamics, 数理解析研究所講究録 **1921**, 73-83 (2014).

[21] Ojima, I., Local gauge invariance and Maxwell equation in categorical QFT, 数理解析研究所講究録 **1961**, 81-92 (2015); Algebraic QFT and local gauge invariance, 数理解析研究所講究録 **2010**, 78-88 (2016).

[22] Haag, R., Hugenholtz, N.M. & Winnink, M., On the equilibrium states in quantum statistical mechanics, Comm. Math. Phys. **5**, 215-236 (1967).

[23] Kubo, R., J. Phys. Soc. Japan **12**, 570-586 (1957); Martin, P.C. & Schwinger, J., Theory of many particle systems I, Phys. Rev. **115**, 1342-1373 (1959).

[24] Bratteli, O. & Robinson, D.W., *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vols.1 & 2, Springer-Verlag (1979, 1981).

[25] 梅垣壽春・大矢雅則・日合文雄,『作用素代数入門』, 共立出版 (1985).

[26] Kugo. T. and Ojima, I., *Local Covariant Operator Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem,* Suppl. Prog. Theor. Phys. No. 66 (1979); Nakanishi, N. and Ojima, I., *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, World Scientific Lecture Notes in Physics Vol.27, World Scientific Publishing Company, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong (1990).

[27] Milnor, J., *Morse theory*, Princeton Univ. Press (1963), 邦訳は志賀浩二訳　モース理論, 吉岡書店 (1968); 横田一郎, 多様体とモース理論, 現代数学社 (1991); 服部晶夫, いろいろな幾何 II, 岩波講座「応用数学」, 岩波書店 (1993); 松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波講座「現代数学の基礎」の単行本化, 岩波書店 (2005).