代数曲面のヒルベルトスキームの退化

永井　保成

射影（あるいは準射影）代数曲面 S に対して，その上の n 点のヒルベルトスキーム

$$\mathrm{Hilb}^n(S) = \{Z \subset S \mid Z \text{ は閉部分スキーム}, \dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_S/\mathscr{I}_Z) = n\}$$

は滑らかな $2n$ 次元非特異射影（あるいは準射影）代数多様体になる (Fogarty [Fog68])．また，S の標準因子が自明であれば，$\mathrm{Hilb}^n(S)$ は代数的シンプレクティック構造を持つ (Beauville [Bea83])．曲面 S の上の n 点のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^n(S)$ は高次元の代数多様体を構成する面白い方法として，代数幾何学やその隣接分野で盛んに研究されてきた．

準射影代数多様体に対してそのヒルベルトスキームを取る操作は，代数多様体の平坦族に対して良く振る舞う．従って，代数曲面の平坦族 $S \to B$ に対してその上の相対的な n 点のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^n(S/B)$ を考えることは自然である．もし，族 $S \to B$ が滑らかであれば，$\mathrm{Hilb}^n(S/B) \to B$ も滑らかであり $b \in B$ におけるファイバーは元の族のファイバー S_b のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^n(S_b)$ と同型である．代数曲面 S のモジュライとそのヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^n(S)$ のモジュライを関連付けて考える観点からすれば，対応 $S \mapsto \mathrm{Hilb}^n(S)$ の無限遠（境界）での挙動に自然と注意が集まる．すなわち，$S \to B$ が決められた点 $0 \in B$ で退化する曲面の平坦族である場合の，$\mathrm{Hilb}^n(S/B)$ の点 $0 \in B$ の近くでの挙動に注目することは極めて自然である．特に，このようにして得られるヒルベルトスキームの退化がどのようなものであるかというのが特に筆者の興味の向かうところである．

もちろん（準）射影代数多様体の退化のモデルはいくらでも取り替え可能であり，底空間 B の有限分岐被覆への持ち上げと双有理改変を許せば，半安定還元定理によっていつでも半安定な退化を得ることができる．しかし，そのようにして得られる退化族はコホモロジー論的にある種の便利さを持つ一方で，コホモロジー的情報と，より詳しい幾何学的情報とのリンクを曖昧にする．代数多様体の退化の境界挙動を退化ファイバーの様子から引き出そうとする時は，退化族が相対的に極小であると極めて都合が良いことは，小平の楕円曲面の理論や K3 曲面の退化の理論（Kulikov モデルと Freidman によるその周期写像への応用）などから簡単に類推されるところである．このような背景から，曲面の半安定退化から得られるヒルベルトスキームの退化族のモデルで，半安定あるいはそれに非常に近く，また，極小でもあるようなモデルの具体的構成について論じたい．

読者は，ここで論じようとしている問題にはほとんどトリビアルな解があると考えるかもしれない．すなわち，曲面の半安定退化 $S \to B$ に対して，単に相対的なヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^n(S/B) \to B$ を取ればこれがすでに「十分良いモデル」になっているのでは

ないか，と．しかし，ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^n(S/B)$ を直接調べることには困難がある．$S \to B$ が曲面の半安定退化であるとき，特に，S は非特異な 3 次元の代数多様体であり，$\mathrm{Hilb}^n(S/B)$ は自然に $\mathrm{Hilb}^n(S)$ の閉部分スキームになる．しかし，次元が 3 以上の滑らかな代数多様体 M に対して，n が小さい時を除いて，$\mathrm{Hilb}^n(M)$ は相異なる n 点のなす部分スキームへの変形を持たないような部分スキームに対応する「エキゾチックな」既約成分を持つ (Iarrobino [Iar72] など)．ここに及んで，冒頭で述べた Fogarty の論文で用いられたようなイデアル論，可換環論的なアプローチを取れば，非常に精緻で複雑な議論を要求され，非常な困難をきたすであろう．

このような煩雑を避けるために，我々は異なるアプローチを模索せねばならない．執筆時点では，このようなアプローチとして 2 つの異なる方法が知られている．ひとつは，Gulbrandsen-Halle-Hulek [GHH16] による GIT 商を用いた方法，もう一つは筆者自身 [Nag16] による，トーリック幾何を用いて相対対称積の極小 $\mathbb{Q}$-分解端末化を明示的に構成する方法である．本稿ではまずそれぞれの方法について局所的記述の観点から簡単に説明した後に，これら 2 つの方法がそれぞれ与える退化を比較する．

以下常に $S = \mathbb{C}^3$, $B = \mathbb{C}$ とし，それらの座標をそれぞれ (x_1, x_2, x_3), t として射

$$\pi : S \to B$$

を $t = \pi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$ で定義する．これは，曲面の半安定退化で特異ファイバーが 3 重点を持たない場合の局所的な記述である．実は以下述べる Gulbrandsen-Halle-Hulek による方法も，著者自身によるアプローチも，曲面の退化が 3 重点を持つ場合には大きな困難に直面するため，本稿では専ら 3 重点を持たない退化を考えることとする．

1　Expanded Degeneration と Gulbrandsen-Halle-Hulek 退化

Gulbrandsen-Halle-Hulek による退化の構成は，基本的にはヒルベルトスキームを用いるものであるが，族 $S \to B$ そのものの相対的ヒルベルトスキームを考えるのではなく，これを expanded degeneration に置き換えた上でヒルベルトスキームを取るのである．このアイデアは Li [Li01] に遡る．

まず，$C[n] = \mathbb{C}^{n+1}$ として，$S_{C[n]}$ を射

$$C[n] \to B; \quad (t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \mapsto t_1 t_2 \ldots t_{n+1}$$

による $S \to B$ の底変換 $S_{C[n]} = S \times_B C[n]$ とする．$S_{C[n]}$ はアフィン空間 $\mathbb{C}^{n+4}$ の中で，座標 $(x_1, x_2, x_3, t_1, \ldots, t_{n+1})$ に関して

$$x_1 x_2 - t_1 t_2 \ldots t_{n+1} = 0$$

で定義される超曲面である．この超曲面の中でイデアル (x_1, t_1) が定義する線型部分空間は $S_{C[n]}$ のカルティエでない因子になる．そこで，このイデアルによるブローアップを取

ろう．狭義変換は 2 つのチャートからなる．方程式 $x_2 - \dfrac{t_1}{x_1} t_2 \dots t_{n+1}$ は特異点を持たず，もう一方のチャートの方程式は

$$\frac{x_1}{t_1} x_2 - t_2 \dots t_{n+1} = 0$$

であり，$S_{C[n]}$ の方程式と同じ形をしている．そこで，$S_{C[n]}$ 上のイデアル (x_1, t_2) で定まる部分多様体の狭義変換 $\dfrac{x_1}{t_1} = t_2 = 0$ でのブローアップを取る，ということを次々に繰り返していくと，n 回のブローアップの末，非特異なモデル $S[n]$ を得る

$$\begin{tikzcd} S[n] \arrow[r] \arrow[drr] & \cdots \arrow[r] & S_{C[n]} = S \times_B C[n] \arrow[d] \\ & & C[n] \end{tikzcd} .$$

このようにして得られた $S[n] \to C[n]$ を $S \to B$ から定る expanded degeneration と呼ぼう[*1]．

ここで，トーラス

$$G[n] = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \lambda_1 \dots \lambda_{n+1} = 1\} \cong (\mathbb{C}^*)^n$$

は自然に $C[n]$ に作用する．S には自明に作用させることで，この作用は $S_{C[n]}$ への作用に持ち上がる．上で考えたブローアップの中心 $\left(\dfrac{x_1}{t_1 \dots t_{i-1}}, t_i\right)$ はどれも $G[n]$ の作用で不変であるため，$S[n] \to S_{C[n]}$，従って，$S[n] \to C[n]$ は $G[n]$-同変である．

Gulbrandsen-Halle-Hulek の構成の基本的なアイデアは以下の通りである．すなわち，$S \to B$ の代わりに expanded degeneration $S[n] \to C[n]$ の相対的ヒルベルトスキーム

$$\mathrm{Hilb}^n(S[n]/C[n]) \to C[n]$$

を考える．ヒルベルトスキームの普遍性により，この射もまた $G[n]$-同変であるので，$G[n]$ による商

$$\mathrm{Hilb}^n(S[n]/C[n])/G[n] \to C[n]/G[n] \tag{*}$$

をとるのである．$G[n]$ は $C[n]$ の座標超平面の補集合 $C[n]^\circ = (t_1 \dots t_{n+1} \neq 0)$ には自由に作用し，$B^\circ = B \backslash \{0\} \cong C[n]^\circ / G[n]$ であるので，この商は B° 上に制限すれば $\mathrm{Hilb}^n(S/B) \to B$ と一致している．すなわち，(*) の一般ファイバーは元の族 $S \to B$ の一般ファイバーのヒルベルトスキームに一致している．アフィン商 $C[n]/\!/G[n]$ が B と同型になることは初等

[*1] x_1 の代わりに x_2 をとることで，同型な，しかし，$C[n]$ 上は同型でない別のモデル（フロップ）が得られる．曲面族 $S \to B$ が射影的な場合，既約成分の組み合わせによって注意深くブローアップの中心を選ばないと，$S[n]$ は $C[n]$ 上射影的ではなくなってしまう．詳しくは [GHH16] を参照されたい．

的である．問題は，トーラス $G[n]$ の $\mathrm{Hilb}^n(S[n]/C[n])$ への作用を，ブローアップの列からくる自然な偏極

$$S[n] \hookrightarrow S_{C[n]} \times (\mathbb{P}^1)^n \hookrightarrow S_{C[n]} \times \mathbb{P}^{2^n-1}$$

に関する適切な線形化（以下 GHH 線形化と呼ぶ) を取って，安定性を解析し GIT 商として

$$I^n_{S/B} = \mathrm{Hilb}^n(S[n]/C[n])^{ss}//G[n] \to B$$

なる射影的な族を構成することであり，Gulbrandsen らの仕事の中心部分はこの安定性の解析にある．彼らは，この作用に関する安定性の数値的判定法を証明している ([GHH16], Theorem 2.9)．詳細は技術的であるので論文を参照されたいが，特に，$\mathrm{Hilb}^n(S[n]/C[n])$ への $G[n]$ の作用の GHH 線形化に関する半安定点は自動的に安定点であることがわかり，商 $\mathrm{Hilb}^n(S[n]/C[n])//G[n]$ は幾何学的商であり，有限可換群による商特異点のみを持つことが示されることだけ述べておこう．

2　トーリック幾何による相対対称積の極小 $\mathbb{Q}$-分解端末化

一方．曲面の半安定退化族 $S \to B$ のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^n(S/B)$ を研究する困難が，エキゾチックな既約成分が存在している状況でいかにして主な既約成分を切り出すか，という問題に集約されているとすれば，代わりに相対的対称積 $\mathrm{Sym}^n(S/B)$ を考えるのもまた自然なアプローチのひとつといえるだろう．なぜなら，滑らかなファイバー S_b に対しては Hilbert-Chow 射

$$\mathrm{Hilb}^n(S_b) \to \mathrm{Sym}^n(S_b)$$

はクレパントな双有理射になっているからである．この Hilbert-Chow 射を $\mathrm{Sym}^n(S/B)$ 全体に拡張して，極小な部分特異点解消をとることでヒルベルトスキームの良い退化族を得ようというのである．以下その概略を述べる．詳細は論文 [Nag16] を参照されたい．

アフィン空間 $S = \mathbb{C}^3$ の B 上の n 個のファイバー積

$$(S/B)^n = \underbrace{S \times_B S \times_B \cdots \times_B S}_{n\text{ 個}}$$

は $(z_{11}, z_{12}, z_{13}; \ldots; z_{n1}, z_{n2}, z_{n3})$ を座標にする $\mathbb{C}^{3n}$ の中で，方程式

$$z_{11}z_{12} = z_{21}z_{22} = \cdots = z_{n1}z_{n2}$$

で定義されるアフィン代数多様体であり，構造射 $(S/B)^n \to B = \mathbb{C}$ はこの式の値を与える関数によって定まる射である．対称群 $\mathfrak{S}_n$ がブロック (z_{i1}, z_{i2}, z_{i3}) の i の置換で作用し，族 $S \to B$ の相対的対称積は，この作用に関する商

$$\mathrm{Sym}^n(S/B) = (S/B)^n \,/\, \mathfrak{S}_n$$

として得られる．対称積 $\mathrm{Sym}^n(S/B)$ は定義からして既約な代数多様体であり，ヒルベルトスキームのように余分な既約成分を持ち得ないことに注意しよう．$\mathrm{Sym}^n(S/B)$ の双有理改変を構成するには，$(S/B)^n$ の $\mathfrak{S}_n$-同変な双有理改変を考えればよい．一方，その定義方程式からわかるように，$(S/B)^n$ はアフィントーリック多様体であるから，トーリック幾何を用いて都合の良いブローアップが構成できないかと考えるのは自然である．実際，次の命題を証明することができる．

命題 1 ([Nag16], Proposition 2.1 & 2.5)**.** A_{n-1}-型のルート系のウエイト格子上の Coxeter 複体（Weyl chamber が作る fan）から定まる射影的トーリック多様体を $X(A_{n-1})$ とし，D_{pos}（あるいは D_{neg}）を正（あるいは負）のウエイトベクトルに対応するトーラス不変な素因子すべての和とする．このとき，$\mathfrak{S}_n$-同変な小さい（すなわち，例外集合の余次元が 2 以上の）射影的双有理トーリック射

$$\tilde{Z}^{(n)} = (\mathscr{O}_{X(A_{n-1})}(D_{pos}) \oplus \mathscr{O}_{X(A_{n-1})}(D_{neg})) \times \mathbb{C}^n \to (S/B)^n$$

が存在する．

ここで現れた $X(A_{n-1})$ は射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ の標準的クレモナ変換

$$\mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \ ; \quad [\xi_1 : \cdots : \xi_n] \mapsto \left[\frac{1}{\xi_1} : \cdots : \frac{1}{\xi_n}\right]$$

の不確定点除去として古典的に現れる多様体であり, そのコホモロジーの $\mathfrak{S}_n$-表現としての構造はよく調べられている（Procesi, Dolgachev-Lunts, Stembridge [Pro90, DL94, Ste94]）.

この命題で得られた射影双有理射の $\mathfrak{S}_n$ による商を取ることで，対称積の部分特異点解消

$$Z^{(n)} = \tilde{Z}^{(n)}/\mathfrak{S}_n \to \mathrm{Sym}^n(S/B)$$

が得られる．$\tilde{Z}^{(n)}$ への $\mathfrak{S}_n$ の作用はトーリック座標を用いて具体的に計算できるが，それによって，$Z^{(n)}$ は Gorenstein 商特異点のみをもつことがわかる（*op. cit.*, Theorem2.10. なお，$n \geqslant 3$ に対しては $Z^{(n)}$ はトーリック多様体にはならない）．余談ではあるが，更に，このモデルの上で，上述の Procesi, Dolgachev-Lunts, Stembridge の結果を援用することによって，$\mathrm{Sym}^n(S/B)$ の弦理論的 E-多項式を計算できる（*op. cit.*，Theorem 3.14）．

誘導される B 上の族 $Z^{(n)} \to B$ の一般の点 $b \in B$ 上のファイバーは $\mathrm{Sym}^n(S_b)$ であるから，ヒルベルトスキームの退化を得るためには更に双有理改変を行わなければならないが，以下の定理が証明できる．

定理 2 (*op. cit.*, Theorem 4.1)**.** 次の条件を満たす，射影的双有理射

$$\nu : Y^{(n)} \to Z^{(n)}$$

が存在する:

(i) $Y^{(n)}$ は Gorenstein 端末的商特異点のみをもつ．
(ii) ν はクレパントであり因子的（例外集合が純余次元 1）．
(iii) $Y^{(n)} \to B$ の原点でのファイバー $Y_0^{(n)}$ は V-単純正規交差因子（すなわち，古典位相に関して局所的に有限群の作用で不変な単純正規交差因子の商になっている）．

特に，$Y^{(n)}$ は $\mathrm{Sym}^n(S/B)$ の $\mathbb{Q}$-分解的端末的な極小モデルである．

定理の証明の鍵になるのは，$\tilde{Z}^{(n)}$ の各点の安定化部分群の分析である．後の説明のため，その概略を簡単に記す．点 $\tilde{q} \in Z^{(n)}$ の安定化部分群 $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q}) \subset \mathfrak{S}_n$ の元であって，接空間 $T_{\tilde{q}}\tilde{Z}^{(n)}$ への作用の固有多項式が $V_{\mathrm{perm}} \oplus V_{\mathrm{perm}} \oplus \mathbb{C}$ への $\mathfrak{S}_n$ の作用の固有多項式と一致するもの全体を $\mathrm{Stab}^0_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q})$ とする．ただし，ここで $V_{\mathrm{perm}} = \mathbb{C}^n$ は $\mathfrak{S}_n$ が基底の置換で作用する置換表現，$\mathbb{C}$ は自明な 1 次元表現である．簡単な考察により $\mathrm{Stab}^0_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q})$ は $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q})$ の正規部分群であり，$\mathfrak{S}_n$ のヤング部分群になることがわかる．そこで，$G(\tilde{q}) = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q})/\,\mathrm{Stab}^0_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q})$ とおこう．$U_{\tilde{q}} \subset \tilde{Z}^{(n)}$ を点 $\tilde{q}$ の $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q})$-不変な開近傍とすると $U_{\tilde{q}}/\,\mathrm{Stab}^0_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q})$ は $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2) \times \mathbb{C}$ の開集合と同型になる．そこへの Hilbert-Chow 射の制限によって

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \times \mathbb{C}^1 & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2) \times \mathbb{C}^1 \\ \cup & & \cup \\ V_{\tilde{q}} & \longrightarrow & U_{\tilde{q}}/\,\mathrm{Stab}^0_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q}) \end{array}$$

が得られる．ヒルベルトスキームの普遍性により，これは $G(\tilde{q})$-同変であり，$G(\tilde{q})$ による商をとって

$$\nu : V_{\tilde{q}}/G(\tilde{q}) \longrightarrow U_{\tilde{q}}/\,\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q}) \qquad (**)$$

を得る．Hilbert-Chow 射はクレパントであり，$U_{\tilde{q}}/\,\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q}) \subset Z^{(n)}$ は標準特異点のみを持つことから，この ν もクレパントな因子的双有理収縮である．このようにして作った ν は $Z^{(n)} \to B$ の一般ファイバー $\mathrm{Sym}^n(S_b)$ 上での Hilbert-Chow 射を拡張するので定理の $\nu : Y^{(n)} \to Z^{(n)}$ が得られる．

3 GHH 退化と Hilbert-Chow 射

このようにして別々の方法でヒルベルトスキームの具体的な退化族が構成されると，自然とこれらを比較する問題を考えることになる．Gulbrandsen-Halle-Hulek の退化と，前節で述べた明示的方法ではその構成に対するアイデアは根本的に異なっている．しかし，それぞれの議論の詳細を見ると，類似点があることに気づく．特にここで考えている局所的な状況では，expanded degeneration の構成は完全にトーリック幾何学によって記述される．このことから，これら 2 つの退化を比較する鍵は，expanded degeneration $S[n] \to C[n]$ に対してその対称積 $\mathrm{Sym}^n(S[n]/C[n])$ を §2 と同様の方法で記述して $\mathrm{Sym}^n(S/B)$ やその極小モデル $Y^{(n)}$ と引き比べることにありそうだと推測される．

Gulbrandsen-Halle-Hulek の退化は expanded degeneration $S[n] \to C[n]$ の上のヒルベルトスキームの GIT 商 $I^n_{S/B} = \mathrm{Hilb}^n(S[n]/C[n])^{ss}/\!/G[n]$ で得られているが，トーラス $G[n]$ のヒルベルトスキームへの作用は expanded degeneration への作用から惹き起こされたものなので，Hilbert-Chow 射

$$\mathrm{Hilb}^n(S[n]/C[n]) \to \mathrm{Sym}^n(S[n]/C[n])$$

は $G[n]$-同変であり，GIT 商の間の射

$$\psi : I^n_{S/B} = \mathrm{Hilb}^n(S[n]/C[n])^{ss}/\!/G[n] \to \mathrm{Sym}^n(S[n]/C[n])^{ss}/\!/G[n]$$

を惹き起こす．これを GHH 退化 $I^n_{S/B}$ に対する Hilbert-Chow 射と呼ぶことにしよう．論文 [Nag17] では以下の定理を示した (Theorem 3.3.1 および Theorem 4.3.1).

定理 3. (i) GIT 商 $\mathrm{Sym}^n(S[n]/C[n])^{ss}/\!/G[n]$ は $Z^{(n)}$ と同型である.
(ii) GHH 退化 $I^n_{S/B}$ に対する Hilbert-Chow 射 ψ は定理 2 の $\nu : Y^{(n)} \to Z^{(n)}$ と一致する.

この定理から直ちに，Gulbrandsen-Halle-Hulek の退化が V-単純正規交差退化であり相対的極小モデルであることが系として従う（この結論に関しては，著者たちはよく知っているものと思われるが，論文 [GHH16] にその詳細は述べられていない）.

以下この定理の証明の概略を述べる．積 $W[n] := (S[n]/C[n])^n$ への $\mathfrak{S}_n$ の作用とトーラス $G[n]$ の作用は可換であるから，定理の (i) を示すには，$\mathfrak{S}_n$-同変な同型

$$W[n]^{ss}/\!/G[n] \cong \tilde{Z}^{(n)} \tag{***}$$

があることを示せば良い．$W[n]$ は準射影的なトーリック多様体であり，格子上の（非有界な）多面体によって記述される．左辺の GIT 商は $W[n]$ のトーラスの部分トーラス $G[n]$ による商であることから，$W[n]$ に対応する多面体の線形切断で得られる多面体を用いて記述されるトーリック多様体であることがわかる（射影的トーリック多様体の場合は [KSZ91] で証明されており，そのちょっとした一般化である，[Nag17], Proposition 1.3.1）．このことにより，GHH 線形化の下で (i) は完全に格子上の多面体の具体的な計算に帰着され初等的な議論により証明される.

(ii) の証明で鍵となるのは，$I^n_{S/B}$ と $Y^{(n)}$ がそれぞれ持つ自然な orbifold 構造である．$I^n_{S/B}$ はそもそも，商スタック $[\mathrm{Hilb}^n(S[n]/C[n])^{ss} \,/\, G[n]]$ の粗モジュライ空間であるから，自然な orbifold 構造を持っている．また $Y^{(n)}$ は，原点を除いた滑らかな族 $S^\circ \to B^\circ = B\backslash\{0\}$ の相対ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^n(S^\circ/B^\circ)$ に (**) の $V_{\tilde{q}}/G(\tilde{q})$ を Hilbert-Chow 射に沿って貼り合わせて得られる代数多様体であったので，自然な orbifold 構造を持っている．実際にはこれら 2 つの orbifold が同型であることを示すことになる．最終的には $W[n]$ の任意の点まわりで (***) の同型を与える étale slice をトーリック座標を用いて具体的に構成

し，群 $\mathfrak{S}_n \times G[n]$ の $W[n]$ への作用に関する安定化部分群と，$\mathfrak{S}_n$ の $\tilde{Z}^{(n)}$ への作用に関する安定化部分群を比較して，

(i) $\tilde{\gamma} \in W[n]$ が $\tilde{q} \in \tilde{Z}^{(n)}$ の上にある点の時，$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{\gamma}) = \mathrm{Stab}^0_{\mathfrak{S}_n}(\tilde{q})$

(ii) $\tilde{\gamma}$ の $\mathrm{Sym}^n(S[n]/C[n])$ における像を γ とする時，$\mathrm{Stab}_{G[n]}(\gamma) = G(\tilde{q})$

の 2 つを証明する議論に帰着されるが，筆者の感覚ではこの部分が最も厄介である．詳しい議論について興味を持たれた読者にあっては論文 [Nag17] を参照していただければ幸いである．

参考文献

[Bea83] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 755–782 (1984) (French).

[DL94] I. Dolgachev and V. Lunts, *A character formula for the representation of a Weyl group in the cohomology of the associated toric variety*, J. Algebra **168** (1994), no. 3, 741–772, DOI 10.1006/jabr.1994.1251.

[Fog68] J. Fogarty, *Algebraic families on an algebraic surface*, Amer. J. Math **90** (1968), 511–521.

[GHH16] M. G. Gulbrandsen, L. H. Halle, and K. Hulek, *A GIT construction of degenerations of Hilbert schemes of points*, preprint arXiv:1604.00215 (2016).

[Iar72] A. Iarrobino, *Reducibility of the families of* 0*-dimensional schemes on a variety*, Invent. Math. **15** (1972), 72–77.

[KSZ91] M. M. Kapranov, B. Sturmfels, and A. V. Zelevinsky, *Quotients of toric varieties*, Math. Ann. **290** (1991), no. 4, 643–655, DOI 10.1007/BF01459264.

[Li01] J. Li, *Stable morphisms to singular schemes and relative stable morphisms*, J. Differential Geom. **57** (2001), no. 3, 509–578.

[Nag08] Y. Nagai, *On monodromies of a degeneration of irreducible symplectic Kähler manifolds*, Math. Z. **258** (2008), no. 2, 407–426, DOI 10.1007/s00209-007-0179-3.

[Nag16] Y. Nagai, *Symmetric products of a semistable degeneration of surfaces*, preprint arXiv:1609.02306, to appear in Math. Z. (2016).

[Nag17] ———, *Gulbrandsen-Halle-Hulek degeneration and Hilbert-Chow morphism*, preprint arXiv:1709.01240 (2017).

[Pro90] C. Procesi, *The toric variety associated to Weyl chambers*, Mots, Lang. Raison. Calc., Hermès, Paris, 1990, pp. 153–161.

[Ste94] J. R. Stembridge, *Some permutation representations of Weyl groups associated with the cohomology of toric varieties*, Adv. Math. **106** (1994), no. 2, 244–301, DOI 10.1006/aima.1994.1058.

早稲田大学理工学術院　`nagai.y@waseda.jp`