

## 歪み解析と変形解析の数理：4. 双曲幾何学と Rf/φ 歪み解析

Lecture note on the theories of strain and deformation analyses: 4. Hyperbolic geometry and Rf/φ strain analysis

山路 敦\*

Atsushi Yamaji\*

2016年2月3日受付.

2016年9月13日受理.

\* 京都大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻  
Division of Earth and Planetary Sciences,  
Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

Corresponding author: A. Yamaji,  
yamaji@kueps.kyoto-u.ac.jp

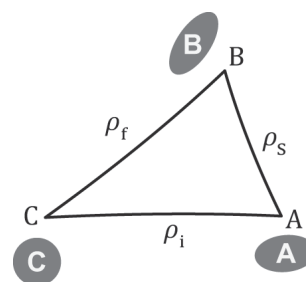


Fig. 1. The correspondence between a hyperbolic triangle and the parameters of a unit circle and two ellipses. 単位円と2つの楕円が双曲三角形とどう対応するかを説明するための図.

### 1. はじめに

変形・歪み解析を理論的に考えようとするとき、意外なことに、双曲幾何学という非ユークリッド幾何学が、すぐれて見通しのよい枠組みを与えてくれる。今回から双曲幾何学を基盤として、歪み解析・変形解析・運動論的渦度解析を論ずる。今回は Rf/φ 歪み解析(例えば、狩野・村田, 1998)を双曲幾何学により再定式化し、どのように誤差が評価できるか論ずる。

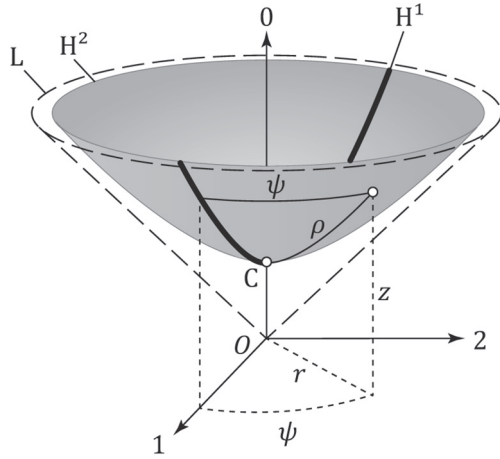
球面は非ユークリッド空間であるが、実空間に埋め込むことができる、すなわち実空間の中に存在する図形である。しかし、球面を展開してゆがみなく平面に埋め込むことはできない。双曲幾何学が成立する二次元の世界を双曲平面(hyperbolic plane)とよぶが、それは実空間には埋め込むことができない非ユークリッド空間である。さて、どんな地図投影法にも投影にともなうゆがみがある。つまり、球面をユークリッド空間にゆがみなしに投影することはできない。それでも、航路を図示するなど、平面の地図は有用である。ここでは地図投影にともなう形や面積の変化を「ゆがみ」と書いて、歪み解析があつかう物理現象としての歪みと区別する。

双曲幾何学が扱う空間をユークリッド空間にうまく射影すると、ゆがみは不可避であるものの、ユークリッド空間内の幾何学として考えを進めることができ便利である。双曲平面をユークリッド空間に射影する方法には複数あるが(中岡, 1993; Reynolds, 1993), 今回はそのうちの双曲面モデルを使って歪み解析を定式化し、歪みの誤差論までを議論する。種々の投影法は、次の回に説明する。今回は首尾一貫、変形にともなう面積変化を無視し、面積がπの単位円と楕円を扱う。

### 2. 双曲幾何学の双曲面モデル

最初に曲率について補足しておきたい。曲線上のある点におけるその曲線の曲率は、その点で曲線に接する円の半径の逆数である(例えば、戸田, 1989)。今回は、ドーナツの表面を例として、曲面の曲率は曲面に沿った方向ごとに異なっていて、最大値(最大曲率)の方向と最小値(最小曲率)の方向が存在すると述べた。この最大値と最小値の積を曲面のガウス曲率という。したがって、球のそれは、球の半径の-2乗である。鞍型の曲面は、前後方向には下に凸、左右方向には上に凸というぐあいに、反り返る方向が曲面上の方向によって異なる。この場合は、最大曲率と最小曲率が異符号を持つと考えて、ガウス曲率は負の値になる。

さて、単位球上の2点をむすぶ測地線(すなわち大円)は、場所にも方向にもよらず、曲率半径は1である。そして、球面上の場所によらず、ガウス曲率は+1という一定値をもつ。対するに、Fig. 1のように内角の和が180°より小さい三角形が横たわるのは、ガウス曲率が負の曲面である。そうした曲面のうち、歪み解析に有用なのは、曲面上の場所にも方向にもよらず、曲面上の測地線の曲率半径が1で、曲面上で場所によらず、ガウス曲率が-1という一定値をもつ双曲平面(hyperbolic plane)である。平面とよぶにもかかわらず、曲率がゼロであるユークリッド平面とは異なることに注意する必要がある。この曲面は虚数iの半径をもつ擬球(pseudosphere)ともよばれ(Stillwell, 1996)、ユークリッド空間の中には存在しえない曲面である。ただし、ガウス曲率が曲面上の場所によらず-1という一定値の、tractroidともよばれる曲面は、ユークリッド空間中に存在する(Ratcliffe, 2006, p. 5)。これはラッパの先端のような立体図形



**Fig. 2.** Hyperboloid,  $H^2$ , as the parameter space for the aspect ratios and major-axis orientations of ellipses. The rectangular Cartesian coordinates,  $O-123$ , and the cylindrical coordinates,  $O-r\psi z$ , have the origin in common.  $H^2$  asymptotes to  $L$ , which is the cone defined by  $x_0 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ . The point  $C$  has the Cartesian coordinates,  $(1, 0, 0)$ , and represents a unit circle in the physical space, while long ellipses are represented by points on  $H^2$  that are distant from  $C$ . 第0座標軸について対称な回転双曲面  $H^2$  が、サイズ情報を捨象した楕円を表すパラメータ空間。第0座標軸とそれとの交点  $C$  の座標は  $(1, 0, 0)$  で、実空間の単位円を表す点であり、楕円のアスペクト比が大きくなるほど、この点から離れた  $H^2$  上の点で表される。  $H^2$  は原点を頂点とし、第0座標軸にかんして対称な円錐  $x_0 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$  に漸近する。第01座標平面と  $H^2$  の交線として定義される双曲線を  $H^1$  とする。直交デカルト座標  $O-123$  と円筒座標  $O-r\psi z$  は原点を共有する。

であるが、ラッパの中軸と直交する平面と tractroid との交線である円の曲率は、この中軸方向に変化する。またこの中軸を含む平面との交線の曲率も変化する。双曲平面では、測地線の曲率が場所によらず一定である。

双曲平面はユークリッド空間中に存在しないが、ユークリッド空間中の回転双曲面 (Fig. 2) をそのアナロジーとして、双曲平面上の幾何を考えることができる (中岡, 1993; Reynolds, 1993)。ただし、地図投影にゆがみが不可避であるのと同様に、ユークリッド空間には存在しない図形をユークリッド空間の図形に置き換えることで、ゆがみが生じていることに注意すべきである。鞍型の曲面は、曲面に沿った方向によって、反り返る方向が異なっていた。しかし、Fig. 2 の回転双曲面はどの点でも、第0座標軸の無限遠点の方向に曲がっていて、ガウス曲率は正符号であるように見える。これは回転双曲面を双曲平面のアナロジーとしたときに生じるゆがみである。

この回転双曲面を表す式を3つ導入する (第(1), (2), (5)式)。まず、歪みマーカーに対応した楕円のアスペクト比を  $R$ 、長軸方向を  $\phi$  とする。そして、原点を  $O$  とする三次元の直交デカルト座標を  $O-012$  とし、その位置ベクトルを  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  とし、楕円のパラメータ  $\rho = \log R$ 、 $\psi = 2\phi$  と

$$\begin{cases} x_0 = \cosh \rho \\ x_1 = \sinh \rho \cos \psi \\ x_2 = \sinh \rho \sin \psi \end{cases} \quad (1)$$

のように関係づける。これら3式をあわせると、回転双曲面 (Fig. 2) のパラメータ表示になっている。ただし、 $R$  は楕円のアスペクト比だから  $R \geq 1$  であり、またそれゆえ  $\rho \geq 0$  である。また、楕円はその中心の周りに2回対称なので ( $180^\circ$  回転でもとに戻る)、楕円の長軸方向を指定するには  $0 \leq \phi \leq \pi$  で十分である。すなわち、 $0 \leq \psi \leq 2\pi$  の範囲の  $\psi$  で、あらゆる長軸方向を表現することができる。 $\rho$  の範囲に対して、 $x_0$  の取り得る値の範囲は  $1 \leq x_0$  である。等号は  $\rho = 0$  の場合、すなわち  $\mathbf{x} = (1, 0, 0)^T$  のときに成り立つ。この位置ベクトルで指し示される点以外に  $\rho = 0$  である点はない。この点を  $C$  とすると、そこでは  $\rho = 0$ 、 $R = 1$  であるから、点  $C$  は実空間の単位円に対応している。 $\rho$  が大きいほどアスペクト比の大きな楕円を表す。

さて、双曲線関数にかんする恒等式  $\cosh^2 \rho - \sinh^2 \rho = 1$  と式(1)をあわせると、次の式を導くことができる：

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1. \quad (2)$$

円筒座標  $r, \psi, z$  を使うと、この式は  $z = \sqrt{r^2 + 1}$  となる。これは、第0座標軸を対称軸とする回転双曲面 (Fig. 2) を表す。すなわち式(2)は、回転双曲面の陰関数表示である。この曲面は、 $r \rightarrow \infty$  で  $z = r$  という円錐に漸近する。原点を頂点とするこの円錐を光錐 (light cone) とよび、 $L$  という記号で表す。また、第01座標平面と  $H^2$  との交線は双曲線  $x_0 = \sqrt{x_1^2 + 1}$  であるが、これを  $H^1$  と書くことにする。

さて、 $\rho \geq 0$  のとき  $\cosh \rho$  も  $\sinh \rho$  も  $\rho$  にかんする単調増加関数であるから、 $(\rho, \psi)$  というペアは、この回転双曲面上の点と1対1対応する。さらに、その点は  $(R, \phi)$  というペアとも1対1対応する (Fig. 3)。点  $C$  では  $\rho = 0$  であり、 $H^2$  上でその点から離れるほど  $\rho$  が大きくなる。したがって、 $\rho$  は  $H^2$  上における点  $C$  から測った一種の距離を表している。

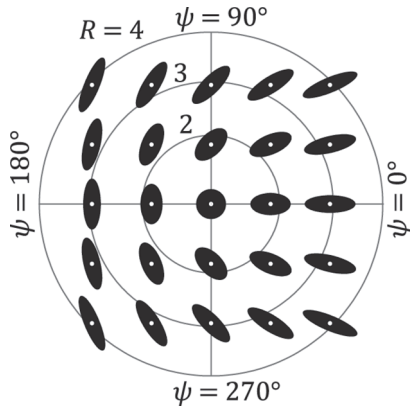
そこで次に、距離を定義する。そのためにまず、ベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の内積を通常の  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2$  ではなく、

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{J} \mathbf{y} = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2. \quad (3)$$

と定義し、Lorentz 内積とよぶことにする (中岡 (1993) は擬内積とよんでいる)。ただし、

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

これを Minkowski 行列という。通常の内積と区別するために、式(3)では積を表す記号を「 $\cdot$ 」ではなく「 $\circ$ 」と書いた。ユークリッド空間では、 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$  が2つのベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の直交条件である。同様に、 $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0$  なら、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  は Lorentz 直交する (Lorentz orthogonal) という。 $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0$  であることと  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$  であることは同じではないことに注意すべきである。内積が Lorentz 内積として定義された空間を Minkowski 空間という。通常の内積なら  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  は正の値かゼロ ( $\mathbf{x} = 0$  の場合) だが、式(3)の右辺第1項に負号がつ



**Fig. 3.** Diagram illustrating the correspondence between ellipses in the physical space and points on  $H^2$ . The white dots at the center of the ellipses indicate the orthogonal projections of the points on  $H^2$  onto the  $O$ -12 coordinate plane. 実空間の楕円と  $H^2$  上の点のあいだの対応関係を示す図。  $H^2$  上の点を第 12 座標平面に正射影したのが楕円の中心の白丸で示された点。

いているために、 $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}$  は正にも負にもゼロにもなる。 Lorentz 内積を使うと、  $H^2$  を表す式を

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = -1. \tag{5}$$

と書くことができる。 単位球の式は  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$  なので、ここで球と  $H^2$  との類似性が現れた。 球の式の右辺の平方根を球の半径とするなら、擬球  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = -1$  の半径は  $\sqrt{-1} = i$  である。 式  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = +1$  が表す立体図形は、 Fig. 4 に  $dS_2$  と示された一様双曲面で、第 0 座標軸について対称である。 内積が上記のように定義された曲面  $H^2$  を双曲幾何学の双曲面モデルとよぶ。 これを使うと、双曲平面上の幾何をユークリッド空間の図形として思い描くことができるわけである。

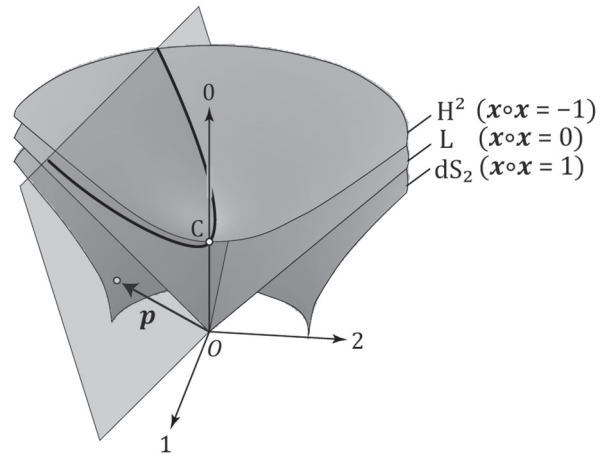
**【問題】** 位置ベクトル  $\mathbf{x}$  とそれ自身との Lorentz 内積  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}$  の符号は、  $\mathbf{x}$  が光錐  $L$  の上側にあるか下側にあるか、または  $L$  の上にあるかを表すことを示せ。 ただし  $\mathbf{x}$  の第 0 成分は負ではないとする。

**【答え】** Fig. 2 の円筒座標  $O-r\psi z$  を使うと  $x_1 = r \cos \psi$ ,  $x_2 = r \sin \psi$ ,  $x_0 = z$  であるから、  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = -z^2 + r^2$ 。 ただし、  $z \geq 0$  の領域のみを考える。 したがって、  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = 0$  は  $L$  を表す式  $z = r$  になる。 このとき  $\mathbf{x}$  は  $L$  上に存在する。  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} > 0$  なら  $z < r$  なので、  $\mathbf{x}$  は  $L$  の下側にある。  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} < 0$  なら  $z > r$  なので、  $\mathbf{x}$  は  $L$  の上側にある。 ■

終点が  $L$  より上にある位置ベクトルを時間的(time-like)ベクトル、  $L$  上にあるものを光的(light-like)ベクトル、  $L$  より下にあるものを空間的(space-like)ベクトルという。 もちろん小論の話題は、時間や光と直接の関係はない(相対性理論では、第 0 座標は時間を表し、第 12 座標平面は空間を、  $L$  は光の伝播を表す)。  $H^2$  上の点を表す位置ベクトルは時間的である。 ゼロまたは正符号の量

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|\mathbf{x} \circ \mathbf{x}|} \tag{6}$$

を Lorentz ノルムとよぶ。 これがゼロになるのは、  $\mathbf{x} = 0$  の



**Fig. 4.** Schematic illustration for the three surfaces,  $H^2$ ,  $L$  and  $dS_2$ , in Minkowski space. The thick indicates the geodesic that is defined by the intersection of  $H^2$  and the hyperbolic plane with the pole,  $p$ . The endpoint of this vector exists on  $dS_2$ . The surfaces in the range,  $x_1 > 0$ , have been omitted for clarity. ミンコフスキー空間の 3 曲面、  $H^2$ ,  $L$ ,  $dS_2$ 。 ベクトル  $p$  を極とする平面と  $H^2$  の交線として定義される  $H^2$  上の測地線を太線で示す。 このベクトルの終点は  $dS_2$  上に存在する。 各曲面の  $x_1 > 0$  の部分は説明のために描かれていない。

場合または位置ベクトル  $\mathbf{x}$  が光錐上に存在するときである。

**【問題】** Lorentz ノルムがゼロでないベクトル  $\mathbf{x}$  が時間的ベクトルまたは空間的ベクトルなら、ベクトル

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\| \tag{7}$$

はそれぞれ  $H^2$  上または  $dS_2$  上の点を表すことをしめせ。 ただし、  $dS_2$  は Fig. 4 の一様双曲面の第 0 座標がゼロまたは正の部分である。

**【答え】** 極座標を使って  $\mathbf{x} = (r, \psi, z)$  とすると、 Lorentz ノルムがゼロでないということは、  $r^2 - z^2 \neq 0$  ということである。 また、  $y_r = r / \sqrt{r^2 + z^2}$ ,  $y_\psi = \psi$ ,  $y_z = z / \sqrt{r^2 + z^2}$ 。 そこで、  $\mathbf{y} \circ \mathbf{y} = -y_z^2 + y_r^2 = (r^2 - z^2) / (r^2 + z^2) = \pm 1$ 。 これは  $-1$  なら  $H^2$ ,  $+1$  なら  $dS_2$  を示す式である。 式(7)の右辺の分母はゼロではなく正符号をもつ(ゼロなら  $\|\mathbf{x}\| = 0$  となり仮定と矛盾)。 ゆえに、  $\mathbf{y} \circ \mathbf{y}$  の符号は  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}$  の符号と同一である。

**【問題】** 時間的ベクトル  $\mathbf{x}$  と Lorentz 直交するベクトル  $\mathbf{y}$  がゼロベクトルではないものとする。  $\mathbf{y}$  が空間的であることをしめせ。

**【答え】** 仮定から  $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 < 0$ 。 ゆえに  $x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ 。 また、任意の  $\mathbf{x}$  について  $-x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$  であるから、  $y_1 = y_2 = 0$  なら  $y_0 = 0$  となって、  $\mathbf{y} \neq 0$  という仮定に矛盾する。 ゆえに  $y_1^2 + y_2^2 > 0$ 。 これらを使うと、  $x_0^2 (-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2) = -(x_0 y_0)^2 + x_0^2 (y_1^2 + y_2^2) > -(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_1^2 + x_2^2) (y_1^2 + y_2^2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geq 0$ 。 すなわち  $\mathbf{y} \circ \mathbf{y} > 0$ 。

**【問題】** ゼロベクトルでない空間的ベクトルには Lorentz 直交する時間的ベクトルが存在することをしめせ。

**【答え】** 空間ベクトルを  $\mathbf{x}$  とすると、仮定によりこれは  $\mathbf{x} \circ$



$\mathbf{x} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 > 0$  をみたらす。すなわち  $x_0^2 < x_1^2 + x_2^2$ 。これの右辺がゼロなら  $x_0 = 0$  となり、 $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = 0$  となって仮定と矛盾する。したがって、 $x_1^2 + x_2^2 > 0$  である。そして  $x_0^2 \geq 0$  である。そこでまず、 $x_0 = 0$  の場合を考える。 $\mathbf{y} = (1, 0, 0)^T$  という時間的ベクトルをとると、 $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = x_0 = 0$  となって、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  は Lorentz 直交する。次に  $x_0 \neq 0$  の場合であるが、 $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} > 0$  なので、

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{|\mathbf{x} \circ \mathbf{x}|}} + \frac{\sqrt{|\mathbf{x} \circ \mathbf{x}|}}{x_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく。すると、

$$\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{|\mathbf{x} \circ \mathbf{x}|}} \circ \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{|\mathbf{x} \circ \mathbf{x}|}} = 1$$

$$(1, 0, 0)^T \circ (1, 0, 0)^T = -1$$

$$\mathbf{x} \circ (1, 0, 0)^T = -x_0$$

なので、

$$\mathbf{y} \circ \mathbf{y} = -1 - \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{x}}{x_0^2} < 0.$$

すなわち  $\mathbf{y}$  は時間的ベクトルである。さらに、 $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0$  となって、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  が Lorentz 直交することがわかる。したがって、 $x_0 \neq 0$  の場合も条件を満たす時間的ベクトルが存在する。■

球面上の2点を結び最短経路は両点を結び大円である。このように、2点間をむすぶ最短経路を曲面上の測地線 (geodesic) という。大円は球の中心を通る平面と球との交線である。同様に、Minkowski空間の原点と  $H^2$  上の2点で定義される平面と  $H^2$  との交線が、 $H^2$  上でのそれら2点間測地線である (Fig. 4)。その平面上の点を  $\mathbf{x}$  で表すと、時間的ベクトルである  $\mathbf{x}$  と Lorentz 直交する空間的ベクトル  $\mathbf{p}$  が存在して、 $\mathbf{x} \circ \mathbf{p} = 1$  をみたらす。この  $\mathbf{p}$  を平面の極という。Fig. 4 に描かれた平面と  $\mathbf{p}$  は Lorentz 直交するが、直交しないようにみえる。これはユークリッド空間内に存在しえない  $H^2$  をユークリッド平面に描いたために生じた、地図投影の歪みのようなものである。

さて、単位球上の2点間の距離は、その間の角距離  $\Theta$  で表すことができる。それら2点を  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  とすると、これらは単位ベクトルなので、 $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \cos \Theta$ 。したがって、角距離を式  $\Theta = \cos^{-1}(\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$  で計算することができる。同様に、 $H^2$  上の2点の位置ベクトルが  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  であるとすると、

$$d_H = \cosh^{-1}(-\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$$

によって、その間の  $H^2$  に沿った距離と見なすことができる。これを Lorentz 距離または双曲的距離という。この距離は、 $H^2$  上の測地線にそった距離である。 $H^2$  上の点  $C$  から点  $\mathbf{x} = (\cosh \rho, \sinh \rho \cos \psi, \sinh \rho \sin \psi)^T$  までの Lorentz 距離は  $d_H = \cosh^{-1}[-(1, 0, 0) \mathbf{J} \mathbf{x}] = \cosh^{-1}(\cosh \rho) = \rho$  である。したがって、 $\rho$  は点  $C$  からの Lorentz 距離にほかならず、その意味で確かに、前回紹介した Elliott プロット (Elliott, 1970) は、点  $C$  を中心とした  $H^2$  の正距方位投影なのである (Reynolds, 1993)。ただし、点  $C$  から  $H^2$  上の任

意の点までの Lorentz 距離は正しく Elliott プロットで表現できるが、 $H^2$  上の任意の2点間の距離は正しくプロットされない。これは地球表面の正距方位図法で投影中心からの距離しか正しく表現されないことと同じである。

さて、物体の長さが変形で  $L$  から  $L'$  になったとすると、 $\log(L'/L)$  を対数歪みという。対数歪みは、長さが変わらなければゼロ、伸長変形なら正の値、短縮なら負の値をとる。単位円を同じ面積を持ち、アスペクト比が  $R$  の楕円にするには、長軸方向に  $\sqrt{R}$  倍、短軸方向に  $1/\sqrt{R}$  倍すればよい。それらの対数歪みは  $\pm \rho/2$  である。面積一定条件では、長軸と短軸の倍率はたがいに逆数であって、独立ではない。ゆえに、この歪みを特徴付けるのは、正符号の  $\rho/2$  だけで十分である。したがって、楕円で代表させた歪みマーカーの対数歪みと  $\rho$  は1対1対応する。つまり、Minkowski空間で定義された Lorentz 距離  $\rho$  は、実空間では対数歪みに対応するのである。Fig. 1 が示すように、一様変形である楕円から他の楕円に変換するには  $\rho_s$  という対数歪みが必要であるが、それは2つの楕円に対応した  $H^2$  上の2点間の Lorentz 距離にほかならない。歪み解析の問題が  $H^2$  上の幾何の問題に変換されることが見えてきただろう。

### 3. 等長変換としての純剪断

実空間における純剪断が、 $H^2$  上の等長変換 (任意の2点間の長さを保存する写像) に対応することを示す。まず、球面上の図形を球面上で動かすことを考えよう。球面は曲率が場所によらず一定なので、図形を伸縮させず、つまり剛体的に動かすことができる。そうした移動を、球面上の等長変換 (isometry) という。図形の中の任意の2点間の長さが保存するという意味である。プレートテクトニクスの教科書 (例えば瀬野, 1995) にあるように、球面上のそうした移動は、回転軸が球の中心をとる剛体回転で表すことができる。その回転行列を  $\mathbf{R}$  とすると、それは直交行列であり、式  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$  をみたらす。 $H^2$  上の等長変換の議論につながるように、この式を  $\mathbf{I} = \mathbf{R}^T \mathbf{I} \mathbf{R}$  と書き換える。この式をみたらすなら、 $\mathbf{R}$  は球面上の等長変換である (しかしこの条件だけでは回転だけでなく鏡映も含む)。

$H^2$  も曲率が一定なので、 $H^2$  上で図形を伸縮させずに動かすことができる。つまり、図形を構成するどの2点間の Lorentz 距離も変化しないということである。移動前の2点の位置ベクトルを  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  とすると、その間の Lorentz 距離  $\cosh^{-1}(-\mathbf{a} \circ \mathbf{b})$  が変化しないということは、

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{J} \mathbf{b} \quad (8)$$

が変化しないということである。 $\mathbf{J}$  は Minkowski 行列である (式 4)。この移動が位置ベクトルの1次変換で書けるとして、その変換行列を  $\mathbf{T}$  とする。移動後の2点について、Lorentz の内積は

$$(\mathbf{T} \mathbf{a})^T \mathbf{J} (\mathbf{T} \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{b} \quad (9)$$

となる。Lorentz 距離が変化しないということは、これの右辺と式 (8) をくらべることにより、式

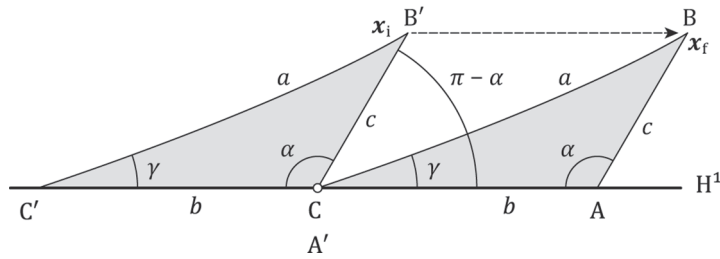


Fig. 5. Congruent hyperbolic triangles that share vertices at the point  $(1, 0, 0)^T$  on  $H^2$ .  $H^2$  の上の点  $(1, 0, 0)^T$  を頂点として共有する合同な双曲三角形.

$$J = T^T J T \tag{10}$$

がなりたつことであることがわかる。この式は、球面上の等長変換の変換行列が、 $I = R^T I R$  を満たさねばならないことに対応している。逆に式(10)を満たす  $T$  による変換は等長変換である。

実空間における純剪断変形は、 $H^2$  の上の等長変換に対応する。それを示すために、次の問題を考える。

【問題】 次の変換行列で表される 1 次変換が  $H^2$  上の等長変換であることをしめせ：

$$T_0(\rho_s) = \begin{pmatrix} \cosh \rho_s & \sinh \rho_s & 0 \\ \sinh \rho_s & \cosh \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

【答え】 双曲線関数にかんする恒等式  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  を使うと、

$$T_0^T J T_0 = \begin{pmatrix} -\cosh^2 \rho_s + \sinh^2 \rho_s & 0 & 0 \\ 0 & \cosh^2 \rho_s - \sinh^2 \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J.$$

ゆえに、 $T_0$  による変換は、 $H^2$  の上の等長変換である。次に、 $H^2$  の上の任意の点を  $x = (\cosh \rho, \sinh \rho \cos \psi, \sinh \rho \sin \psi)^T$  とすると、この変換により、この点は

$$y = T_0 x = \begin{pmatrix} \cosh \rho_s \cosh \rho + \sinh \rho_s \sinh \rho \cos \psi \\ \sinh \rho_s \cosh \rho + \cosh \rho_s \sinh \rho \cos \psi \\ \sinh \rho \sin \psi \end{pmatrix}$$

に移る。上記の恒等式を使うと、上の式の最右辺から  $-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = -1$  を示すことができる。これは、位置ベクトル  $y$  の終点が  $H^2$  の上に存在することを意味する。■

それでは次に、式(11)と純剪断変形との関係を考えよう。 $H^2$  の上の双曲三角形  $ABC$  と  $A'B'C'$  が合同であるものとする (Fig. 5)。すなわち、対応する辺の長さ(頂点間の Lorentz 距離)が等しいということである。ただし、頂点  $A'$  と  $C$  は同じ点で、 $H^2$  と第 0 座標軸の交点に位置し、辺  $AC$  と  $A'C'$  が  $H^1$  の上にあるものとする (Fig. 2)。 $H^1$  は第 2 座標軸方向を極とする測地線である。つまり、この線はその上にある 2 点を結ぶ最短ルートであるから、三角形の頂点がこの線上にあれば、それらの頂点をむすぶ辺もこの線上にある。三角形の辺の長さ(頂点のあいだの Lorentz 距離)を  $a, b, c$  とし、また、2つの内角を Fig. 5 のように  $\alpha, \gamma$  とする。そして等長変換で、辺  $B'C'$  は辺  $BC$  に移動するとする。頂点  $B$  と  $B'$  の位置ベクトルは、それぞれ

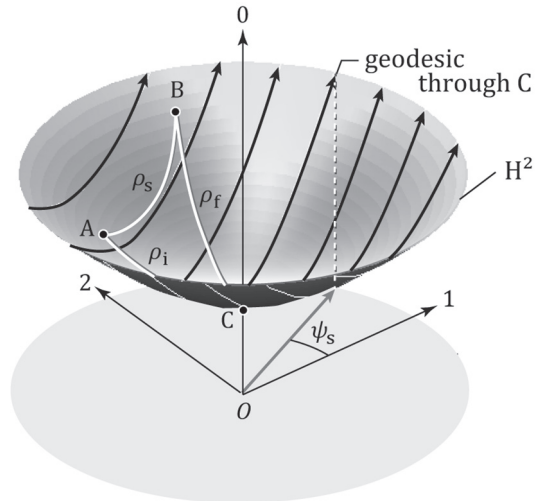


Fig. 6. Schematic illustration for the isometry (solid arrows) on  $H^2$  corresponding to pure shear. Gray arrows are the orthogonal projections of the solid arrows onto the 12-coordinate plane. The azimuth of the gray arrow relative to the 1-coordinate axis is equal to  $\psi_s$ . The white line on  $H^2$  depicts the hyperbolic triangle with vertices, A, B and C, shown in Fig. 1. 実空間における純剪断に対応した  $H^2$  上の等長変換を表す黒い太線の矢印。その第 12 座標平面への正射影は平行線になる。Fig. 1 の双曲三角形が  $H^2$  上の白線で表されている。

$$x(B') = \begin{pmatrix} \cosh a \\ \sinh a \cos \gamma \\ \sinh a \sin \gamma \end{pmatrix}. \tag{12}$$

および

$$x(B) = \begin{pmatrix} \cosh c \\ \sinh c \cos(\pi - \alpha) \\ \sinh c \sin(\pi - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh c \\ -\sinh c \cos \alpha \\ \sinh c \sin \alpha \end{pmatrix}$$

である。後者に  $T_0(b)$  を作用させると、

$$T_0(b)x(B) = \begin{pmatrix} \cosh b & \sinh b & 0 \\ \sinh b & \cosh b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh c \\ -\sinh c \cos \alpha \\ \sinh c \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha \\ \sinh b \cosh c - \cosh b \sinh c \cos \alpha \\ \sinh c \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

三角形  $ABC$  と  $A'B'C'$  は合同なので、点  $B$  はこの式が示す点と一致する。そこでこれと式(12)の各成分を等値して、

$$\begin{aligned} \cosh a &= \cosh b \cosh c - \sinh b \cosh c \cos \alpha \\ \sinh a \cos \gamma &= \sinh b \cosh c - \cosh b \cosh c \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\sinh a \sin \gamma = \sinh c \sin \alpha.$$

となる。これらのうち最初のは双曲三角形にかんする余弦公式、最後のは正弦公式にほかならない(本講座第3回 §5)。こうして、Lorentz 内積から距離を定義することから始めて、それらの公式が導かれた。

さて、前回の最後のセクションで、双曲三角形の余弦公式と正弦公式が、純剪断による楕円の変換公式に一致することが示された。すなわち、

$$\cosh \rho_f = \cosh \rho_i \cosh \rho_s - \sinh \rho_i \sinh \rho_s \cos \psi_i \quad (13)$$

$$\sinh \rho_f \sin \psi_f = \sinh \rho_i \sin \psi_i \quad (14)$$

である(添え字の  $i, f, s$  は、それぞれ変形前の楕円、変形後の楕円、歪み楕円にかかわる量であることを示す)。このことは、純剪断変形が  $H^2$  上の  $T_0$  による等長変換に対応することを意味する。点  $C$  が移ってゆく先の点  $A$  が歪み楕円を表すことも分かる(Fig. 5)。点  $A$  は  $H^1$  上にあるので、それが表す歪み楕円の長軸方向について、 $\phi_s = \psi_s = 0$  であることがわかる。すなわちこの純剪断変形は、楕円の長軸を測る際の基準方向が純剪断の最大伸長方向と一致する純剪断なのである。

では、一致しない場合はどうなるだろうか。それには、当講座第1回(山路, 2016)の Fig. 7 と同じ手続きを踏めばよい。すなわち、変形前の楕円を表す位置ベクトル  $(\cosh \rho_i, \sinh \rho_i \cos \psi_i, \sinh \rho_i \sin \psi_i)^T$  をまず第0座標軸の周りに  $-\psi_s$  だけまわし、 $T_0$  で等長変換してから回転を戻すのである。この操作を表す行列は、

$$T_{ps}(\rho_s, \psi_s) = T_r(\psi_s) T_0(\rho_s) T_r(-\psi_s) \quad (15)$$

となる。ただし、

$$T_r(\psi_s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_s & -\sin \psi_s \\ 0 & \sin \psi_s & \cos \psi_s \end{pmatrix}.$$

この回転は  $H^2$  上の Lorentz 距離を変化させないので、 $T_{ps}(\rho_s, \psi_s)$  もまた  $H^2$  上の等長変換を表す変換行列である。ここまでで、実空間における純剪断変形が  $T_{ps}(\rho_s, \psi_s)$  による  $H^2$  上の等長変換

$$\mathbf{x}_f = T_{ps}(\rho_s, \psi_s) \mathbf{x}_i \quad (16)$$

で表現されることが明らかになった。ただし、変形前後の楕円のパラメータの組を  $(\rho_i, \psi_i)$ 、 $(\rho_f, \psi_f)$  とすると、式(16)のベクトルは、次の成分をもつ：

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} \cosh \rho_i \\ \sinh \rho_i \cos \psi_i \\ \sinh \rho_i \sin \psi_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_f = \begin{pmatrix} \cosh \rho_f \\ \sinh \rho_f \cos \psi_f \\ \sinh \rho_f \sin \psi_f \end{pmatrix} \quad (17)$$

$T_{ps}(\rho_s, \psi_s)$  が表す純剪断をもとに戻す逆純剪断は  $T_{ps}(\rho_s, \psi_s + \pi)$  である(前回の Fig. 7 参照)。Fig. 6 の太い黒線の矢印は、純剪断に対応した式(16)による  $H^2$  上の等長変換の軌跡を表している。式(14)が  $\rho_s$  を含まないので、 $\psi_s = 0$  ならこの軌跡の第12座標平面への正射影は  $H^2$  の正射影と平行な直線である。また、 $\psi_s \neq 0$  なら、第1座標軸と  $\psi_s$  という角度をなす直線になる。 $T_0(\rho_s)$  の固有値は1,  $\exp(\pm \rho_s)$  であ

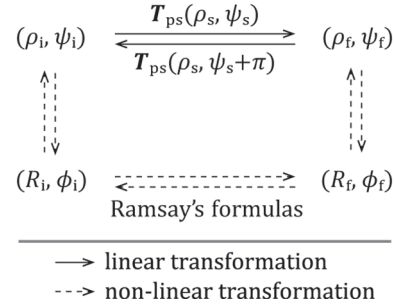


Fig. 7. Diagram for the pure-shear of ellipses. Strain ellipse and pre- and post-strain ellipses are represented by points on  $H^2$  (Fig. 2). 純剪断による楕円の変化。歪み楕円も変形前後の楕円も  $H^2$  上の点で表される(Fig. 2)。

る。最初の固有値に対応する固有ベクトルは  $(0, 0, 1)^T$  であり、軌道の正射影が第1座標軸と平行な直線になることと符合する。対応する固有値が1なので、この固有ベクトルの方向には動かないということである。他の固有ベクトルは  $(1, \pm 1, 0)^T$  という空間的ベクトルである。

楕円の変化を表す  $(R_i, \phi_i) \rightarrow (R_f, \phi_f)$  という写像は Ramsay (1967) が導いた複雑な非線形の式で表現される。すなわち、

$$\tan 2\phi_f' = \frac{2R_s(R_i^2 - 1) \sin 2\phi_i'}{(R_i^2 + 1)(R_s^2 - 1) + (R_i^2 - 1)(R_s^2 + 1) \cos 2\phi_i'} \quad (18)$$

$$R_f = \left[ \frac{\tan 2\phi_f'(1 + R_i^2 \tan 2\phi_i') - R_s^2(\tan 2\phi_f' + R_i^2)}{(R_s^2 \tan 2\phi_f'(\tan 2\phi_f' + R_i^2) - (1 + R_i^2 \tan 2\phi_i'))} \right]^{1/2} \quad (19)$$

という式である。これらを使って、変形前の楕円のパラメータと歪み楕円のパラメータから変形後の楕円のパラメータを計算することができる。いま注目していただきたいのは、式(18)と(19)の複雑さである。複雑であるため、それらを使っているのは、理論的な見通しがよくない。

それに対して上で紹介した双曲幾何学による定式化では、非線形性は  $(R, \phi) \leftrightarrow (\rho, \psi)$  という単純で可逆な非線形変換に吸収され、肝心の変形は線形変換(式16)で表される(Fig. 7)。線形であるために、逆問題の構成や誤差解析が容易にできるようになるのである。また、観測された歪みマーカーにフィッティングされた楕円が、 $H^2$  上の点  $\mathbf{x}_f^{\text{obs}}$  で表され、適当な歪み楕円を仮定したときのその理論値  $\mathbf{x}_f^{\text{theory}}$  との Lorentz 距離  $\cosh^{-1}(\mathbf{x}_f^{\text{obs}} \circ \mathbf{x}_f^{\text{theory}})$  は、2つの楕円の一方を他方に一致させるのに要する対数歪みに対応する。歪み解析で使う2つの物体の非類似度として、これ以上にふさわしい定式化があるだろうか。従来のように  $(\log R, \phi)$  をデカルト座標あるいは極座標とするパラメータ空間では、パラメータ空間の2点間の距離と非類似度では合理的な関係がない(本講座第3回 Fig. 8)。これらの理由で、 $H^2$  は歪み解析のパラメータ空間としてふさわしいと考えられる。

#### 4. Hyperbolic vector mean method

多数の歪みマーカーの観察にもとづいて、歪み楕円のアスペクト比と長軸方向を決定するのが  $Rf/\phi$  歪み解析である。



問題は次のように定式化される。すなわちまず、歪みマーカーが  $n$  個観察されたとする。それらにフィットする楕円のアスペクト比と長軸方向  $(R_i^{(1)}, \phi_i^{(1)})$ , ...,  $(R_i^{(n)}, \phi_i^{(n)})$  が与えられたとし、またさらに、マーカーを含む岩体が一様変形したと仮定して、歪み楕円を表すパラメータ  $(R_s, \phi_s)$  を決定せよという問題である。じつは与えられたそれらのデータと仮定だけで、この問題を解くことはできない。変形前のマーカー群の統計的性質について、地質学的に妥当な仮定をする必要がある。この問題の一解法であり、双曲幾何学に立脚した、hyperbolic vector mean method (Yamaji, 2008) を紹介する。なお、実際の利用法については、楕円をフィッティングする手続きを含めて、山路(2013)が解説している。

4.1 原理

Hyperbolic vector mean method の原理をここで解説する。歪みマーカーにフィットした  $n$  個の楕円が、 $H^2$  上のデータ点  $x_f^{(1)}, \dots, x_f^{(n)}$  で表されているとしよう。これらから歪み楕円を表す  $H^2$  上の点  $x_s$  をいかに決定するかというのが、ここで解くべき問題である。データ点の平均ベクトルを

$$m = \frac{1}{n} [x_f^{(1)} + \dots + x_f^{(n)}]$$

とすると、位置ベクトル

$$\mu_f = \frac{m}{\|m\|} = \frac{x_f^{(1)} + \dots + x_f^{(n)}}{\|x_f^{(1)} + \dots + x_f^{(n)}\|}. \tag{20}$$

が示す点は  $H^2$  上に存在する。これはデータ点の  $H^2$  上の重心である。この点が歪み楕円であるとするのが hyperbolic vector mean method である。分母の Lorentz ノルムで割っているのは、式(7)のところで説明したように、分子の位置ベクトルの終点を  $H^2$  上に乗せるためである。

この問題を解くために、Ramsay(1967)以来、変形前の楕円の長軸方向  $\phi_i$  の分布はランダムという仮定がおかれることが多かった。すなわち、等方的ファブリックである。Hyperbolic vector mean method では、変形前の楕円を表す  $x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)}$  の重心

$$\mu_i = \frac{x_i^{(1)} + \dots + x_i^{(n)}}{\|x_i^{(1)} + \dots + x_i^{(n)}\|}$$

が  $H^2$  上の点  $C$  に一致することを仮定する ( $\mu_i = (1, 0, 0)^T$ )。この仮定は等方的ファブリックの場合を含む、よりゆるい仮定である。というのも、例えば  $x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)}$  が  $(\rho, \psi)$  と  $(\rho, \psi + \pi)$  の2点にクラスター中心をもつバイモーダル分布でもかまわないからである。バイモーダルの場合、対応する変形前の楕円の長軸方向は  $\psi/2$  と  $(\psi + \pi)/2$  に集中をもつ。実際、堆積物粒子では、直交した2方向に長軸が集中する粒子ファブリックをもつものが多い (Potter and Pettijohn, 1963, p. 44)。さらに一般化して、データ点の分布が第0座標軸の周りに3回対称、4回対称、...といった対称性をもつてもよいし、また、何ら対称性をもたなくてもよい。ようするに  $\mu_i = (1, 0, 0)^T$  という仮定は、異方的粒子ファブリックを許容する。

この仮定のもとで、式(20)で歪み楕円が得られることを説明する。変形にともなう等長変換は前節で示したように、 $x_f = T_{ps}(\rho_s, \psi_s)x_i$  で表される。簡単のために、 $\psi_s = 0$  とする ( $\psi_s \neq 0$  の場合については後で述べる)。さて、 $\psi_s = 0$  の場合の変換行列  $T_0(\rho_s)$  を使って  $\mu_i$  がどこに移るかを見ると、

$$\begin{aligned} T_0(\rho_s)\mu_i &= \frac{T_0(\rho_s)x_i^{(1)} + \dots + T_0(\rho_s)x_i^{(n)}}{\|x_i^{(1)} + \dots + x_i^{(n)}\|} \\ &= \frac{x_f^{(1)} + \dots + x_f^{(n)}}{\|x_i^{(1)} + \dots + x_i^{(n)}\|} = \frac{\|x_f^{(1)} + \dots + x_f^{(n)}\|}{\|x_i^{(1)} + \dots + x_i^{(n)}\|} \mu_f. \end{aligned}$$

すると後述の式(21)により、これを  $\mu_f = T_0(\rho_s)\mu_i$  と書き換えることができる。つまり、純剪断変換を表す等長変換によって、変形前の重心  $\mu_i$  が変形後の重心  $\mu_f$  に移るわけである。

ここで変形前の重心が点  $C(1,0,0)$  に一致していたという仮定を使うと、

$$\begin{aligned} \mu_f &= T_0(\rho_s)\mu_i \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \rho_s & \sinh \rho_s & 0 \\ \sinh \rho_s & \cosh \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \rho_s \\ \sinh \rho_s \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

点  $C$  は単位円をあらす点であるから、その移った先  $\mu_f$  は、たしかに歪み楕円を表す点である。さて、 $\mu_f$  は変形後のマーカー群から計算可能な量、すなわち、観測可能な量である。そこで、 $\mu_f$  に対応する楕円を計算すれば、それが歪み楕円である。具体的には、次のようにすればよい。 $\mu_f$  の座標を  $(\mu_{f0}, \mu_{f1}, \mu_{f2})$ 、歪み楕円に対応する点の座標を  $(\cosh \rho_s, \sinh \rho_s \cos \psi_s, \sinh \rho_s \sin \psi_s)$  とすると、両者が一致するというのが hyperbolic vector mean method の主張である。したがって  $\rho_s = \cosh^{-1}(\mu_{f0})$ 、次いで  $R_s = \exp(\rho_s)$  によって歪み楕円のアスペクト比が得られる。ただし、逆双曲線関数の計算では  $\rho_s \geq 0$  とする。

上の議論では  $\psi_s = 0$  と仮定していたが、その仮定を除いても結論は変わらない。つまり、歪み楕円の長軸方向にかわりなく、重心は重心に移る。これが  $\psi_s \neq 0$  でもなりたつ理由は、次の通りである。仮定  $\psi_s = 0$  は  $\phi_s = 0$  と同値であり、マーカーを観察した面上において、基準方向がたまたま歪み楕円の長軸と一致している場合に、データ点の重心が表す楕円が歪み楕円と一致することが上で証明された。この一致は物理的の実体にかんすることであるから、座標系の選び方には依存しない。これが理由である。歪み楕円の長軸方向は  $\phi_s = \psi_s/2 = \frac{1}{2} \tan^{-1}[(\mu_{f2})/(\mu_{f1})]$  となる。

【問題】 次の式を証明せよ：

$$\|x_i^{(1)} + \dots + x_i^{(n)}\| = \|x_f^{(1)} + \dots + x_f^{(n)}\|. \tag{21}$$

【答え】 これと等価な式を最初に示したのは Wheeler (1986) である(次回の §3)。彼は形状行列を使って証明したのだが、ここでは双曲幾何の文脈で証明する。式(13)、(14)、(17)により、

$$x_f = \begin{pmatrix} \cosh \rho_i \cosh \rho_s - \sinh \rho_i \sinh \rho_s \cos \psi_i \\ \cosh \rho_i \sinh \rho_s - \sinh \rho_i \cosh \rho_s \cos \psi_i \\ \sinh \rho_i \sin \psi_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_i)_0 \cosh \rho_s - (x_i)_1 \sinh \rho_s \\ (x_i)_0 \sinh \rho_s - (x_i)_1 \cosh \rho_s \\ (x_i)_2 \end{pmatrix}.$$

ただし,  $(x_i)_i$  は  $\mathbf{x}_i$  の第  $i$  成分である (ローマン体とイタリク体の添え字の違いに注意). すると,  $\tilde{\mathbf{x}}_f = \mathbf{x}_f^{(1)} + \dots + \mathbf{x}_f^{(m)}$  の第 0, 第 1, 第 2 成分はそれぞれ

$$\begin{aligned} & \{[\mathbf{x}_i^{(1)}]_0 + \dots + [\mathbf{x}_i^{(m)}]_0\} \cosh \rho_s - \{[\mathbf{x}_i^{(1)}]_1 + \dots + [\mathbf{x}_i^{(m)}]_1\} \sinh \rho_s \\ & \{[\mathbf{x}_i^{(1)}]_0 + \dots + [\mathbf{x}_i^{(m)}]_0\} \sinh \rho_s - \{[\mathbf{x}_i^{(1)}]_1 + \dots + [\mathbf{x}_i^{(m)}]_1\} \cosh \rho_s \\ & [\mathbf{x}_i^{(1)}]_2 + \dots + [\mathbf{x}_i^{(m)}]_2 \end{aligned}$$

になる. これらをまとめると,

$$\tilde{\mathbf{x}}_f = \begin{pmatrix} \cosh \rho_s & -\sinh \rho_s & 0 \\ \sinh \rho_s & -\cosh \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_i$$

となる. ただし,  $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i^{(1)} + \dots + \mathbf{x}_i^{(m)}$  である. 右辺の正方行列を  $\mathbf{T}$  として, Minkowski 行列(式 3)と積をとると,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} \cosh \rho_s & \sinh \rho_s & 0 \\ -\sinh \rho_s & -\cosh \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \rho_s & -\sinh \rho_s & 0 \\ \sinh \rho_s & -\cosh \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cosh^2 \rho_s + \sinh^2 \rho_s & 0 & 0 \\ 0 & \cosh^2 \rho_s - \sinh^2 \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}. \end{aligned}$$

したがって,  $\tilde{\mathbf{x}}_f$  の Lorentz ノルム(式 6)は

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_f\| = |\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{T}^T \mathbf{J} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}}_i|^{1/2} = |\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{J} \tilde{\mathbf{x}}_i|^{1/2} = \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|$$

となる(式 10). これは証明すべき式(21)と同値である.

## 4.2 誤差

Hyperbolic vector mean method によって, 歪み楕円の推定誤差も容易に計算できる. まずは, 確度(accuracy)と精度(precision)という, 誤差の種類に注意しよう. そのために  $\mathbb{H}^2$  上にプロットされるデータ点  $\mathbf{x}_f^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_f^{(m)}$  のなすクラスターが小さく密である場合と大きく疎な場合を考える. 後者では重心  $\boldsymbol{\mu}_f$  の位置は不確かさが大きい, 前者なら精度よく決めることができる. これが精度の違いである.  $\boldsymbol{\mu}_f$  が歪み楕円を表すといえるのは, 変形前のデータ点の重心  $\boldsymbol{\mu}_i$  が  $\mathbb{H}^2$  上の点 C の位置にあったと仮定したからである. この仮定が成り立たないデータセットでは, いくら精度よく  $\boldsymbol{\mu}_f$  が求まったとしても, それから計算される歪み楕円は正しくない. これは確度が低いということである.

**4.2.1 確度** 確度が低ければ, Rf/φ 歪み解析がそもそも歪みを見積もる手段として妥当とは言いがたい. 確度を議論するのは数学的な課題ではなく, 地質学的な課題である. たとえば, 変形した礫をマーカーとする場合, 礫種がまちまちで物性差が大きく, また, 基質との物性差が大きければ, 変形は不均一にならざるを得ず, すべてのマーカーが一様変形したという前提は成り立ちにくい. また,  $\boldsymbol{\mu}_i$  が有意に  $(1, 0, 0)^T$  から外れていたなら, Rf/φ 歪み解析では歪みを計算できない. また, 欠陥のある測定器具を使えば, 偏りのあるデータが出てしまうだろう. これも歪み解析の結果の確度を下げる要因であるが, 器具の正確さはやはりデータ解析とは別にチェックすべきことである. こうした検討をパスしたと

して, それに続くべき検討手続きを紹介する.

Rf/φ 歪み解析では純剪断が仮定されるので,  $\mathbb{H}^2$  上の等長変換を考えることになる. 等長変換では  $\mathbb{H}^2$  上の任意の 2 点間の Lorentz 距離が保存する. ということは, フィッティングで得た楕円に対応する点  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$  を  $\mathbb{H}^2$  上にプロットすると, それらによって定義される  $\mathbb{H}^2$  上の多角形の面積も保存する. したがって, それらの点のばらつき具合は等長変換の前後で変わらない. そこで,  $\mathbb{H}^2$  をユークリッド平面(通常の平面)に等積投影できれば, このばらつき具合を視覚的に確認することができる.  $\mathbb{H}^2$  上の点  $(\rho, \psi)$  は, 等積投影で  $(\zeta, \psi)$  という極座標をもつユークリッド平面上の点に移る. ただし,  $\zeta = R^{1/2} - R^{-1/2}$  である(Reynolds, 1993; Yamaji, 2008).  $\mathbb{H}^2$  の種々の投影法は次回紹介する.

ここで, この等積投影や Elliott プロットのような極座標表示の利点を指摘しておく. 楕円が円に近づくほど, 長軸と短軸の決定精度が悪くなり, 円ではそれが  $360^\circ$  になる. それにともなって, 長半径と短半径の決定精度も悪くなる. ゆえに, アスペクト比の小さなデータは,  $R$  も  $\phi$  も精度が悪い. しかし, それらの値が揺らいだとしても,  $\mathbb{H}^2$  上の対応する点が原点に近いことには変わりはない(Fig. 3).  $R$  あるいは  $\log R$  と  $\phi$  を直交座標にプロットする場合, 揺らぎにより対応する点は大きく変動するのとは対照的である. したがって, アスペクト比の小さなデータを極座標でプロットすれば,  $R$  と  $\phi$  の決定精度が  $R$  に依存する効果を抑制できる.

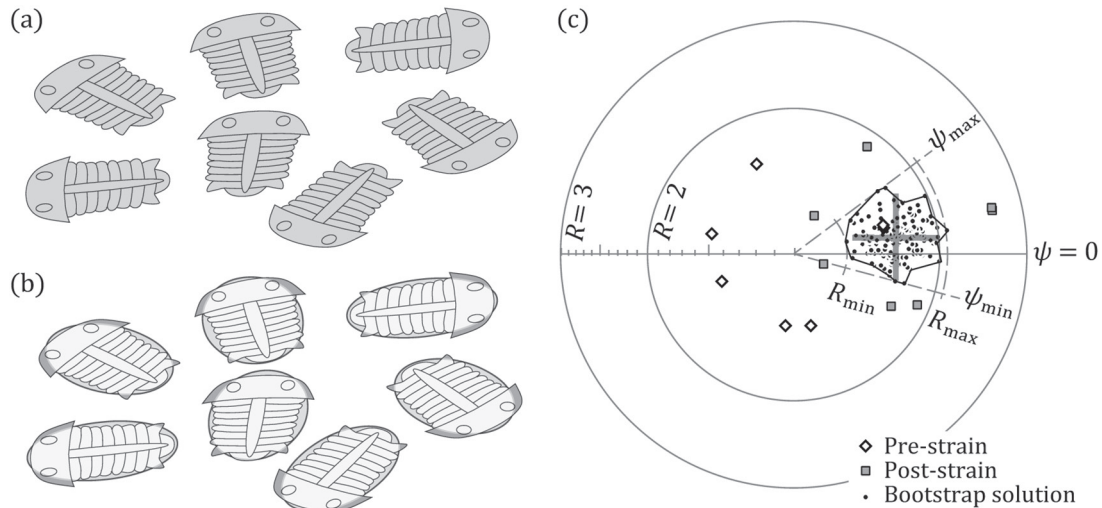
さて, 歪みマーカーから  $\mathbf{x}_f^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_f^{(m)}$  が得られたら,  $\boldsymbol{\mu}_f$  を算出することは簡単である. するとそれから  $\rho_s, \psi_s$  が得られる. さて, 式(16)の逆変換  $\mathbf{x}_f^{(i)} = \mathbf{T}_{ps}^{-1} \mathbf{x}_f^{(i)}$  により, データ点の変形前の位置を計算することができる.  $\mathbf{T}_{ps}$  が表す純剪断変形は,  $\psi_s/2$  の方向にある倍率  $p$  で伸ばし, それと直交方向に  $1/p$  の倍率で伸ばす変形である. したがって,  $\mathbf{T}_{ps}^{-1}$  が表す変形は,  $\psi_s/2$  の方向に  $1/p$  倍, それと直交方向に  $p$  倍にする変形である. ゆえに,

$$\mathbf{T}_{ps}^{-1}(\rho_s, \psi_s) = \mathbf{T}_{ps}(\rho_s, \psi_s + \pi) \quad (22)$$

この逆行列が得られれば,  $\mathbf{x}_f^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_f^{(m)}$  から  $\mathbf{x}_i^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_i^{(m)}$  が計算できる.

確度を検討するには, こうして算出された  $\mathbf{x}_i^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_i^{(m)}$  の等積投影図を検討すればよい. それらの等積投影は, hyperbolic vector mean method を使うなら当然のこと, 原点を中心に分布する. この分布が原点で最大密度となるユニモーダルな分布であれば, Rf/φ 歪み解析を行うことに文句はない. また, このユニモーダル分布の等密度線が楕円形である場合も許容できる. 堆積物にはそうした粒子ファブリックがしばしば認められるからである. しかし, 明瞭なバイモーダル分布など,  $\mathbf{x}_i^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_i^{(m)}$  の等積投影があきらかに複数のクラスターに分かれる場合は, 異なる変形をうけたマーカーが混在しているなど想定外のことを示唆するので, Rf/φ 歪み解析をすべきサンプルかどうか, 地質学的に再検討すべきである(Yamaji, 2013). または測定機器を含めて, データ取得手続きをチェックすべきである. フリーのソフトウェア hStrain には, Rf/φ データを等積投影で表示する機





**Fig. 8.** Application of the hyperbolic vector mean method to deformed trilobites. (a) Trilobite fossils for the  $R_f/\phi$  strain analysis. (b) The binary images of the fossils and the ellipses fitted to the images through the seconds moments of the images. (c) Equal-area projections of the pre- and post-strain data points on  $H^2$  and the optimal strain (+). The polygon surrounding the cross indicates the 95% confidence region of the optimal strain. 変形した三葉虫化石への hyperbolic vector mean method の適用. (a) 三葉虫化石. (b) 二値画像の 2 次モーメントでフィッティングした楕円. (c)  $H^2$  上の変形前後のデータ点の等積投影. 太い十字が最適歪み楕円を, その周りの折れ線がその 95% 信頼範囲を表す.

能がある [URL1].

**4.2.2 精度** Hyperbolic vector mean method で得られた歪み楕円のパラメータの 95% 信頼範囲を Yamaji (2008) はブートストラップ法 (汪・田栗, 2003) で推定した. すなわち, まず, データの集合  $\{\mathbf{x}_i^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_i^{(n)}\}$  から重複を許して  $n$  個のデータをランダムに選んで  $B$  組のデータセットを作る ( $B \gg 1$ ). 例えば, 選ばれるデータの番号が,

- データセット 1 = {3, 4, 8, 25, ...,  $n-3$ }
- データセット 2 = {7, 14, 14, 37, ...,  $n-9$ }

データセット  $B = \{11, 20, 31, 41, \dots, n-1\}$  という具合である. この場合, データセット 2 で 14 番データが 2 回選ばれている. 重複を許して選ぶとは, そういう意味である. この  $B$  個のうち第  $b$  番のデータセットから計算した hyperbolic vector mean を  $\mu^{(b)}$  とすると,  $B$  個の hyperbolic vector means の重心

$$\hat{\mu} = \frac{\mu^{(1)} + \dots + \mu^{(B)}}{\|\mu^{(1)} + \dots + \mu^{(B)}\|}$$

を, もとのデータセットのブートストラップ最適解とする. すると,

$$d_H^{(b)} = \cosh^{-1}[\hat{\mu} \circ \mu^{(b)}]$$

はこの最適解と  $\mu^{(b)}$  のあいだの Lorentz 距離である. この距離が昇順になるように, 番号  $b$  を付け替える. つまり  $\mu^{(1)}$  は最適解に一番近く,  $\mu^{(B)}$  は一番遠い.  $0.95B$  から小数点を切り捨てて整数にした値を  $\alpha$  とし,  $B$  個の hyperbolic vector mean を  $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(\alpha)}$  とそれ以外に分ける. そして, これら  $\alpha$  個が分布する  $H^2$  上の領域を, 最適解の 95% 信頼範囲

とする. これがブートストラップ誤差推定である. Fig. 8 にその例を示す. この図には  $\mu_r$  の 95% 信頼範囲も描かれている. この範囲が  $H^2$  上で点  $C$  を含む場合,  $R_s$  と  $\phi_s$  を十分な精度で決定することはできない. データ点のなすクラスターの中心が, 点  $C$  に近い場合に, そうしたことがある. 例えば, 歪み量が小さい場合である. その場合でもしかし,  $\mu_r$  の 95% 信頼範囲を等積投影図に示すことはできる. つまり,  $R_s$  と  $\phi_s$  の誤差を数値としてしめせなくても, 解の精度を図示することはできる.

例を Fig. 8 に示す (これは当講座第 1 回最終セクションで示したのと同じ例). この例では, わずか 7 つの歪みマーカーだが, データを最もうまく説明できる最適歪み楕円が,  $R_s = 1.66 + 0.36/-0.48$ ,  $\phi_s = 4.9^\circ + 13.6^\circ/-12.3^\circ$  という具合に, 95% 信頼区間つきで決定できる. ここでは 100 個の bootstrap 解を計算し, そのうちで最適解 (図中の太十字) からの Lorentz 距離が最短のものから 95 番目のものまでを黒丸で示している. そしてそれらの分布の外縁を折れ線でかこんで, 最適解の 95% 信頼範囲としている. 図中の破線はこの領域の  $R$  の上下限と  $\psi$  の上下限を表す. それらの上下限が, 上で示した信頼変位である. この等積投影図で最適解の信頼範囲が図の中心の  $R = 1$  の点をかこむ場合は, 信頼範囲を明示することはできるが,  $R_s$  の下限と  $\phi_s$  の上下限を示すことはできない. 誤差を評価するとき, ここでは最適解からの Lorentz 距離を使ったが, 誤差を計算するときには何らかの距離を定義しなければならないことに注意していただきたい. Lorentz 距離は対数歪みに対応づけることができるので, 歪み解析における距離としてふさわしい.

さて, ブートストラップ最適解からの距離として, Lorentz 距離を採用したのはなぜだろうか. 最適解に対応した

歪み楕円のアスペクト比と長軸方向を $(\hat{R}_s, \hat{\phi}_s)$ ,  $\mu^{(b)}$ に対応した楕円の場合を $(R_s^{(b)}, \phi_s^{(b)})$ として、例えば

$$d_{R_0} = \sqrt{[\hat{R}_s - R_s^{(b)}]^2 + [\hat{\phi}_s - \phi_s^{(b)}]^2}$$

を最適歪み楕円と第  $b$  番の歪み楕円のあいだの距離ないし非類似度としても、最適解の 95% 信頼範囲を求めることはできる。Lorentz 距離を採用したのは、それが歪み量(対数歪み)とイコールだからである。最適解からの距離はすなわち誤差であるが、この誤差が歪み量で表されることほど歪み解析にふさわしいことはないではないか。  $d_{R_0}$  を距離とすることが妥当でないことは、次回論ずる。

ブートストラップ法は非パラメトリックな誤差推定法であるが、パラメトリックな方法については研究が十分進んでいない。パラメトリックな方法というのは、点の分布がある確率密度関数にしたがうと仮定して、その関数のグラフをデータに合うようにフィッティングし、平均やその推定誤差を計算する方法である。ブートストラップ誤差推定では、リサンプリングの回数に任意性があり、また、信頼範囲が不定形で結果を表示しにくい面がある。Fig. 8 でも、信頼範囲は凹凸のある多角形になっている。パラメトリックな方法では、どんな確率密度関数を使うかに任意性があるものの、算出される信頼範囲は扱いやすい。Yamaji (2005) は  $x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)}$  の Elliott プロットが二次元正規分布にしたがうと仮定して誤差推定を試みた。Yamaji (2008) はそれを微修正している。しかし、二次元正規分布はユークリッド平面上で定義された分布である。  $H^2$  からユークリッド平面への投影には、地図投影と同様に、歪みがつきものである。データ点のなすクラスターの広がり大きいほど、歪みの影響を受けるようになる。精度自体を精度よく決めるには、  $H^2$  上で定義される妥当な確率分布が必要なのである。統計学の分野でそれに使える確率密度関数が開発されつつあるので (Jones, 2004; Uesu et al., 2015), 遠からず Rf/φ 歪み解析でも、パラメトリックな誤差推定ができるようになるだろう。

## 5. 文献の紹介

双曲幾何学にかんする文献を紹介する。Reynolds (1993) は種々有用な概念を要領よく 14 ページで紹介している。和文では、中岡 (1993) の教科書がよい。球面幾何から説きおこし、大学 1 年の知識で理解できるように書いてある。この本では、  $H^2$  を双曲平面のアナロジーとする双曲面モデルを使って種々の定理を導いているので、歪み解析との関連で有用である。深谷 (2006) の教科書は、群論などより深い数学への導入を意図して書かれているので、本稿で紹介する内容を掘り下げるために役に立つ。双曲幾何学の総合的教科書としては Ratcliffe (2006) がある。

## 謝 辞

本稿は査読者の山崎和仁氏および担当編集委員の増田幸治氏からのコメントにより、読みやすいものとなった。この研究で科学研究費補助金(基盤研究(B)22340151)を使用した。記して感謝の意を表す。

## 文 献

- Elliott, D., 1970, Determination of finite strain and initial shape from deformed elliptical objects. *Geol. Soc. Amer. Bull.*, **81**, 2221–2236.
- 深谷賢治 (Fukaya, K.), 2004, 双曲幾何 (*Hyperbolic Geometry*)\*. 岩波書店 (Iwanami Shoten), 167p.
- Jones, M. C., 2004, The Möbius distribution on the disc. *Ann. Inst. Stat. Math.*, **56**, 733–742.
- 狩野謙一・村田明広 (Kano, K. and Murata, A.), 1998, 構造地質学 (*Structural Geology*). 朝倉書店 (Asakura Publ. Co.), 298p.
- 中岡 稔 (Nakaoka, M.), 1993, 双曲幾何学入門: 線形代数の応用 (*Introduction to Hyperbolic Geometry: Application of Linear Algebra*)\*. サイエンス社 (Saiensu-sha Co.), 224p.
- Potter, P. E. and Pettijohn, J. F., 1963, *Paleocurrents and Basin Analysis*. Springer, Berlin, 296p.
- Ramsay, J. G. 1967, *Folding and Fracturing of Rocks*. McGraw-Hill, New York, 568p.
- Ratcliffe, J. G., 2006, *Foundations of Hyperbolic Manifolds, 2nd Ed.* Springer, New York, 779p.
- Reynolds, W. F., 1993, Hyperbolic geometry on a hyperboloid. *Am. Math. Month.*, **100**, 442–455.
- 瀬野徹三 (Seno, T.), 1995, プレートテクトニクスの基礎 (*Foundations of Plate Tectonics*)\*. 朝倉書店 (Asakura Publ. Co.), 179p.
- Stillwell, J., 1996, *Sources of Hyperbolic Geometry*. Am. Math. Soc., Providence, 153p.
- 戸田盛和 (Toda, M.), 1989, ベクトル解析 (*Vector Analysis*)\*. 岩波書店 (Iwanami Shoten), 237p.
- Uesu, K., Shimizu, K. and SenGupta, A., 2015, A possibly asymmetric multivariate generalization of the Möbius distribution for directional data. *Jour. Multivariate Anal.*, **134**, 146–162.
- 汪 金芳・田栗正章 (Wang, J. and Taguri, M.), 2003, ブートストラップ法入門. 甘利俊一・竹内啓・竹村彰通・伊庭幸人編, 計算統計 I (*Computational Statistics, vol. 1*)\*, 岩波書店 (Iwanami Shoten), 1–64.
- Wheeler, J., 1986, Average properties of ellipsoidal fabrics: Implications for two- and three-dimensional methods of strain analysis. *Tectonophysics*, **126**, 259–270.
- Yamaji, A., 2005, Finite tectonic strain and its error, as estimated from elliptical objects with a class of initial preferred orientations. *Jour. Struct. Geol.*, **27**, 2030–2042.
- Yamaji, A., 2008, Theories of strain analysis from shape fabrics: A perspective using hyperbolic geometry. *Jour. Struct. Geol.*, **30**, 1451–1465.
- Yamaji, A., 2013, Comparison of methods of algebraic strain estimation from Rf/φ data: A unified theory of 2D strain analysis. *Jour. Struct. Geol.*, **49**, 4–12.
- 山路 敦 (Yamaji, A.), 2013, 最近の Rf/φ 歪み解析: 理論と実践. 地質雑 (*Jour. Geol. Soc. Japan*), **119**, 794–798.
- 山路 敦 (Yamaji, A.), 2016, 歪み解析と変形解析の数理: 1. 一様変形. 地質雑 (*Jour. Geol. Soc. Japan*), **122**, 275–286.
- [URL1] Yamaji, A., hStrain, <http://www.kueps.kyoto-u.ac.jp/~web-bs/tsg/software/hStrain/>.

\* English translation from the original written in Japanese.