微分トポロジー

黒田直樹

灘高等学校

1. 要旨

現代数学において多様体は幾何学における基本的な研究対象である.今回は,可微分多様体に関するJ.W. Milnorによる名著『Topology from the Differentiable Viewpoint』[Mil]に沿って,可微分多様体に関する定理をいくつか紹介する.

重要語句:微分トポロジー,多様体,接空間,ホモトピー,ベクトル場

2. 基礎知識

まず,これから使う記号や単語の定義を述べる.k次元ユークリッド空間を$\mathbb{R}^k$と表記する.

1変数関数を一般化する.$\mathbb{R}^n$の部分空間Aの任意の点$x\in A$に対して,$\mathbb{R}^m$の点$f(x)\in\mathbb{R}^m$を定める写像fを考える.この時,$\mathbb{R}^n$の元はn個の実数の組であり,$\mathbb{R}^m$の元はm個の実数の組であることから,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書ける.ここで,$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$である.以後はこの表記を用いることにする.

定義 2.1(偏微分).n変数関数$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$について,$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$が$f$の定義域の内点とする.(これから考える関数は定義域が開集合であることが多いので,この論文中では内点という条件はあまり考えなくても良い.)$1 \leqq k \leqq n$なる整数kについて,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h}$$

が存在するとき,fはaにおいてx_kについて偏微分可能であるという.この極限の値を偏微分係数といい,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad \frac{\partial}{\partial x_k} f(a), \quad f_{x_k}(a)$$

などと書く.fが領域Dの各点$x = (x_1, \ldots, x_n)$でx_kについて偏微分可能な時,領域D内の各点xにそこでの偏微分係数を対応させる関数をfのx_kに関する偏導関数といい,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} f, \quad f_{x_k}$$

などと書く.

定義 2.2(高階偏導関数).ある領域Dにおいて,n変数関数$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$を$x_1$に関して$m_1$回偏微分,$x_2$に関して$m_2$回偏微分,...,$x_n$に関して$m_n$回偏微分した関数を

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}}$$

と表す.ただし$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$である.

この定義で問題になるのは,偏微分の順序によって出来る関数が変わる可能性がある点だ.実は$f(x)$のm階までの全ての偏導関数が存在して連続であれば,導関数は偏微分の順序によらないということが知られている.

定義 2.3. $U \subset \mathbb{R}^n$と$V \subset \mathbb{R}^m$を開集合とする.UからVへの写像

$$f: U \to V$$

が全ての高階偏導関数が存在して連続である時,fはUで滑らかであるという.

定義 2.4. $X \subset \mathbb{R}^n$と$Y \subset \mathbb{R}^m$を任意の部分集合とし,

$$f: X \to Y$$

をXからYへの写像とする.任意の点$x\in X$に関して,その点xの近傍$U \subset \mathbb{R}^n$と,U上の滑らかな写像

$$F: U \to \mathbb{R}^m$$

が存在して,$U \cap X$ではfとFが一致するとき,写像fは滑らかであるという.

一般に定義2.3で滑らかな関数は定義2.4でも滑らかであることが分かる.

定義 2.5. $f: X \to Y$が全単射で,fもf^{-1}も滑らかであるときXとYは微分同相といい,fを微分同相写像と呼ぶ.

3. 多様体

今まで「滑らか」や「微分同相」という単語を定義して

内容に関する連絡先:
加藤　毅(京都大学理学研究科)
tkato@math.kyoto-u.ac.jp

きた．これらを使ってこの論文の研究対象「滑らかな多様体」の定義をする．

定義3.1. 部分空間$M\subset\mathbb{R}^k$について，任意のMの点xに対し，xの$\mathbb{R}^k$での開近傍Wと$\mathbb{R}^m$の開集合W'と，微分同相写像

$$g: W \xrightarrow{\cong} W'$$

が存在する時，Mはm次元の滑らかな多様体であるという．

記号が多く煩雑だが，結局Mの任意の点xの開近傍が$\mathbb{R}^m$の開集合と微分同相になるということである．この条件は非常に強く，この多様体について，様々な性質が成り立つことが（後にいろいろな定理によって）分かる．

例. $\mathbb{R}^k$は自明にk次元の滑らかな多様体である（恒等写像は定義3.1の条件を満たしていることが分かる.）

例.

$$S^k := \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \middle| x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_{k+1}{}^2 = 1\right\}$$

はk次元の滑らかな多様体になっている．実際$x_{k+1} > 0$なる点$x = (x_1, x_2, \cdots x_{k+1}) \in S^k$について，

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = \left(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1} - \sqrt{1-(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots x_k{}^2)}\right)$$

と定義すればこれは微分同相で，S^kとxの十分小さい開近傍の共通部分を，gが$\mathbb{R}^k$上に写すことが分かる．これを$x_i > 0$や$x_i < 0$についても同じことを考えることで，この空間がk次元の滑らかな多様体になっていることが分かる．

以後，この空間S^kをk次元球面と呼ぶことにする．

この多様体という概念を考える上で，陰関数定理というものがとても基本的になるので紹介する．

定理 3.2（陰関数定理）．開集合$U\subset\mathbb{R}^{k+1}$で定義され実数値をとる関数fの任意の1階偏導関数が存在して連続であるとし（以下この条件をC^1級であると呼ぶ），$(a_1,a_2,\cdots,a_k,b)\in U$において

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_k, b) = 0,\ \ f_{x_{k+1}}(a_1, a_2, \cdots, a_k, b) \neq 0$$

ならば，$(a_1,a_2,\cdots,a_k)$の$\mathbb{R}^k$での開近傍Wとbの$\mathbb{R}$での開近傍I，さらに偏微分可能な写像

$$g: W \to I$$

であって，

(1) $b = g(a_1,a_2,\cdots,a_k)$

(2) $f(x_1, x_2,\cdots, x_k, g(x)) = 0$

をみたすものが存在する．

さらにfが滑らかであればgも滑らかになるようにとれる．

この定理については引用にとどめておく．

この定理を具体的に使ってみよう．例えば

$$M := \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \middle| f(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = 0\right\}$$

という集合を考える．ただしfは滑らかだとする．この時，$(a_1,a_2,\cdots,a_k,b)\in M$について上の条件が成り立っていれば，$g(x)$を上のように定義し，

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) := (x_1, x_2, \cdots, x_{k+1} - g(x_1, x_2, \cdots, x_k))$$

とすると，$g(x)$, $h(x)$が滑らかになることが確認できる．また

$$h^{-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}) = (x_1, x_2, \cdots, x_{k+1} + g(x_1, x_2, \cdots, x_k))$$

であり，$h^{-1}(x)$も滑らかになっている． 以上より$h(x)$は微分同相で，この関数によって$(a_1,a_2,\cdots,a_k,b)$のMでの開近傍を$\mathbb{R}^k$の開集合に写すことが分かるので，Mはk次元の滑らかな多様体になる．上の例は部分空間としてはとても基本的なものだが，そのようなものは全て多様体の条件を満たしている．このことから，この多様体という定義は一見すると不思議だが，実はとても巧妙に出来ていることが分かるのではないだろうか．

一般に，滑らかな多様体$M \in \mathbb{R}^k$について，各点の近傍でm次元ユークリッド平面と微分同相なことから，接空間というものが定義できる．

定義3.3. 滑らかな多様体$M \subset \mathbb{R}^k$とMの任意の点xについて，滑らかな多様体という条件から，開集合$U\subset\mathbb{R}^m$が存在して，

$$g: U \to W \cap M$$

（これをパラメータづけなどと呼ぶ）となるような微分同相写像gとxの$\mathbb{R}^k$での開近傍Wが取れる．これに対して，

$$dg_u(h) := \lim_{t\to\infty} \frac{g(u+th) - g(u)}{t}$$

なるものを考える．但し$g(u) = x$とする．この時

$$TM_x := dg_u(\mathbb{R}^m)$$

をMのxでの接空間と定義する．

まず初めに，TM_xがベクトル空間になることを示す，そのためには，dg_uが線形写像であることを示せば良い．それは

$$\begin{aligned} dg_u(h+h') &= \lim_{t\to 0} \frac{g(u+th'+th) - g(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{g(u+th+th') - g(u+th)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{g(u+th) - g(u)}{t} \\ &= dg_u(h') + dg_u(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dg_u(ah) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(u+ath) - g(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{g(u+th) - g(u)}{\frac{t}{a}} = a\, dg_u(h) \end{aligned}$$

から言える．

次にこの接空間TM_xが一意に定まることを示す．そのためには別のパラメータづけ$h: V \to M \subset \mathbb{R}^k$があった時に，$TM_x$が同じものになることを示せばよい. 必要に応じて近傍を取り直して，uの開近傍U_1，vの開近傍V_1（但し

$h(v) = x$である)，xの$\mathbb{R}^k$での開近傍Wが取れて，

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h^{-1}\circ g"'] & V_1 \arrow[dl, "h"] \\ W \cap M & \end{tikzcd}$$

という可換図式が作れる（但し$g,h,h^{-1}\circ g$はいずれも微分同相となる）．これから自然に

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "dg_u"] \arrow[d, "d(h^{-1}\circ g)_u"'] & \mathbb{R}^m \arrow[dl, "dh_v"] \\ \mathbb{R}^k & \end{tikzcd}$$

という可換図式ができる．$h^{-1}\circ g$は微分同相写像なので，その微分$d(h^{-1}\circ)_u$は同型写像となるので．$dg_u(\mathbb{R}^m) = dh_v(\mathbb{R}^m)$が言える．よって$TM_x$がwell-definedとなることが分かった．

次にTM_xがm次元のベクトル空間であることを示す．これは簡単で，

$$g^{-1}: W \cap M \to U$$

について同様に微分を考えることで，

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "dg_u"] \arrow[d, "d(g^{-1}\circ g)_u"'] & \mathbb{R}^k \arrow[dl, "d(g^{-1})_x"] \\ \mathbb{R}^m & \end{tikzcd}$$

という可換図式が作れる．$d(g^{-1}\circ g)_u$という写像が恒等写像であることから，dg_uは退化することなく，rankがmになる． これからTM_xがm次元ベクトル空間になることが分かる．

この接空間という概念を用いて，多様体と多様体の間の滑らかな写像について微分写像を定義する．

定義3.4. 2つの滑らかな多様体$M \subset \mathbb{R}^k$，$N \subset \mathbb{R}^l$の滑らかな写像

$$f: M \to N$$

を考え，$f(x) = y$とする．fは滑らかなのでxを含む$\mathbb{R}^k$の開集合Wと，$W \cap M$上でfと一致する滑らかな写像

$$F: W \to \mathbb{R}^l$$

がある．この関数については$dF_x(v)$が定義出来るが，TM_xの元vに対して

$$df_x(v) := dF_x(v)$$

とすることで，fのxにおける微分写像$f: TM_x \to TN_y$を定める．

この定義が意味をなすことを確認するためには，$dF_x(TM_x) \subset TN_y$が成り立つことと，df_xがFによらないことを示さなければならない．M，Nについてパラメータ付け

$$g: U \to M \in \mathbb{R}^k, \qquad h: V \to N \in \mathbb{R}^l$$

をとる（但しU,Vは$\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n$の開集合，$g(U)$, $h(V)$はそれぞれx, yの開近傍）．

Uを小さく取り直して，$g(U) \in W$かつ$f(g(U)) \in h(V)$とすることにより，

$$h^{-1} \circ f \circ g: U \to V$$

が滑らかな写像として定義できる．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h^{-1}\circ f\circ g"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "h"] \\ W \arrow[r, "F"'] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

という可換図式について，微分写像をとることで，

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "d(h^{-1}\circ f\circ g)_u"] \arrow[d, "dg_u"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "dh_v"] \\ \mathbb{R}^k \arrow[r, "dF_x"'] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

が得られる．$TM_x = dg_u(\mathbb{R}^m), TN_y = dh_v(\mathbb{R}^n)$であることから，この可換図式より$dF_x(TM_x) \subset TN_y$が言える．

また，この可換図式から，$df_x = dh_v \circ d(h^{-1}\circ f\circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}$が言えるので，結局$df_x$は$F$の取り方によらないことが分かる．よってこれらより$df_x$は矛盾なく定義できることが分かる．

命題3.5. 2つの多様体の間の滑らかな写像$f: M \subset \mathbb{R}^k \to N \subset \mathbb{R}^l$, $g: N \subset \mathbb{R}^l \to P \subset \mathbb{R}^m$と$f(x) = y$について，

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$$

が成り立つ．

証明．定義3.4.の条件を満たすようなxを含む開集合W，yを含む開集合Vと，滑らかな写像

$$F: W \to \mathbb{R}^l \quad G: V \to \mathbb{R}^m$$

が存在する．この時明らかに$y = F(x)$，また明らかに

$$G \circ F: W \to \mathbb{R}^m$$

は$g \circ f$と，$W \cap M$上で一致する滑らかな写像になっている．ここで，

$$\begin{aligned} d(G \circ F)_x(h) &= \lim_{t \to 0} \frac{G(F(x+th)) - G(F(x))}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{G\left(F(x) + t \cdot \frac{F(x+th) - F(x)}{t}\right) - G(F(x))}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{G(y + tdF_x(h)) - G(y)}{t} \\ &= dG_y \circ dF_x(h) \end{aligned}$$

となり，これと$d(g\circ f)_x$，dg_y，df_xはそれぞれ$d(G\circ F)_x$，dG_y，dF_xを制限したものであるから，これより$d(g\circ f)_x =$

$dg_y \circ df_x$を得る．■

この微分写像を使った定理3.2.の一般化バージョンがある．それを紹介する．

定理3.6. 滑らかな関数$f : \mathbb{R}^{k+p} \to \mathbb{R}^p$について，$f(a_1, a_2, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots, b_p) = 0$で，$(a_1, a_2, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots, b_p)$での$f$の微分写像が非退化ならば，$(a_1, a_2, \cdots, a_k)$の$\mathbb{R}^k$での開近傍$W$と$(b_1, b_2, \cdots b_p)$の$\mathbb{R}^p$での開近傍$I$，さらに滑らかな写像

$$g : W \to I$$

であって，

(1) $(b_1, b_2, \cdots b_p) = g(a_1, a_2, \cdots, a_k)$

(2) $f(x_1, x_2, \cdots, x_k, g(x)) = 0$

をみたすものが存在する．

この定理によって，逆関数定理という重要な定理を示すことが出来る．

定理3.7. 開集合$U \subset \mathbb{R}^k$を$\mathbb{R}^k$の中に写す滑らかな写像fと，$a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in U$があって，$df_a$が非退化であるとする．この時，$b = (b_1, b_2, \cdots, b_k) = f(a)$とすると，$a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$の$\mathbb{R}^k$での開近傍$W$と$b$の$\mathbb{R}^k$での開近傍$I$があって，$f$は$W$を$I$の上に一対一に写す．

証明. $x \in U$と$y \in \mathbb{R}^k$について，

$$F(x, y) = f(x) - y$$

を考える．この写像は滑らかで，df_aが非退化であることから$dF_{(a,b)}$は非退化なので，定理3.6を用いて，

$$a = g(b), F(g(y), y) = 0$$

なる滑らかな写像$g : I \to V$が存在する．ここでIはbの開近傍，Vはaの開近傍である．必要に応じて近傍を小さくとることによって$W \subset U$とすることが出来る．$F(g(y), y) = 0$と$F(x,y) = f(x) - y$から，$f(g(y)) = y$を得る．これより，fは$g(I)$をIの上に一対一に写す．$g(I)$は開集合の連続写像による像なので開集合であり，aを含んでいるから，$W = g(I)$とすると，Wはaの$\mathbb{R}^k$での開近傍となり，これは条件を満たしている．■

定義3.8. 2つの滑らかなm次元多様体$M \subset \mathbb{R}^k$，n次元の多様体$N \subset \mathbb{R}^l$の間の滑らかな写像

$$f : M \to N$$

について，

$$df_x : TM_x \to TN_y$$

のランクがnより小さくなってしまう（*i.e.* $df_x(TM_x)$の次元がn以下）ような点$x \in M$の集合をCとおき，その元を臨界点，$f(C)$の元を臨界値という．その補集合$N \setminus f(C)$内の点を正則値と呼ぶ．

いままでに示したことを用いて，以下の定理が示せる．

定理3.9. $f : M \to N$が次元$m \geqq n$の滑らかな多様体の間の滑らかな写像で，$y \in N$が正則値ならば，集合$f^{-1}(y) \in M$は$m - n$次元の滑らかな多様体．

証明. $x \in f^{-1}(y)$をとる．yは正則値なので，$df_x : TM_x \to TN_y$のランクはn，よってこの写像の核集合$X \subset TM_x$は$(m - n)$次元のベクトル空間になる．よってこの集合Xを$\mathbb{R}^{m-n}$に写すような線形写像で，Xの直交補空間$X^{\perp}$を0に写すような$L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-n}$をとる．但し$M \in \mathbb{R}^k$とする．

この時，

$$F : M \to N \times \mathbb{R}^{m-n}$$

を，$F(u) := (f(u), L(u))$として定める．

この時明らかに$dF_x(u) = (df_x(u), dL_x(u))$となるが，$L$は線形写像なので，

$$dL_x(u) = \lim_{t \to \infty} \frac{L(x + tu) - L(x)}{t} = \lim_{t \to \infty} L(u) = L(u)$$

となることから，$dF_x(u) = (df_x(u), L(u))$となる．$df_x, L$はともに非退化なので，$dF_x$も非退化となることが分かる．$N \times \mathbb{R}^{m-n}$は$n + (m - n) = m$次元の滑らかな多様体になることから，$F$は同じ次元の滑らかな多様体の間の滑らかな写像になる．

よって定理3.7を用いることで，Fはxのある近傍Uを$(y, L(x))$のある近傍Vに微分同相に写すことが分かる．

$F(f^{-1}(y)) = y \times \mathbb{R}^{m-n}$と上記のことから，$F$は$f^{-1}(y) \cap U$を$(y \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$に微分同相に写すことが分かる．$x$は$f^{-1}(y)$の任意の点で，$U$は$x$の近傍であることを踏まえると，この性質は$f^{-1}(y)$が$m - n$次の滑らかな多様体であることを言っている．■

この定理の系として，次のことが言える．

系3.10. $f : M \to N$が同じ次元の多様体の間の滑らかな写像でMがコンパクトでyがNの正則値ならば，$f^{-1}(y)$は有限集合になる．

証明. 定理3.9より$f^{-1}(y)$は0次元多様体になる．0次元多様体は，任意の点に対して，その近傍と多様体の共通部分がその点だけになることから，離散集合になることが分かる．$f^{-1}(y)$はコンパクト集合Mの部分集合で，fの連続性とyが一点からなる閉集合であることから，$f^{-1}(y)$は閉集合となる．以上より，コンパクトの部分閉集合はコンパクトなので，$f^{-1}(y)$がコンパクトになることが分かる．コンパクトな離散集合は有限集合なので，$f^{-1}(y)$は有限集合　■

これにより$f^{-1}(y)$の点の数というものが定義できる．これを$\sharp f^{-1}(y)$で表すことにする．

この系と逆関数の定理により，fが$x \in f^{-1}(y)$のMでの近傍をyのNでの近傍に微分同相に写すことが分かり，yの近傍Vをできるだけ小さくとることによって，任意の$y' \in V$に対して$\sharp f^{-1}(y) = \sharp f^{-1}(y')$となるようにとれる．つまり$\sharp f^{-1}(y)$は局所定数関数であることが分かる．

最後に，臨界値について，一つ有名な定理を紹介する．

定理3.11（サードの定理）$f : U \to \mathbb{R}^p$が滑らかな写像，Uが$\mathbb{R}^n$の開集合，

$$C := \{\, x \in U \mid rank\ df_x < p \,\}$$

とするとき，$f(C) \in \mathbb{R}^p$ は測度0である．

$D \in \mathbb{R}^n$ が測度0というのは，任意の正の実数ϵに対して，$\mathbb{R}^n$での和がϵを超えないような直方体の列でDを被覆することができるということである．空でない開集合は測度0になりえないことから，臨界値の集合は空でない開集合を含むことはない．

この事実を多様体についてに拡張する．$f: M \to N$が次元$m \geqq n$の滑らかな多様体の間の滑らかな写像とすると，Mが$\mathbb{R}^m$の開部分集合に微分同相な近傍の可算個の集まりで被覆できるので，サードの定理を用いて次の系を得る．

系3.12. 滑らかな写像$f: M \to N$の正則値の集合は，Nで至るところ稠密である．

また，任意の空でないNの開集合は正則値を持つ．これと$\sharp f^{-1}(x)$はxが正則値を動く時，連続的に変化していくので，これが整数値をとることから．整数値をとる連続関数ということで，任意の正則値xによらず$\sharp f^{-1}(x)$が一定であることが分かる．この性質は後々諸定理を証明するうえで用いる．

4. ブラウエルの不動点定理

この章では多様体を使って，有名なブラウエルの不動点定理を示すことを目標にする．

まず始めに，

$$H^m = \{(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x \geqq 0\}$$

を上半平面といい，境界∂H^mを$\mathbb{R}^{m-1} \times 0 \in \mathbb{R}^m$として定義する．

定義4.1. 集合$M \subset \mathbb{R}^k$が境界をもつ滑らかなm次元多様体とは，次の条件を満たすものを言う．

Mの任意の点xに対し，その開近傍$U \subset \mathbb{R}^k : x$と$\mathbb{R}^m$の開集合$V$が存在して，$U \cap M$と$V \cap H^m$が微分同相

この時∂H^mの点に対応するMの点全体が作る集合を∂Mと書き，Mの境界という．

$$g(x_1, x_2, \cdots x_{m-1}, x_m) = (x_1, x_2, \cdots x_{m-1}, e^{x_m})$$

によって$\mathbb{R}^m$と$H^m \setminus \partial H^m$の間の微分同相が作れるので，これより前セクションまでで用いた多様体が，この定義より，境界のない多様体となることが分かる．∂H^mが局所的に$\mathbb{R}^{m-1}$と微分同相で，しかも$H^m \setminus \partial H^m$が局所的に$\mathbb{R}^m$と微分同相になることから，$\partial M$が$m-1$次元の，$M \setminus \partial M$が$m$次元の滑らかな多様体に，それぞれなることが分かる．

この境界付き多様体について，3章の最後で示した定理と似たようなことが成り立つ．

定理4.2. $f: M \to N$が次元$m \geqq n$の境界をもつ多様体からもたない多様体の間の滑らかな写像で，$y \in N$がfと$f|\partial M$の双方について正則値ならば，集合$f^{-1}(y) \in M$は$m-n$次元の境界のある滑らかな多様体で，$\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial M$となる．

証明. $x \in f^{-1}(y)$とyについて局所的に部分のみ考えれば良いので，x, yの各近傍を微分同相写像で適当に写すことによって，$M = H^m, Y = \mathbb{R}^n$として良い．

xがH^mの内部の点ならば，定理3.6よりxの近傍で滑らかな$m-n$次元の滑らかな多様体になるので良い．xが境界上にあるとする．xの$\mathbb{R}^m$での近傍Uと

$$g: U \to \mathbb{R}^n$$

で，$U \cap H^m$上ではfと一致するようなものをとる．Uを出来るだけ小さくとることによって，U上に臨界点を持たないとして良い．この時yはgでも正則値になるので，Uが$\mathbb{R}^m$の開集合であることからm次元の滑らかな多様体になるので，$g^{-1}(y)$は$m-n$次元の滑らかな多様体になる．

$\pi: g^{-1}(y) \to \mathbb{R}$を

$$\pi(x_1, x_2, \cdots, x_m) := x_m$$

と定義すると，$x \in g^{-1}(y) \cap \pi^{-1}(0)$について，

$$dg_x = df_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

の核空間が$Tg^{-1}(y)_x$となる．xは$f|\partial H^m$で臨界点ではないので，$Tg^{-1}(y)_x \in \partial H^m$ということは起こりえない．$\pi$は線形写像なので$d\pi_x = \pi$であることから

$$d\pi_x(Tg^{-1}(y)_x) = \pi(Tg^{-1}(y)_x) \neq 0$$

より，$d\pi_x(Tg^{-1}(y)_x)$はベクトル空間で$\mathbb{R}$に含まれてることから，これは$d\pi_x(Tg^{-1}(y)_x) = \mathbb{R}$を指し示している．

故に$\pi: g^{-1}(y) \to \mathbb{R}$は0を正則値にしていることが分かる．定理3.6.で$N = \mathbb{R}$のケースを考えることで，$F^{-1}(\mathbb{R}_{\geqq 0}) = H^m$が成り立つ．この事実を$\pi$について用いることで，$\pi^{-1}(\mathbb{R}_{\geqq 0})$は$\pi^{-1}(0)$を境界とする滑らかな多様体になることが分かる．これより，$\pi(x) \geqq 0$を満たす点の集合$g^{-1}(y) \cap H^m = f^{-1}(y) \cap U$は境界をもつ滑らかな多様体になり，境界は$(f^{-1}(y) \cap U) \cap \partial H^m$となり，これより示された．■

この定理を用いて，ブラウエルの不動点定理の鍵となる補題を示す．

補題 4.3. コンパクトで境界をもつ滑らかな多様体Xについて，∂X上では恒等写像になるような滑らかな写像$f: X \to \partial X$は存在しない．

証明. 条件を満たすようなfがあったとする．$y \in \partial X$をfの正則値とする．yは恒等写像$f|\partial X$に対しても正則値なので，定理4.2が使える．Xと∂Xの次元の差は1なので，$f^{-1}(y)$は滑らかな境界のある多様体になり，境界は$f^{-1}(y) \cap \partial X = y$となり，ただ1点となる．

ところが$f^{-1}(y)$はコンパクト空間Xの部分空間で，閉集合yの連続写像による逆像なので閉集合．よって$f^{-1}(y)$はコンパクトになる．コンパクトな1次元の滑らかな多様体は有限個の円と線分の非交和になることが知られている．ここで円の境界は空集合で線分の境界は2点でできてるので，$f^{-1}(y)$の境界は偶数個の点からなることが分かり 矛盾が示され．以上からこのようなfは存在しない．■

以後は，単位円板

$$D^n := \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, {x_1}^2 + \cdots {x_n}^2 \leqq 1 \right\}$$

について考える．これはS^{n-1}を境界とするn次元のコンパクト多様体になっていることに注意する．

補題4.4. 任意の滑らかな写像$g : D^n \to D^n$は不動点，つまり，$g(x) = x$をみたす$x \in D^n$を持つ．

証明. gが不動点を持たないとする．$x \in D^n$に対し，$x \neq g(x)$なので，xに対しxと$g(x)$を通る直線とS^{n-1}との交点でxに近い方の点に写す写像を$f : D^n \to S^{n-1}$とする．この時fは滑らかになり，xがS^{n-1}上にある時は$f(x) = x$となる．しかしこれは補題4.3と矛盾している．よってこのようなgは存在しない．■

これらを用いて，ブラウエルの不動点定理を示す．

定理4.5（ブラウエルの不動点定理）．任意の連続写像$G : D^n \to D^n$は不動点を持つ．

証明. 不動点を持たない連続写像Gが存在したとする．$F : D^n \to \mathbb{R}$を$F(x) = ||G(x) - x||$で定義すると，D^nはコンパクトかつ連結でFは連続なので，$F(D^n)$は閉区間になる．$x \neq G(x)$より$F(x) > 0$なので$F(x)$は最小値$2\epsilon > 0$を持つ．

ワイエルシュトラスの多項式近似定理より，多項式関数$P_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$であって$||P_1(x) - G(x)|| < \epsilon$を満たすものが存在する．

$$P(x) := \frac{P_1(x)}{1 + \epsilon}$$

とすると，$x \in D^n$ならば$||P(x)|| \leqq 1$が成り立つので，$P : D^n \to D^n$で，

$$||P(x) - G(x)|| \leqq \left|\left| \frac{P_1(x)}{1 + \epsilon} - P_1(x) \right|\right| + ||P_1(x) - G(x)|| < 2\epsilon$$

これと$||G(x) - x|| \geqq 2\epsilon$より，$P(x) \neq x$が任意の$x \in D^n$で成り立つ．しかし多項式関数は滑らかであり，これが不動点を持たないことになり，補題4.4に矛盾する．よって不動点を持つ連続写像Gは存在しない．■

5. ブラウエル次数

この章では，ブラウエル次数と呼ばれるものを定義し，それが持っている良い性質を使って，「地球には風が吹かない場所がある」という，一見奇妙な定理を示すことを目的とする．

まずブラウエル次数を考える前に，一般にベクトル空間について向きというものを考えられるので，それについて定義をする．

定義5.1. あるn次元ベクトル空間Vに二つの順序づけられた基底
$(a_1, a_2, \cdots a_n), (b_1, b_2, \cdots b_n)$があったとする．基底という条件から$b_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_j$ なる実数の組$c_{i,j}$ $(1 \leqq i,j \leqq n)$が一意に存在する．

これによって出来るn次正方行列$c_i j$の行列式が正の時，$(a_1, a_2, \cdots a_n), (b_1, b_2, \cdots b_n)$は同じ向きであるといい，行列式の値が負の時（0になることが起こりえないことは基底の条件からすぐに分かる），
$(a_1, a_2, \cdots a_n), (b_1, b_2, \cdots b_n)$は反対の向きであるという．

$\mathbb{R}^n$について，便宜上$((1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots),\cdots,(0,\cdots 0,1))$と同じ向きの基底を正の向きの基底と呼ぶ．

次に，ブラウエル次数を考える上で欠かせない「向きづけ可能な多様体」というものを定義する．この向きづけ可能という概念は一般に考えられるが，今回は$\mathbb{R}^{n+1}$内のn次元多様体についてこの概念を定義する．

定義5.2. $\mathbb{R}^{n+1}$内のn次元多様体Mについて，連続なベクトル値写像$f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$があって，任意の$x \in M$について，$f(x) \neq 0$かつ，$f(x)$が$TM_x$と直交するものが存在するとき．$M$は向きづけ可能な多様体という．

このようにしてMの各点に対して，基準となるTM_xの法線ベクトルが定義できた．TM_xの基底となるn個のベクトルであって，今基準にした法線ベクトルと合わせて出来る$\mathbb{R}^{n+1}$の基底が正になるようになものを，TM_xの正の向きの基底とする．このようにしてTM_xの正の向きの基底というものができた．

イメージ的にはMには表裏がちゃんとある，というのが向きづけ可能多様体の定義である．

向きづけ可能な多様体Mについて，各$x \in M$に対しTM_xで正の向きの基底を定めたもの，もしくは各$x \in M$に対しTM_xで正の向きの基底を定めたものを，向きづけられた滑らかな多様体と呼ぶ．

例. (1) S^nは向き付け可能である．実際$f(x) = x$とすれば明らかに連続で，TM_xと$f(x)$は明らかに直交するので条件を満たすことが分かる．

(2) メビウスの帯は滑らかな多様体であるが向き付け不可能である．実際メビウスの帯にはセンターラインと呼ばれる閉曲線があるが，法線ベクトルを連続に動かしてセンターラインを一周させると，同じ点で法線ベクトルが逆向きになることになるのがメビウスの帯の性質より分かる．これは条件を満たす関数fが存在しないことを示しているので，これによりメビウスの帯は向きづけ不可能であることが分かる．

$\mathbb{R}^{n+1}$内の向きづけ可能なn次元多様体Mから，$n-1$次の多様体∂Mでの向きを次のように定める．TM_xがn次元の，$T(\partial M)_x$が$n-1$次元のベクトル空間であることから，$x \in \partial M$について，TM_xの正の向きの基底$(v_1, v_2, \cdots v_n)$であって，$(v_2, \cdots, v_n)$が$T(\partial M)_x$の基底で，v_1が，$T(\partial M)_x$からMと逆側，つまりv_1が「外向き」のベクトルとなるようなものをとってきたときに，$(v_2, \cdots, v_n)$を$x \in \partial M$での正の向きの基底とすることにする．

例えば，S^{n-1}は円板D^nの境界なので，上記の方法で向きづけすることが可能である．

さて，これでブラウエル次数というものを考えることができる．

定義5.3. M, Nが$\mathbb{R}^{n+1}$内の境界のない向きづけられたn次元多様体とし，

$$f: M \to N$$

を滑らかな写像とする．MがコンパクトでNが連結ならば，fの次数を以下のように定義する．

$x \in M$をfの正則点としたとき，$df_x : TM_x \to TN_{f(x)}$は同型な線形写像になる．上で定義した正の向きの基底を正の向きの基底に写すか負の向きの基底に写すかによって，df_xの符号 sign df_xを +1 または –1 と定義する．この時正則値$y \in N$に対して

$$\deg\,(f;y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{sign}\, df_x$$

とする．

このようにして次数を定義したとき，逆関数定理より$x \in f^{-1}(y)$のMでの近傍をyのNでの近傍に微分同相に写すことから，sign df_xは局所的に定数になる．これより deg $(f;y)$ もyの局所定数関数となる．以下M, Nは上のような性質が成り立っているとする．

この次数というものについていろいろな性質が成り立つ．それを示すための補題を示す．

補題5.4. Xを向きづけ可能なコンパクト多様体とし，境界MがXによって向きが定まっているとする．この時$f: M \to N$が滑らかな写像$F: X \to N$に拡張されるならば，任意の正則値yに対し deg $(f;y) = 0$ となる．

証明．まずyをf,F双方の正則値とする．この時$F^{-1}(y)$はコンパクトな1次元多様体になるため，有限個の線分と円の非交和になる．また境界は線分の時のみ存在し，その境界点は$M = \partial X$上にある．$A \subset F^{-1}(y)$をこのような線分の1つとし$\partial A = \{a,b\}$とする．

この時$x \in A$について，$(v_1,\cdots,v_{n+1})$をTX_xの正の向きの基底で，$(v_2,\cdots,v_{n+1})$がdF_xによってTN_yをTN_yの正の向きの基底に写すようなものをとる．このようにして$v_1(x)$をxのAの正の向きの接ベクトルと定める．必要に応じて定数倍することによって$v_1(x)$は単位ベクトルとしてよい．この時v_1は滑らかな関数になっている．従って，aとbでは接ベクトルはそれぞれ内向きと外向きの関係になっている．

以上よりa，bでのfの符号は +1 と –1 が一つずつになり，sign df_a+sign $df_b = 0$ を得る．このような弧すべてについて次数を足し合わせることで, deg $(f;y) = 0$ を得る．■

次に，ホモトピー，イソトピーというものを定義する．

定義5.5. 2つの写像$f, g: X \to Y$について，滑らかな写像$F: X \times [0,1] \to Y$で,

$$F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x)$$

となるものが存在するとき, f, gが滑らかにホモトピックであるといい，この写像Fをf, gの間の滑らかなホモトピーという．

定義5.6. 滑らかにホモトピックな微分同相写像f,gで, その間の滑らかなホモトピー$F: X \times [0,1] \to Y$について，$f_t : x \mapsto F(x,t)$がXをYの上に微分同相に写すということが成り立っている時，f,gが滑らかにイソトピックであるといい，この写像Fを，fとgの間の滑らかなイソトピーという．

特にホモトピックという概念はとても重要である．これについて次の補題が成り立つ．

補題5.7. 2つの写像$f,g: M \to N$に滑らかなホモトピー$F: M \times [0,1] \to N$があった時，どんな共通の正則値yに対しても，deg $(f;y)$ = deg $(g;y)$が成り立つ．

証明. Mは境界のない向きづけ可能な多様体なので，$[0,1]\times M$は滑らかな多様体になり，境界は$0\times M$，$1\times M$となる．

この時$0\times M$と$1\times M$でのMから「外向き」のベクトルは丁度逆方向を向いており，$F|\partial([0,1]\times M)$の次数は，deg $(f;y)$とdeg $(g;y)$の差になる．補題5,2よりこれが0だったので，deg $(f;y)$ = deg $(g;y)$を得る．■

最後に，一つ補題を紹介する．

補題5.8.（均質性補題）滑らかで連結な多様体Nの内部の任意の点y,zについて，恒等写像と滑らかにイソトピックで，yをzに写す微分同相写像$h: N \to N$が存在する．

これらの補題をもちいて，次の大きな定理を示す．

定理5.9. 滑らかな写像$f: M \to N$について，deg $(f;y)$は正則値yの選び方によらない．

証明. y,zをNの正則値とする．この時均質性補題よりyをzに写すような恒等写像と滑らかにイソトピックな微分同相写像$h: N \to N$がある．この時，$h \circ f: M \to N$と$f: M \to N$を比較して，恒等写像と滑らかにイソトピックな微分同相写像は逆像の数や向きを変えないことから，

$$\deg\,(f;y) = \deg\,(h \circ f; h(y))$$

を得る．またfは$h \circ f$とホモトピックなので，

$$\deg\,(h \circ f; z) = \deg\,(f;z)$$

より，deg $(f;y)$ = deg $(f;z)$を得る．■

これにより次数は正則値によらないので，deg fと表すことにする． この時次のこともわかる．

定理5.10. 滑らかな写像$f,g: M \to N$について，fとgが滑らかにホモトピックならばdeg f = deg gになる．

証明は補題5.7と定理5.10により明らかである．

命題5.11. 滑らかな写像$f,g: M \to N$と$f,g: N \to P$について，deg $g \circ f$ = deg $g \circ$ deg fが成り立つ．

これは，向きを保たない写像の合成は向きを保つようになること（これにより$-1 \times -1 = 1$となり式を満たす）と, $g^{-1}(y)$の元についての次数を考えると明らかである．

S^nは向きづけ可能なコンパクトで連結な多様体なので，これまでの結果を，$f: S^n \to S^n$に応用することができる．以下これについて考える．

まず始めに対蹠写像を考える．鏡映

$$r_i(x_1,\cdots,x_{n+1}) = (x_1,\cdots,-x_i,\cdots,x_{n+1})$$

を考える．これは全単射なので，任意の$y \in S^n$について

$f^{-1}(y)$の元の数は丁度1である．また鏡映という性質から正の向きの基底は，負の向きの基底に写す.これから $\deg r_i = -1$となる．これと

$$-x = r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_{n+1}$$

より，対蹠写像の次数は-1^{n+1}と表される．これよりnが偶数ならば，対蹠写像は恒等写像と滑らかにホモトピックではないことが分かる.

次に，多様体上のベクトル場というものを定義する.

定義5.12. 多様体$M \subset \mathbb{R}^k$上について，滑らかな写像$v: M \to \mathbb{R}^k$で，任意の点$x \in M$に対して，$v(x) \in TM_x$となるものを，M上の滑らかなベクトル場という.

$M = S^n$の時は, $v(x) \in TM_x$が $v(x) \cdot x = 0$という条件と同値になることに注意する．イメージ的には，S^nの表面上に，連続的に風が吹いていると考えるのがよいだろう.

これについて，次の定理を示す.

定理5.13. nが偶数ならば，S^n上に，どの点も0ベクトルに写さないようなベクトル場は存在しない.

証明. そのようなベクトル場$v(x)$があったと仮定する. $v(x) \neq 0$より, 必要に応じてベクトル場 $w(x) = \frac{v(x)}{||v(x)||}$を考えることで，滑らかという条件を残したまま$v(x) \cdot v(x) = 1$という条件を加えてもよい.

次に滑らかなホモトピー

$$F: S^n \times [0,1] \to S^n$$

を，$F(x,\theta) = x\cos\pi\theta + v(x)\sin\pi\theta$という式によって定義すると,

$$F(x,\theta) \cdot F(x,\theta) = x \cdot x\cos^2 \pi\theta + v(x) \cdot v(x)\sin^2 \pi\theta = 1$$

より$F(x,\theta) \in S^n$となるので，この関数はちゃんと滑らかなホモトピーになっている．また，$F(x,0) = x, F(x,1) = -x$より，これから対蹠写像は恒等写像と滑らかにホモトピックになっていることになるが，nは偶数なのでこれは起こりえない． よって矛盾が示された．■

この結果を$n = 2$に用いると, S^2は地球の表面ととらえられるので，風を滑らかなベクトル場とみることで「地球上に風が吹かない場所がある」という面白い定理が得られる.

またnが奇数の時はS^n上に必ず0にならない接ベクトル場がある．実際，$n = 2k - 1$とすると

$$v(x_1, \cdots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, \cdots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

とすることで，滑らかな接ベクトル場になっており，かつ0をとるような$(x_1,\cdots,x_2k) \in S^{2k-1}$は存在しないので，これは条件を満たすものになっていることが分かる.

さらに定理5.11の途中までの結果を奇数nと上の関数$v(x)$について用いることで，nが奇数になるとき，S^nの対蹠写像は恒等写像に滑らかにホモトピックになることが分かる.

6. あとがき

いくつかの可微分多様体に関する興味深い結果を示すことが出来た．ELCASではこれらに加え, ホップの定理と呼ばれるものをコボルディズムと呼ばれる同値関係によって示したが, 紙面の都合上本論文はここまでとする．興味のある方は[Mil]の6章以降を読むと良いだろう.

謝辞

この論文を作成するにあたり, 京都大学大学院理学研究科の加藤毅教授から, 丁寧なご指導を頂きました．ここに感謝の意を表します.

参考文献

[Mil] J.W. Milnor, “*Topology from the differentiable viewpoint*”, Princeton University Press, 1962.

Differential Topology

Naoki Kuroda

Nada High School

Abstract

Studies of manifolds are quite active among geometry fields of modern mathematics. Our goal is to verify basic theorems on structure of differentiable manifolds and vector fields on the surface of a sphere, following the modern classic “Topology from the Differentiable Viewpoint” by J.W. Milnor.

Key words: differential topology, manifold, tangent space, homotopy, vector field

Corresponding Researcher:
Tsuyoshi Kato (tkato@math.kyoto-u.ac.jp)
Graduate School of Science, Kyoto University