

# 個別要素法による2次元砂時計の再現シミュレーション

高橋 昂誠<sup>1</sup>, 村上 章<sup>2</sup>, 藤澤 和謙<sup>2</sup>, 福元 豊<sup>3</sup>

<sup>1</sup>大阪府立天王寺高等学校, <sup>2</sup>京都大学大学院農学研究科, <sup>3</sup>長岡技術科学大学

## 要旨

土の挙動を粒子レベルから数値的にシミュレートすることには、幅広い需要と応用性があり、本研究では、2次元砂時計を流れ落ちる砂の挙動を粒子レベルからモデリングすることを試みた。まず、ガラスビーズを実験試料とし、一面せん断試験から材料の摩擦特性を計測した後、2次元砂時計装置でのガラスビーズの流下挙動をPIV計測を通して観測した。個別要素法による数値シミュレーションでは、一面せん断試験の結果から、ガラスビーズの粒子間摩擦角と転がり摩擦係数を求め、減衰係数を調整することで2次元砂時計実験の再現を試みた。実験と数値解析では定性的な一致を得たものの、一面せん断試験から得られた粒子間摩擦角と転がり摩擦係数を固定した上で、減衰係数のみ変えて砂時計内を流れ落ちるガラスビーズの形状変化を正確に再現することは困難であった。

**重要語句:** 砂時計, ガラスビーズ, 数値解析, 個別要素法

## 序論

砂などの土質材料の挙動を粒子レベルから解明することは、幅広い応用性を有する重要な基礎研究である。例えば、砂時計の中の砂は、砂粒自体は固体であるが、まるで流体のように動く。このような現象は、カントリーエレベータにおけるサイロ、さらに身近なものでは米びつや、精米機などに見られ、穀物管理や計量などで日常生活や工業に利用される。本研究では、砂時計中の砂の動きに焦点を当て、その力学挙動を粒子レベルから把握することを目的とするが、上記のように粉粒体の挙動を把握することは、サイロなどでの事故防止や、効率的な穀物管理、正確な計量のために役立てることができる。本論文では、砂時計型の装置の中でのガラスビーズの挙動を個別要素法 (Discrete Element Methodの和名であり、以下ではDEMと称す) によって数値的にシミュレートし、粒子レベルから粉粒体の挙動を把握することを試みる。

## 一面せん断試験

一面せん断試験とは、土のせん断強度を表す粘着力、摩擦角などを測定するための実験であり、実験試料は直径約1 mm、密度2.5 g/cm<sup>3</sup>のガラスビーズを用いた。通常的一面せん断試験では、直径6 cm、高さ約2 cmの円柱状のせん断箱に実験試料を充填し、その中央部 (高さ1 cmに対応する平面) をせん断する。せん断試験は、垂直応力をおおよそ一定に保つ簡易定圧試験により実施され、せん断時にはせん断変位、せん断応力、垂直変位、垂直応力が計測された。今回の実験では、垂直応力として、約100 kPa、200 kPa、300 kPaが加えられ、せん断速度は約0.2 mm/minとした。

図1、図2、図3に垂直応力おおよそ100 kPa、200 kPa、300 kPaの実験におけるせん断距離とせん断応力の関係を示す。これらの図よりせん断応力はせん断開始時には0であり、初期にはせん断変位の増加に伴って、せん断応力は急激に大きくなるものの、ある一定のところ (せん断変位が1.3 mm付近) でピークを迎えた後、少し減少して一定値に近づく様子が見てとれる。ピークを迎えたあたりからせん断応力の値が上下に振動している。これは、せん断箱にサイズに対して、ガラスビーズの粒径が1 mmとやや大きく、せん断面において粒子同士が乗り上げと落ち込みを繰り返すためと考えられる (ある粒子が他の粒子を乗り上げる際にせん断応力が上昇し、その後粒子間に落ち込む際にせん断応力の減少が起きるものとする)。

せん断応力のピーク値と垂直応力との関係を図4に示す。同図では、横軸に垂直応力、縦軸にせん断応力をとる。図4に示す直線は、せん断強度 (材料が耐えられる最大のせん断応力) を意味し、それは垂直抗力に比例することがわかる。この直線の切片と角度は、それぞれ粘着力と (内部) 摩擦角と呼ばれ、それらの値は6.33 kPaと30.03度であった。なお、図中に示した右上に伸びる3つのラインは図1から3に示した試験中の垂直応力とせん断応力をプロットしたものであり、応力経路を示す。この結果は、流体とは異なり、砂はせん断に対する抵抗があることを示す。このせん断抵抗は、粒子間の摩擦によって発生するため、後に述べるDEMでは、粒子間の摩擦角と回転抵抗を決定するために、この試験結果を利用する。

## 2次元砂時計実験

今回の実験では図5及び図6に示す幅15 cm, 奥行き2 cm, 高さ20 cmの砂時計型の亚克力樹脂製の装置を使用した。用いる材料は上述の一面せん断試験でも用いたガラスビーズである。粒径が約1 mmのガラスビーズが詰まることなく通り抜けることのできるよう砂の落下口の開口幅は7 mmとした。なお、落下口は薄い仕切り板で塞ぐことができる。

実験では、まず、砂時計型装置の傾斜部(図6の中央部から上方60 mmの領域)をガラスビーズで満たし、その上面を水平にした。その後、開口部の仕切り板を静かに引き抜くことでガラスビーズを開口部から流出させ、その様子を観察した。ガラスビーズの流下過程は粒子イメージ流速計測法(Particle Image Velocimetryの和名であり、以下ではPIV計測と称す)により、その速度と形状

変化が捉えられた。PIV計測とは非接触で2次元断面中の速度分布を計測する手法であり、微小時間差をもって記録された2つの画像の粒子群の移動量の差から材料の速度ベクトルが算出される。

図7から図9に砂時計実験のスナップショット(初期, 1.5秒後, 4.0秒後)を示す。ガラスビーズは、開口部から流出するため、上面の中央部が窪みはじめ、斜面が形成される。左右端に近いガラスビーズは、形成された斜面にそって中央部に吸い込まれるように移動し、斜面形状を保ったまま全体的に降下するように流下する(図8, 図9参照)。最終的には、壁に近いガラスビーズが残るが、傾斜に沿って流れ落ち、約4.6秒かけてすべての粒子が開口部を通過した。なお、この実験は数回行ったが、そのすべてにおいてほとんど同様の結果を得た。ここで示し

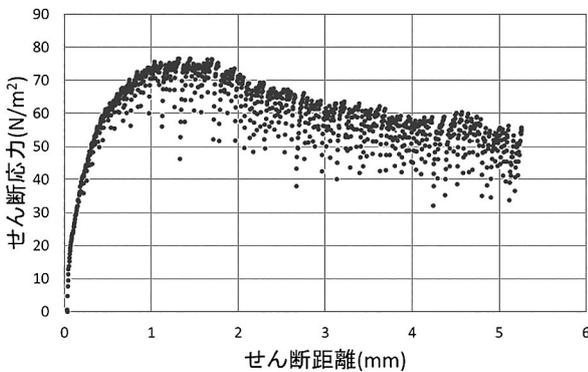


図1. せん断距離とせん断応力の関係 (100 kPa)

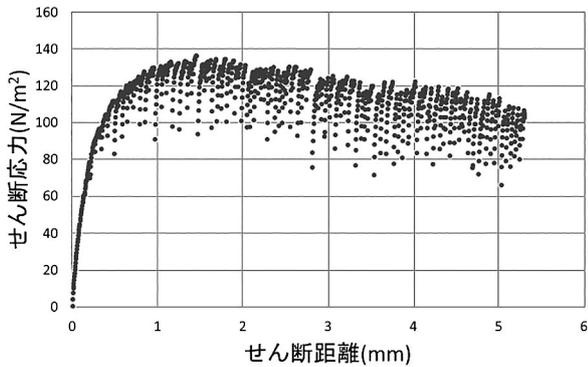


図2. せん断距離とせん断応力の関係 (200 kPa)

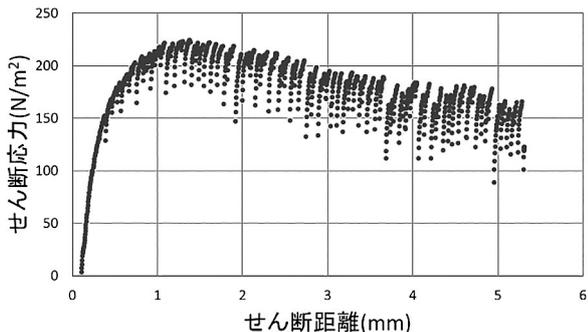


図3. せん断距離とせん断応力の関係 (300 kPa)

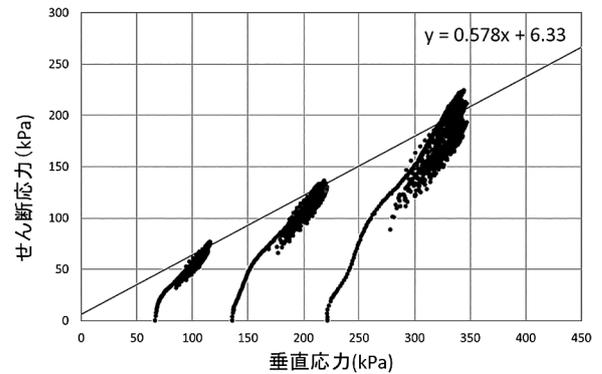


図4. 垂直応力とせん断応力の関係

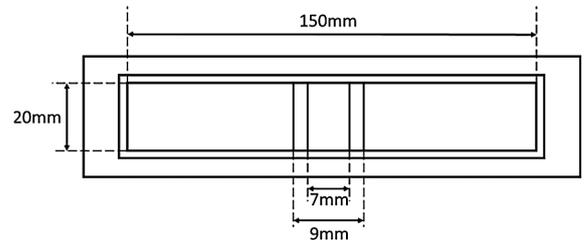


図5. 砂時計の平面図

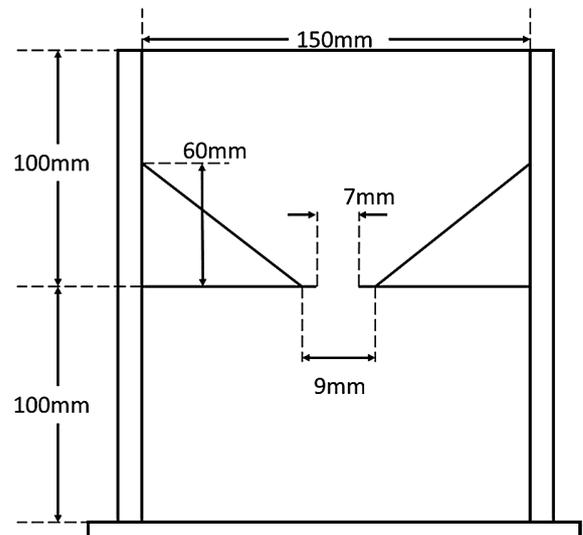


図6. 二次元砂時計の立面図

た実験結果は、後に示す数値シミュレーションの再現性を検証するために用いられる。

## DEMによる数値シミュレーション

DEMは、一つ一つ粒子の運動方程式を解くことで、粉粒体全体の変形や破壊をシミュレートすることができる数値解析手法である。本計算に必要なパラメータについ

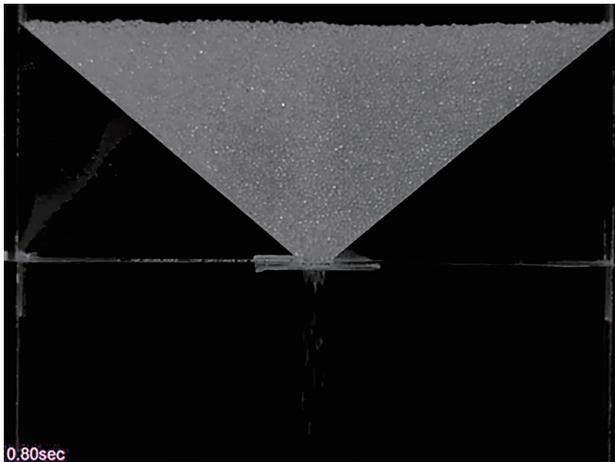


図7. 砂時計の実験画像0.0秒

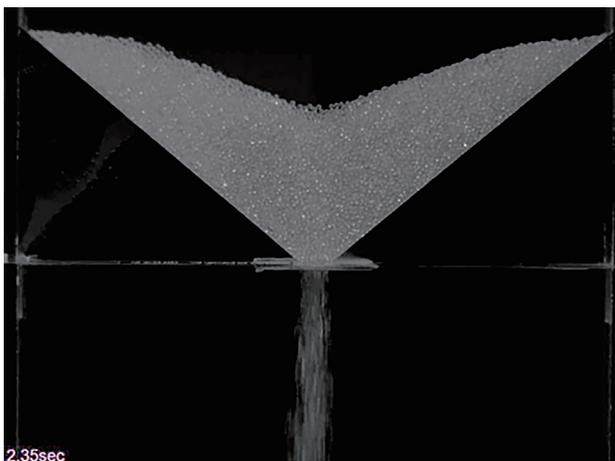


図8. 砂時計の実験画像1.5秒

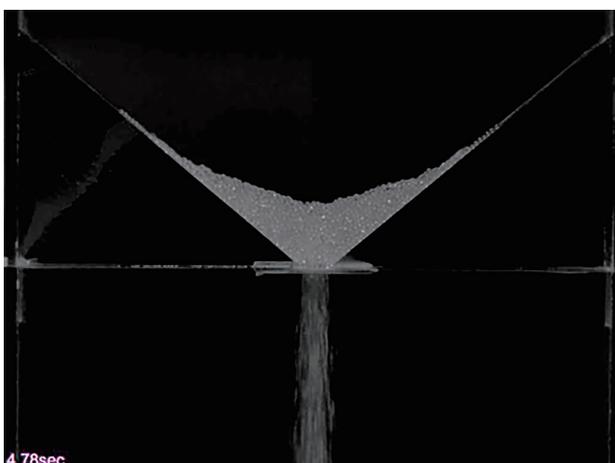


図9. 砂時計の実験画像4秒

ては付録にその意味を記載した。そのため、DEMを利用することで、上述した実験を再現でき、粒子間に働く接触力や粒子同士の摩擦特性など、微視的な物理量を推定することが可能となる。具体的には、実験結果を再現できるように、DEMシミュレーションに必要な材料パラメータを決定することを目指す。なお、計算負荷の制約からDEMシミュレーションでは二次元問題を扱い、粒子の接触力を算定するためのバネ定数は、以下で述べるすべての計算において  $k_n = 1.0 \times 10^7$ ,  $k_s = 2.5 \times 10^6$  とした。

## 一面せん断シミュレーション

一面せん断試験では、ガラスビーズの集合体としての摩擦角と粘着力が測定された。これらは、粒子間の摩擦や回転に対する抵抗によって発揮されると考えられる。そこで、粒子間（及び壁面と粒子）の摩擦角と転がり抵抗に関する係数を変えてパラメトリックスタディを行い、一面せん断試験結果を再現できる粒子間の摩擦角と転がり抵抗を推定した。数値計算では、計算時間を短縮する目的でせん断速度を3 mm/secとしたが、粒子に作用する慣性力が無視できる範囲であり、静的な力のつり合いが保たれる一面せん断試験の力学的な状態を再現するには問題はない。実験に合わせて115 kPa, 220 kPa, 343 kPaの垂直応力を作用させて、一面せん断シミュレーションを行い、図4に示す垂直応力とせん断応力の関係を再現

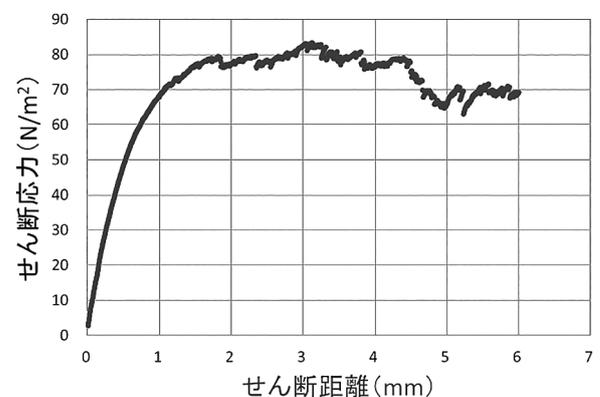


図10. シミュレーションにおけるせん断距離とせん断応力の関係 (100 kPa)

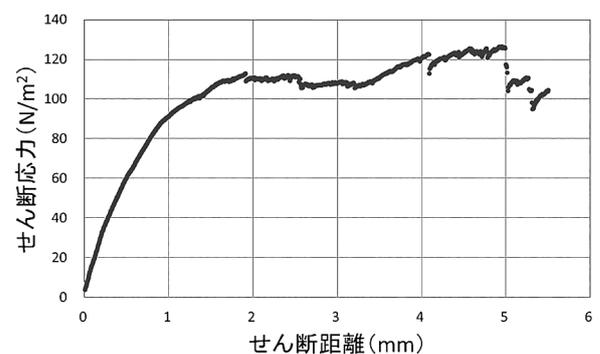


図11. シミュレーションにおけるせん断距離とせん断応力の関係 (200 kPa)

することを旨とした。

パラメトリックスタディの結果，最も実験と近い結果を得たのは，粒子間摩擦角が35度，粒子間の転がり摩擦係数が0.1（なお，壁面と粒子の摩擦角は35度，壁面における転がり摩擦係数は0.15）のときであった。図10から図12はシミュレートされたせん断距離とせん断応力の関係を示す。同図は一面せん断試験の図1から図3に対応するものである。図13は，図4に示した垂直応力とせん断強度の関係に，数値シミュレーションから計算されたせん断強度を重ねて示したものである。

図12において，橙色の線がシミュレーション，灰色の線が実験の結果を表す。このグラフでは100 kPaと200 kPa付近のせん断強度は良い一致が見られるが，300 kPa付近では少しずれることが見てとれる。実験値とシミュレーションの違いは，シミュレーションの方が，粘着力が大きく，摩擦角が小さい傾向にある。シミュレーションは2次元計算であるため，粒子は2次元平面内に拘束され，運動の自由度が少ない。そのため，2次元計算では粒子のかみ合わせによって過度に運動が拘束されるために粘着力が大きめに計算されると考える。一方，摩擦角については，一度動き出した粒子が他の粒子から受ける抵抗を表すものである。2次元計算では，3次元計算と比べて一つの粒子に接触する粒子数が少なくなるため，隣接する粒子から受ける抵抗が減ることで摩擦角の減少が生じたものと考えられる。

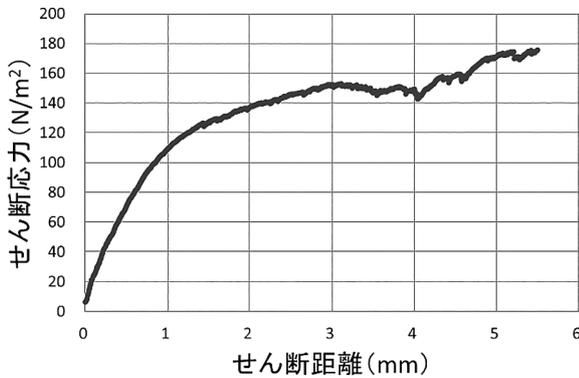


図12. シミュレーションにおけるせん断距離とせん断応力の関係 (300 kPa)

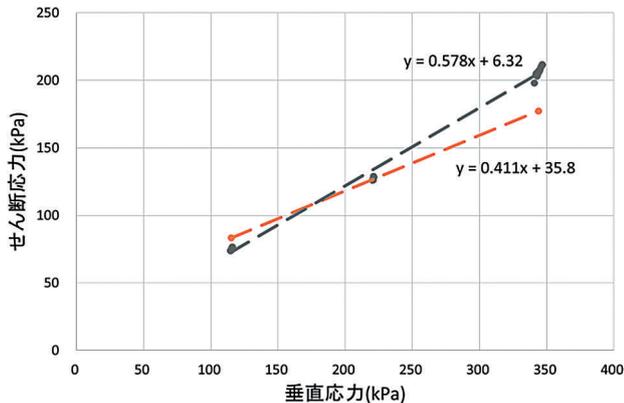


図13. 実験とシミュレーションから得られたせん断強度

## 砂時計シミュレーション

一面せん断試験のシミュレーションから得た粒子間の摩擦角35度，転がり摩擦係数0.1を引継ぎ，ここでは減衰係数を変化させて砂時計の実験の再現を試みた。砂時計実験では一面せん断試験とは異なり，動的な粒子の運動を再現する。そのため，静的な一面せん断試験の再現計算では調整できない減衰係数のキャリブレーションを行った。PIV計測によって得られた粒子の動きのデータと，シミュレーションの動画を重ね合わせることで視覚的に再現性を確認した。

図14と図15に例としてPIV計測のデータとシミュレーションの画像を重ね合わせたものを示す。どちらも開始から2.1秒後の画像であり，図14が減衰係数0.04（壁と粒子の摩擦角は35度，転がり摩擦係数は0.0）の時で，図15

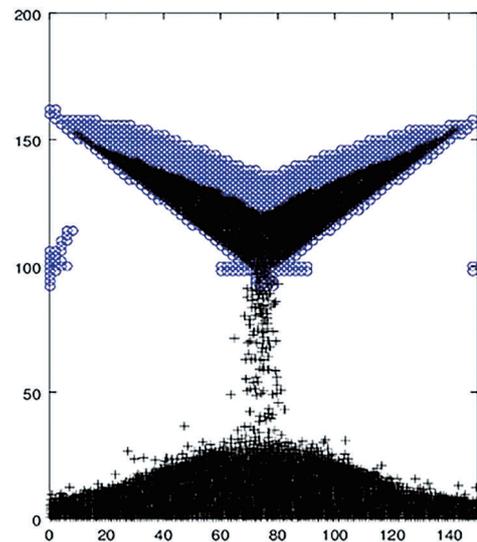


図14. ガラスビーズの流下形状 (減衰係数0.04, 青色が実験, 黒色がシミュレーション)

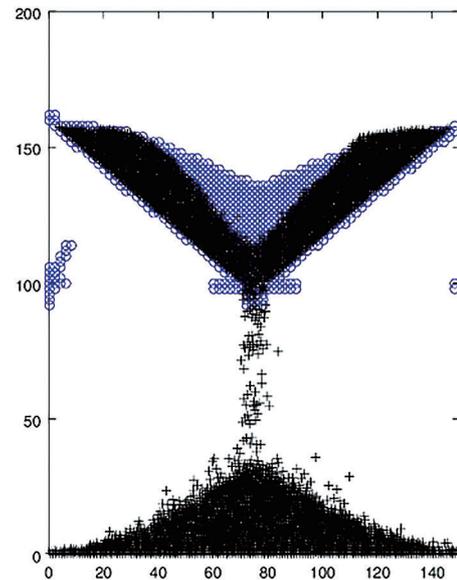


図15. ガラスビーズの流下形状 (減衰係数0.14, 青色が実験, 黒色がシミュレーション)

が減衰係数0.14 (壁と粒子の摩擦角は20度, 転がり摩擦係数は0.0) の時である. 同図においては, 黒い点 (+印) がシミュレーションを表しており, 青い点 (○印) が実験の粒子群位置を表している.

図14では実験でのガラスビーズの落下過程とシミュレーションでのそれがほぼ同様になっているが, シミュレーションの方が落ちる速度が速い. 図15ではシミュレートされた粒子群が流れ落ちる傾斜が極端に急であり, 粒子群が流下する際の表面形状が全く異なった. このように減衰係数を大きくすると, 粒子が降下する際の中央部から端にかけての傾斜が急になるとともに, 降下速度が遅くなる. また, 減衰係数が小さい場合は, 傾斜角度が小さくなり, 降下速度が速くなる.

いくつものシミュレーションを行った結果, 実験でのガラスビーズの流下過程と傾斜の角度と降下速度が最も一致したのは, 減衰係数を0.04とした場合であった. ただし, 降下速度については, シミュレーションの方が速くなった. このように, 降下速度が実験と計算で異なった理由として, 実験では3次元 (奥行き方向にも) 移動する粒子の運動を, 2次元計算では捉えることができなかった点と奥行き方向の壁 (前面と背面の壁) の摩擦の影響が考えられる.

## 結論

一面せん断試験と, 二次元砂時計実験を行い, 一面せん断試験で得られた摩擦特性をDEMシミュレーション上で摩擦角と転がり摩擦係数を変えながら再現できるようにすることで, ガラスビーズにおける摩擦角と転がり摩擦係数を求めた. それらのパラメータを固定した上で, 二次元砂時計の実験を減衰係数だけを調整することで再現することを試みた. その結果, 二次元と三次元では前後の壁の有無や, 粒子の自由度の違いによって生じる粒子の動きの違い, 奥行きの違いが影響し, 一面せん断試験で求めたパラメータを固定して, 砂時計の実験を減衰係数だけを調整することで完全に再現するのは難しいことがわかった. またパラメータを固定することで再現できなかった可能性もあるため, 一面せん断試験と砂時計の実験にはそれぞれ異なったパラメータが適していることも考えられる.

## 謝辞

今回研究に際してご指導いただいた, 村上章教授, 藤澤和謙准教授, 福元豊助教, TAの皆さま, またこのような機会を設けていただいたELCAS事務局の皆さま, 本当にありがとうございました.

## 付録 (DEM について)

DEM (個別要素法) とはCundall (1979) によって提案された, 粉粒体などの不連続体の運動を解くシミュレーション方法である.

DEMでは各粒子を剛体と考え, 接する2粒子は互いにオーバーラップを許して, 重なった量に応じて接触力を計算する. このとき接触力は法線方向と接線方向がある. 法線方向の接触力 ( $f_n$ ) は, 2粒子の重なっている量 ( $\delta_n$ ) に, 任意のばね定数 ( $k_n$ ) をかけたものになる. すなわち

$$f_n = k_n \cdot \delta_n$$

となる. 次に接線方向の接触力も同じように考え, 粒子間の相対変位 (接点の変位) ( $\delta_s$ ) に, 任意のばね定数 ( $k_s$ ) をかけたものが, 接線方向の接触力 ( $f_s$ ) になる. すなわち

$$f_s = k_s \cdot \delta_s$$

となる. また, 上記の接線方向の力は, 法線方向の力の大きさに比例する形で, 限界値を決めなければならない. そのとき, 横軸に垂直方向の力, 縦軸に接線方向の限界値をとったときの限界値のグラフの傾きが  $\tan\phi$  となる. この  $\phi$  が粒子間摩擦角に対応する.

次に転がり摩擦係数 ( $b$ ) とは接触している粒子の回転に対する抵抗の大きさを決定するもので, DEMでは転がりながら粒子同士が接触しているとき, 接触している部分に仮想的に長さがあると考えられる. この時の仮想の接触長さが粒子直径 ( $d$ ) に, 転がり摩擦係数をかけたものになる. そしてこの時の回転抵抗トルク ( $T'$ ) は角速度ベクトルを ( $\omega$ ) として

$$T' = \text{sgn}(\omega) |f^n| b d$$

と表せる.

また, 減衰とは, 粒子中心に作用し, 粒子に働く合力 ( $F$ ) に比例する計算上の効果である. そして減衰係数とは, その計算の中での減衰の大きさを決めるための任意の係数である. よって減衰の力 ( $F^d$ ) は, 物体にかかる合力を  $F$ , 速度を  $v$ , 減衰係数を  $\alpha$  として

$$F^d = -\alpha |F| \text{sgn}(v) = -\alpha F \cdot \{\text{sgn}(F) \cdot \text{sgn}(v)\}$$

と表せる. そしてこの減衰を考えた運動方程式は, 質量を  $M$ , 加速度を  $a$  として

$$F + F^d = Ma$$

となる.

## 参考文献

1. Cundall, P.A. and Strack, O.D.L. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1), 47-65. (1979).

## Two dimensional numerical simulation of hourglass by Discrete Element Method

KOSEI TAKAHASHI<sup>1</sup>, AKIRA MURAKAMI<sup>2</sup>, KAZUNORI FUJISAWA<sup>2</sup> & YUTAKA FUKUMOTO<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Osaka Prefectural Tennoji High school, <sup>2</sup>Graduate School of Agriculture Kyoto University, <sup>3</sup>Nagaoka University of Technology

### Abstract

A calibration procedure is proposed to determine the angle of internal friction and the coefficient of rolling friction between the particles for the Discrete Element Method (DEM) simulation from a direct shear test using glass beads. To examine the accuracy of DEM computation, hourglass simulation under different local damping, in addition to these identified parameters, is compared with the PIV measurement of corresponding experiment. It is revealed from the comparison that there remain some difficulties in simulating the overall behavior of the experiment by tuning local damping.

**Key words:** Hourglass, Glass beads, Numerical Simulation, DEM (Discrete Element Method)