地質学雑誌　第 122 巻　第 12 号　665–672 ページ，2016 年 12 月　doi: 10.5575/geosoc.2016.0032
Jour. Geol. Soc. Japan, Vol. 122, No. 12, p. 665–672, December 2016

講　座

歪み解析と変形解析の数理：3．歪み解析・変形解析の基礎

Lecture note on the theories of strain and deformation analyses：3. Foundations of two-dimensional strain analysis

山路　敦*

*Atsushi Yamaji**

2016 年 2 月 3 日受付．
2016 年 6 月 24 日受理．

* 京都大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻
Division of Earth and Planetary Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

Corresponding author: A. Yamaji, yamaji@kueps.kyoto-u.ac.jp

1．はじめに

今回は，次回以降の歪み解析・変形解析の理論的展開を準備する回である．

歪み解析のためのマーカーの例として，腕足貝や三葉虫のように左右対称で，変形前に直交していた部位のある化石が教科書にはよくとりあげられているが，じつは変形マーカーの形状は任意でよい．このことを最初に示す．任意形状のマーカーを楕円ないし楕円体で代表させ，変形前後のマーカーの形状を楕円ないし楕円体の変形前後の形状変化として扱うことで，変形あるいは歪みを定量的に計測できるのである．そのことを確認したうえで，つぎに，純剪断で楕円が別のどんな楕円になるかを考える．歪み解析・変形解析の理論的展開において，簡単な非ユークリッド幾何学がおどろくほどよい見通しを与えてくれる．次回以降でそれを説明してゆくが，今回の最後は，最も素朴な非ユークリッド空間である球面の幾何とその曲率を紹介する．そして最後に，負の一定曲率の曲面を考えると，その上の三角法の式として歪み解析の式が解釈できることを示すことで，次回以降の議論の導入とする．

2．任意形状の変形マーカー

Lisle（1985）は左右対称形や三角形など，いくつかの種類のマーカーの形状に楕円がフィッティングでき，その楕円をマーカーの代用として歪み解析ができることを示した．最近はさらに，任意形状の変形マーカーを使うことができることが指摘された（Mulchrone et al., 2004）．どんな形のマーカーであれ，楕円をフィッティングすることで，楕円の形状変化の問題に置き換えて歪みや変形が計算できるのである．その説明の準備として，変形前に楕円または楕円体だった物体が，一様変形で別の楕円または楕円体になる様子を検討しておく．

2.1　楕円と楕円体の一様変形

楕円や楕円体から位置の情報を捨象すると，主軸方向と主半径の情報が残る．本講座の第 1 回（山路, 2016）の §8 で示したように，位置情報を捨象した楕円や楕円体は，それぞれ 2×2 と 3×3 の実対称行列で表される．いま，$\boldsymbol{\Lambda}$ を実対称行列とし，$|\boldsymbol{\Lambda}| \neq 0$ として，それが表す楕円（体）を考える．変形前の楕円（体）の式を $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\xi} = 1$ と書く．ただし，$\boldsymbol{\xi}$ は変形前の位置ベクトルである．$\boldsymbol{\Lambda}$ の固有値の平方根が変形前の楕円（体）の主半径，固有ベクトルが主軸を表す．一様変形を仮定して，この式に $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{x}$ を代入すると，$(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{x} = 1$．これを整理し，変形後の楕円（体）の式として，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}\,\boldsymbol{x} = 1. \tag{1}$$

が得られる．そこで，

$$\boldsymbol{L}^{-1} = (\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{F}^{-1} \tag{2}$$

とおくと，変形後の楕円（体）を表す式（1）を

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{x} = 1. \tag{3}$$

と簡潔に書くことができる．$\boldsymbol{L}^{-1}$ の固有値の逆数が変形後の楕円（体）の主半径の自乗であり，固有ベクトルが主軸を表す．ということは，$\boldsymbol{L}$ の固有値が主半径の自乗である．式（2）の両辺の逆行列をとると，

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

この式は楕円（体）を表す行列が，一様変形でどんな楕円になるかを表している．つまり，楕円（体）の変換則を表す式である．

2.2　二次モーメントによる楕円のフィティング

二次元歪み解析のための変形マーカーは，任意形状でよい（Mulchrone and Choudhury, 2004）．Mulchrone らは純剪断でそのことを証明したが，ここではより簡潔でしかも非圧縮であれば非共軸変形でも成り立つ Yamaji and Maeda（2012）の定式化に沿って説明する．まず，任意形状の変形マーカーが与えられたなら，まずそれに楕円をフィッティングする．そのために，マーカーの中心を直交デカルト座標の原点とし，位置ベクトル（列ベクトル）を $\boldsymbol{x}$ とする．マーカーの位置情報を使わないので，マーカーの中心を原点にあわせてしまうわけである．そして，マーカーの形を関数

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x}\text{ がマーカーの内部または縁の点を表す}) \\ 0 & (\boldsymbol{x}\text{ がマーカーの外部の点を表す}) \end{cases} \tag{5}$$

で表現することにしよう．すると明らかにこのマーカーの面

積は

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

である．積分範囲を無限遠までとってはいるが，マーカーは有限の大きさしかなく，その外部で $f(\boldsymbol{x})=0$ であるから，この積分はマーカーの内部でのみ積分することに等しい．任意形状を許容するために，十分大きな領域という意味で，形式的に無限遠まで積分しているのである．この積分値を $f(\boldsymbol{x})$ のゼロ次のモーメントという．対するに，一次モーメントはベクトル量 $f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$ の積分である．それを面積 S で割った

$$\frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\ \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

は，重心がどこにあるかを表す位置ベクトルである．ここで重心というのは，マーカーが単位面積あたり一定の密度をもつと考えたときの重心という意味で，ここではマーカーの中心をこの式が表す位置ベクトルとするわけである．マーカーの形が与えられれば，こうしてその重心が計算できる．そこで，以下，その重心を座標原点として議論を進める．

ここではベクトルといえば 1×2 の列ベクトルであるから，$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ は x_ix_j を第 ij 成分とする 2×2 の実対称行列である．マーカーの二次のモーメントは，

$$\boldsymbol{G}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{6}$$

という実対称行列として定義される．線形代数学によると，実対称行列の固有値はすべて実数で，固有ベクトルは互いに直交する．そこで，$\boldsymbol{G}$ を楕円に対応づけることができる(Hu, 1962; Teague, 1980)．すなわち，$\boldsymbol{G}$ の 2 つの実固有値を G_1，G_2 と書くならば($G_1\geq G_2$)，マーカーにフィットし，マーカーと同じ面積をもつ楕円の長半径と短半径は，それぞれ $(SG_1/\pi G_2)^{1/2}$，$(SG_2/\pi G_1)^{1/2}$ となる．G_1 に対応した固有ベクトルが長軸方向である．逆に楕円が与えられたなら，その主半径の方向と長さから対応する $\boldsymbol{G}$ が一意に決まる．楕円と $\boldsymbol{G}$ は 1 対 1 対応するので，$\boldsymbol{G}$ とそれに対応した楕円とを同一視することができる．この楕円を，与えられた変形マーカーの代理として，変形解析に利用するのである．有名な画像処理ソフトウェアの ImageJ は，一つながりの任意形状のもの(単連結領域)に，その二次モーメントから計算した 1 つの楕円をフィッティングしてくれる[URL1]．その例を Fig. 1 に示す．

〔問題〕 $\boldsymbol{G}$ の 2 つの固有値がともに正，すなわち，G が正定値行列であることを示せ．

〔答え〕 煩雑なので，ここでは二重積分の積分範囲を省略して書く．$\boldsymbol{G}$ は実対称行列だから，2 本の固有ベクトルは互いに直交する．固有ベクトルと平行に座標系を選べば，G は対角行列になる：

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\iint f(\boldsymbol{x})x_1^2\ \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 & 0\\ 0 & \iint f(\boldsymbol{x})x_2^2\ \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{pmatrix}.$$

この対角成分は固有値にほかならないが，$f(\boldsymbol{x})$ の値は 0 または 1 なので，$f(\boldsymbol{x})x_1^2\geq0$ かつ $f(\boldsymbol{x})x_2^2\geq0$．マーカーの面積が 0 でない限り，これらの積分は 0 にはならない．ゆえに，2 つの固有値は正の数であり，$\boldsymbol{G}$ は正定値行列である．

Fig. 1. Ellipses fitted to complicated shapes via their second moments. 複雑な形状に二次モーメントを使ってフィッティングした楕円．

2.3　歪み解析との関係

二次モーメントでフィッティングした楕円は，もとの変形マーカーの代理として変形解析・歪み解析に使うことができる．このことを証明しよう．変形マーカーの重心を座標原点として，その変形前の形状を，次の関数で表現する：

$$\phi(\boldsymbol{\xi})=\begin{cases}1 & (\boldsymbol{\xi}\text{ がマーカーの内部または縁の点を表す})\\ 0 & (\boldsymbol{\xi}\text{ がマーカーの外部の点を表す}).\end{cases} \tag{7}$$

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi}$ という一様変形では，原点は移動しない．つまり $\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{x}$ 始点は同一である．ここで $\phi(\boldsymbol{\xi})$ の二次モーメントを Γ とする：

$$\Gamma=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\ \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \tag{8}$$

変形前のマーカーにフィットする楕円は，Γ の固有値と固有ベクトルから決定される．

さて，変形後の形状を式(4)の $f(\boldsymbol{x})$ で表現すると，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi}$ だから，$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi})$．一様変形なので，$\boldsymbol{F}$ は場所によらず一定である．したがって，$f(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi})$ は $\boldsymbol{\xi}$ のみの関数としてマーカーの内外の区別を表している．それは $\phi(\boldsymbol{\xi})$ にほかならない(Fig. 2)．つまり，

$$f(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi})=\phi(\boldsymbol{\xi}). \tag{9}$$

変形にともなう体積変化(この場合は二次元だから面積変化)を考えないなら，変形前の面積要素 $\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$ は変形後の面積要素 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ と，値が等しい．任意の行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{a}$ について $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ であることに注意すると，式(6)を次のように変形することができる：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{F}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\\&=\boldsymbol{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\right]\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

最後のところで $\boldsymbol{F}$ が場所によらず一定であることを使った．また，最後の角括弧内は Γ にほかならない．こうして，式

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}\Gamma\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$$

が導かれた．これは一様変形にともなう二次モーメントの変換則を表している．

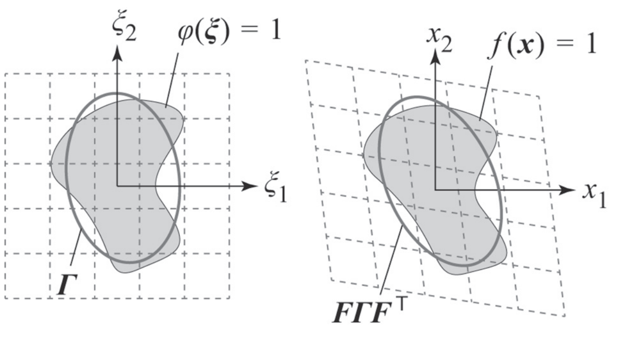

Fig. 2. Pre- and post-deformation shapes of a deformation marker (gray) denoted by $\phi(\boldsymbol{\xi})$ and $f(\boldsymbol{x})$, respectively. The ellipse in the left panel is fitted to the former via its second moment, and that in the right panel is the ellipse denoted by the matrix $\boldsymbol{F}\Gamma\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$. It is proved that the latter is identical with the ellipse fitted to the post-deformation shape via its second moment (Yamaji and Maeda, 2012). 変形前後のマーカーの形状を表す関数$\phi(\boldsymbol{\xi})$および$f(\boldsymbol{x})$．左の図の楕円は，二次モーメントによりマーカーにフィットした楕円．右の楕円は，行列$\boldsymbol{F}\Gamma\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$によって表現される楕円．後者が，変形後のマーカーにフィットした楕円と同一であることが証明できる(Yamaji and Maeda, 2012)．細い破線は，$\boldsymbol{\xi}_1$と$\boldsymbol{\xi}_2$の座標系を示す．

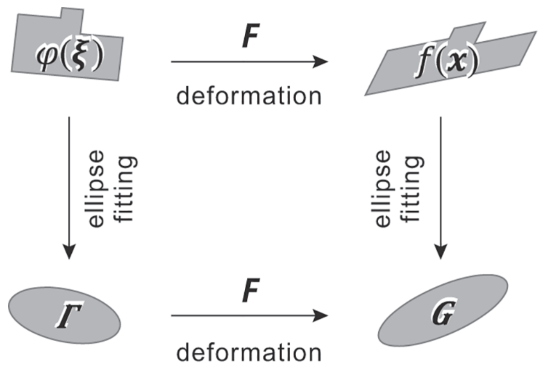

Fig. 3. Commutative diagram for the validity of using the ellipses, generated by fitting through the second moments of deformation markers with arbitrary shapes, for deformation analysis. 任意形状のマーカーの一様変形．変形後のマーカーにフィッティングした楕円は，変形前のマーカーにフィッティングした楕円を変形した結果に等しい．

以上のことは何を意味するのだろうか．この変換則は，楕円の変換則の式(4)とまったく同一であることに注意しよう．また，$\boldsymbol{G}$とΓは，それぞれ楕円と同一視できることを思い出そう．すると，変形前の形状→変形後の形状→変形の形状にフィットした楕円 = 変形前の形状→変形前の形状にフィットした楕円→変形後の形状にフィットした楕円，というように，Fig. 3に示す2つのルートは同じ終着点$\boldsymbol{G}$に達する．このことは，二次モーメントでフィティングした楕円を変形マーカーの代用として歪み解析・変形解析に使えることを意味するのである．ImageJを利用して任意形状の変形マーカーによる歪み解析の実際の手続きは，山路(2013)が記載している．また，アンモナイトの隣接する肋がつくる，不等辺四角形から歪みを見積もる実例をYamaji and Maeda(2012)が示した．また，二次モーメントで変形マーカーにフィティングした楕円をYamaji(2013)は非共軸変形の推定に利用した．

3. 楕円の純剪断変形

変形前の形状について妥当な想定ができる物体(変形マーカー)さえあれば，それがどんな形状の物でも，それにフィットした楕円が歪み解析・変形解析に利用できることが前節で示された．ここからは純剪断変形による楕円の変化を扱う．いろいろな長軸方向と形状をもつ楕円たちが，純剪断でどんな楕円になるかをFig. 4に示す．長軸が歪みのX軸(歪み楕円の長軸)に近かった楕円は長細くなる一方である．しかし，X軸と長軸が直交に近かった楕円は，いったん丸くなってから細長くなる．したがって，長軸方向の異なる楕円形マーカーの変形後の長軸方向と形状を計測することにより，純剪断の歪み楕円が決定できる．もちろん，複雑な形のマーカーでも，二次モーメントでフィッティングした楕円をマーカーの代用として使うことができる．歪み楕円を決定する具体的な方法は次回説明することにして，今回はその基礎を説明しよう．

3.1　アスペクト比と長軸方向の変化

変形前の形については妥当な仮定ができるにしても，変形前の大きさについては推定が難しいのが普通である．化石の場合，生きていたときの大きさは個体ごとに違い，また，季節や年齢によっても違う．したがって，化石から変形前のサイズについて妥当な仮定をもうけるのは難しい．したがって歪み解析では，サイズの変化を無視するのが普通である．楕円の長半径と短半径をそれぞれa，bとすると，楕円の面積はπabである．以下，断りがない限り，楕円は単位円と同じ面積πを持つと仮定する．楕円からサイズ情報を捨象して残るのは，長軸方向ϕとアスペクト比$R = a/b$である．ただし，ϕは任意に選んだ基準線と長軸とのなす角である

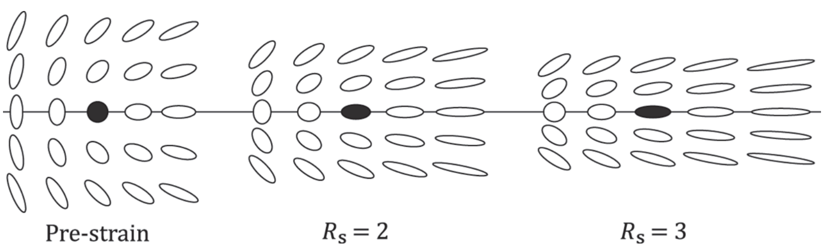

Fig. 4. Post-strain shapes and orientations of ellipses with various pre-strain orientations and aspect ratios. Filled ellipses depict the strain ellipses. The horizontal line indicates the X-axis of strain. 変形前に種々の形と方向を持っていた楕円が純剪断でどんな楕円になるかを示す図．黒く塗りつぶしたものが歪み楕円．水平線は歪みのX軸の方向．

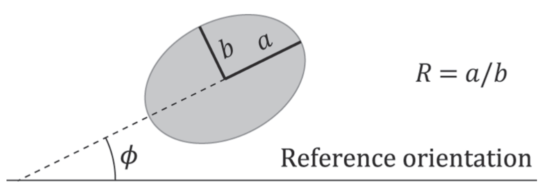

Fig. 5. The aspect ratio, R, and the major-axis orientation, ϕ, of an ellipse. 楕円のアスペクト比 R と長軸方向 ϕ.

(Fig. 5)．以下，長半径と短半径をそれぞれ$\sqrt{R}$ および $1/\sqrt{R}$ とする．それらの情報のみで楕円の式を書くと，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/R & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=1. \tag{10}$$

となる．左辺の行列の固有値の平方根の逆数は，確かにサイズ情報を捨象した楕円の主半径$\sqrt{R}$ および $1/\sqrt{R}$ に一致する．この式の左辺の行列を楕円の形状行列（shape matrix）とよび，$\boldsymbol{N}$ で表すことにする．三角関数の倍角の公式を使って整理すると，

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(R+\dfrac{1}{R}\right)+\left(R-\dfrac{1}{R}\right)\cos 2\phi & \left(R-\dfrac{1}{R}\right)\sin 2\phi\\ \left(R-\dfrac{1}{R}\right)\sin 2\phi & \left(R+\dfrac{1}{R}\right)-\left(R-\dfrac{1}{R}\right)\cos 2\phi\end{pmatrix} \tag{11}$$

となる．楕円形の変形前後の形状行列をそれぞれ $\boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}$，$\boldsymbol{N}_{\mathrm{f}}$ とすると（添え字は initial と final の頭文字），変形後の楕円の式(10)は，次のようになる：$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{x}=1$．これと式(3)は等しいので，$\boldsymbol{L}^{-1}=\boldsymbol{N}_{\mathrm{f}}$ である．変形前の形状行列については，で，$\boldsymbol{\Lambda}^{-1}=\boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}$ である．したがって，形状行列を使って式(4)を書き換えると，

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{f}}^{-1}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

となる．これは楕円の形状行列の変換則を表す式である．

変形前後の楕円にかかわる量を，それぞれ添え字 i と f で区別する．また，歪み楕円にかかわる量を添え字 s で表すことにする．ここで，自然対数を log として，

$$\rho=\log R \tag{13}$$

$$\psi=2\phi \tag{14}$$

というパラメータを導入する．前者の双曲線関数は，

$$\cosh\rho\equiv\frac{\mathrm{e}^{\rho}+\mathrm{e}^{-\rho}}{2}=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right) \tag{15}$$

$$\sinh\rho\equiv\frac{\mathrm{e}^{\rho}-\mathrm{e}^{-\rho}}{2}=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right) \tag{16}$$

となる．これらを使って式(11)の形状行列を書き換えると，

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cosh\rho+\sinh\rho\cos\psi & \sinh\rho\sin\psi\\ \sinh\rho\sin\psi & \cosh\rho-\sinh\rho\cos\psi\end{pmatrix}. \tag{17}$$

さてここで，楕円の長軸方向を測るときの基準線が歪み楕円の長軸方向（歪みの X 軸）と一致すると仮定する．その方向に第 2 座標，それと直交して第 1 座標をとると，純剪断を表す変形勾配テンソルとその逆変形を表すテンソルは，

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{R_{\mathrm{s}}} & 0\\ 0 & \sqrt{R_{\mathrm{s}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\exp(-\rho_{\mathrm{s}}/2) & 0\\ 0 & \exp(\rho_{\mathrm{s}}/2)\end{pmatrix}. \tag{18}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}=\begin{pmatrix}\exp(\rho_{\mathrm{s}}/2) & 0\\ 0 & \exp(-\rho_{\mathrm{s}}/2)\end{pmatrix}.$$

ただし，$\rho_{\mathrm{s}}=\log R_{\mathrm{s}}$ である．式(10)の左辺の中央の対角行列と式(18)を比べると，歪みの楕円の形状行列の 2 つの固有値が二次の伸び（quadratic elongation）とその逆数（reciprocal quadratic elongation）であることがわかる．また，式(11)からは，$\boldsymbol{N}$ の対角成分を横軸に，非対角成分を縦軸にとることで，N_{11} と N_{22} を直径とする歪みのモール円が描けることがわかる．これは Nadai（1950）が提案した歪みテンソルの図解である．

さて，$\boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}$ は式(17)の形をもつので，式(12)の両辺それぞれで逆行列をとると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{\mathrm{f}}&=(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{F}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}(\cosh\rho_{\mathrm{i}}+\sinh\rho_{\mathrm{i}}\cos\psi_{\mathrm{i}})\exp(-\rho_{\mathrm{s}}/2) & \sinh\rho_{\mathrm{i}}\sin\psi_{\mathrm{i}}\\ \sinh\rho_{\mathrm{i}}\sin\psi_{\mathrm{i}} & (\cosh\rho_{\mathrm{i}}-\sinh\rho_{\mathrm{i}}\cos\psi_{\mathrm{i}})\exp(\rho_{\mathrm{s}}/2)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{19}$$

ただしここでは，任意の 2 つの正方行列の積と逆行列についての公式 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ を用いた．他方，$\boldsymbol{N}_{\mathrm{f}}$ も式(17)の形をもつので，

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{f}}=\begin{pmatrix}\cosh\rho_{\mathrm{f}}+\sinh\rho_{\mathrm{f}}\cos\psi_{\mathrm{f}} & \sinh\rho_{\mathrm{f}}\sin\psi_{\mathrm{f}}\\ \sinh\rho_{\mathrm{f}}\sin\psi_{\mathrm{f}} & \cosh\rho_{\mathrm{f}}-\sinh\rho_{\mathrm{f}}\cos\psi_{\mathrm{f}}\end{pmatrix}. \tag{20}$$

式(19)の対角成分の平均と式(20)のそれは一致しなければならないので，

$$\cosh\rho_{\mathrm{f}}=\cosh\rho_{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\rho_{\mathrm{s}}}+\mathrm{e}^{\rho_{\mathrm{s}}}}{2}\right)+\sinh\rho_{\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\rho_{\mathrm{s}}}-\mathrm{e}^{\rho_{\mathrm{s}}}}{2}\right)\cos\psi_{\mathrm{i}}$$

整理すると，式

$$\cosh\rho_{\mathrm{f}}=\cosh\rho_{\mathrm{i}}\cosh\rho_{\mathrm{s}}-\sinh\rho_{\mathrm{i}}\sinh\rho_{\mathrm{s}}\cos\psi_{\mathrm{i}} \tag{21}$$

が得られる．また，同様に式(19)と(20)の非対角成分を比較することにより，式

$$\sinh\rho_{\mathrm{f}}\sin\psi_{\mathrm{f}}=\sinh\rho_{\mathrm{i}}\sin\psi_{\mathrm{i}} \tag{22}$$

が得られる．楕円のアスペクト比の値は 1 以上だから $\rho\geq 0$ である．この範囲で $\cosh\rho$ は単調増加関数だから逆関数が存在して，$\cosh\rho$ から ρ を求めることができる．式(21)，(22)の左辺は変形後の楕円にかかわる量のみからなり，右辺は変形前の楕円にかかわる量と歪み楕円にかかわる量からなる．すなわちこれらの式は，歪み楕円のパラメータが与えられたとして，変形前の楕円から変形後の楕円を計算する式なのである．式(21)から ρ_{f} を計算し，その結果を使って式(22)から ψ_{f} が求まる．すると，やはり $\rho_{\mathrm{f}}\geq 0$ の範囲で式 $\rho_{\mathrm{f}}=\log R_{\mathrm{f}}$ から R_{f} が求まる．ただし式(21)と(22)は，歪み楕円の長軸が基準線と一致している場合にしか使えないことに注意すべきである．

〔問題〕　歪み楕円の長軸が基準線と角 ϕ_{s} で交わる場合について，式(21)，(22)に代わる式を導け．

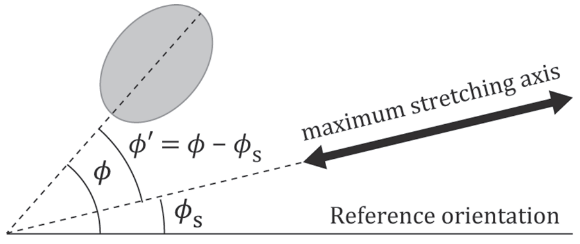

Fig. 6. The case where the reference orientation is not parallel to the maximum stretching orientation (bold arrow). The orientation of an ellipse with respect to the maximum stretching orientation is denoted by ϕ'. 基準線が最大伸長方向（太い矢印）と一致しない場合．歪み楕円の長軸を基準とした楕円の長軸方向が ϕ'.

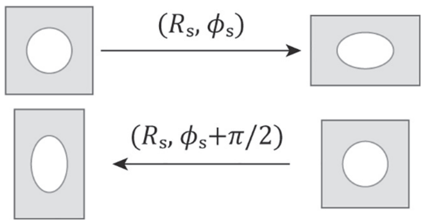

Fig. 7. Schematic illustration showing the relationship between pure shear characterized by (ρ_s, ψ_s) and its inverse. 純剪断 (ρ_s, ψ_s) とその逆変形の関係.

〔答え〕 変形をこうむる楕円の長軸方向を ϕ とすると，歪み楕円の長軸となす角は $\phi'=\phi-\phi_s$ である．Fig. 6 からわかるように，式(21)，(22)の ψ_i を $\psi_i-\psi_s$ に，そして ψ_f を $\psi_f-\psi_s$ に代えれば目的の式が得られる．すなわち，

$$\cosh\rho_f = \cosh\rho_i \cosh\rho_s - \sinh\rho_i \sinh\rho_s \cos(\psi_i-\psi_s) \quad (23)$$

$$\sinh\rho_f \sin(\psi_f-\psi_s) = \sinh\rho_i \sin(\psi_i-\psi_s) \quad (24)$$

求めていたのは，これらの式である．

〔問題〕 式(23)，(24)は純剪断による楕円の変換公式である．この変形の変形勾配テンソルを $\boldsymbol{F}$ とすると，逆変形 $\boldsymbol{F}^{-1}$ のときの楕円の変換公式はどうなるだろうか．

〔答え〕 純剪断のパラメータが (R_s, ϕ_s) で表されるなら，Fig. 7 のように，逆変形のそれは $(R_s, \phi_s+\pi/2)$ である．したがって，式(23)，(24)の ψ_s を $\psi_s+\pi$ で置き換えれば，逆変形のときの楕円の変換則を表すようになる．■

純剪断で楕円のアスペクト比と長軸方向がどう変化するかを表す式は，はじめ Ramsay（1967, pp. 205–209）により導かれた，彼はアスペクト比と長軸方向そのものを用いたので，導かれた式は複雑であるが，内容的には式(21)，(22)と同じである．双曲線関数を使った式(21)は，Dunnet（1969）によって導かれた．Lisle（1985）は双曲線関数を使わずに式(22)を複雑な式で表現している．次回はそれらをさらに単純化して扱いやすくしたうえで，歪み解析とその誤差を論ずる．

3.2　楕円のパラメータのプロット

楕円からサイズの情報を捨象すると，残る情報はアスペクト比と長軸方向である．これら一組のデータを平面上の 1 点で表すには，不便であるにもかかわらず Rf/ϕ プロットというものが伝統的に使われてきた（Fig. 8a）．すなわち，log R と ϕ を直交座標とするプロットである．これがよく使われるのは，おそらく代案のメリットが知られていないからだろう．

Rf/ϕ プロットの欠点は第 1 に，楕円のペアになっているデータ (R, ϕ) とプロット上の点が 1 対 1 対応しないことである．Fig. 8a の左右端にあって縦座標を等しくする 2 点は，同じ楕円を表す．また，$R=1$ の単位円は，横軸上の無数の点で表される．第 2 の欠点は，2 つの楕円の非類似度とプロット上の 2 点間の距離が一致していないことである．非類似度の定義はユニークではないが，要するに 2 つのものがどれだけ異なるかを表す数値である．ここではわかりやすいように，2 つの楕円が同じ面積をもつとして，重心を一致させて 2 つを重ねたときに，重複が少ないほど非類似度が大きいということにしよう（もっとよい非類似度の定義を次回説明する）．R が大きければ，長軸方向の差異が小さくても，2 つの楕円は重複が少ない．しかし，R が 1 に近いと，長軸方向が大きく違っていても，2 つの楕円の重複は多い．つまり非類似度が同じでも，このプロットの上の方では 2 つの楕円を表す 2 点間の距離が小さく，下の方ではそれが大きくなる．そして下端の横軸上では，どの点も同一の形状，すなわち円を表す．変形マーカーから歪みを決定するだ

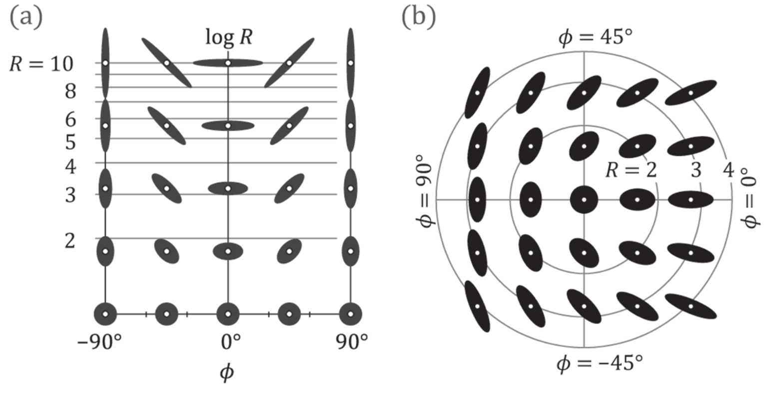

Fig. 8. (a) Conventional Rf/ϕ plot. (b) Elliott plot for Rf/ϕ data. The polar coordinates of the center of a solid ellipse, ρ and ψ, indicate the aspect ratio, $R=\exp(\rho)$, and major-axis orientation, $\phi=\psi/2$, of the ellipse. (a) 従来の Rf/ϕ プロット．(b) Rf/ϕ データの Elliott プロット．黒い楕円の中心の極座標が，その楕円の ρ と ψ を表す．

けなら Rf/ϕ プロットで十分だが，誤差を論じようとすると，とたんに上述の欠点が顕わになるのである（次回詳述）.

振り返ってみれば，利用頻度こそ少なかったものの，Elliott（1970）が ρ と ψ を極座標としたプロットを提案していた（Fig. 8b）．また，Wheeler（1984）が sinh ρ と ψ を極座標とするものを提案している．楕円は中心のまわりに 2 回対称なので，長軸方向 ϕ の 2 倍である ψ を極座標の偏角座標にすることにより，上記の欠点が回避されている．そのうえ $\rho = \log R$ を極座標の動径座標にしているので，楕円のアスペクト比と長軸方向との対応において，原点が不連続な点になることも回避されている．ここでは主に，Rf/ϕ プロットの欠点を指摘するにとどめ，他のプロットについては回を改めて詳述する.

4. 非ユークリッド幾何学

非ユークリッド幾何学が歪み解析・変形解析に理論的見通しを与えてくれることを次回以降で説明するのだが，その準備として最も単純でなじみ深い非ユークリッド幾何学である球面上の幾何学から説明を始める.

4.1 球面上の測地距離と球面三角形

球面上の 3 本の大円で規定される三角領域を，球面三角形という（Fig. 9）．球面上の 2 点と球の中心の 3 点で扇形が定義されるが，その頂角をその 2 点間の球面上の距離として，角距離とよぶ．球面三角形の辺の長さは，頂点間の角距離である．また，球面三角形の辺をなす大円の交角を，その三角形の頂角とする．頂角が A，B，C で，それに向かいあう辺の長さが a，b，c である Fig. 9 の球面三角形について，球面三角法の余弦定理 $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ と正弦定理 $\sin a \sin B = \sin b \sin A$ がなりたつ（中岡, 1993）．空間の 2 点間を最短距離で結ぶ線を測地線（geodesic）とよぶ．球面上では，2 点を通る大円がそれにあたる．球の中心を通る平面と球面との交線が大円である.

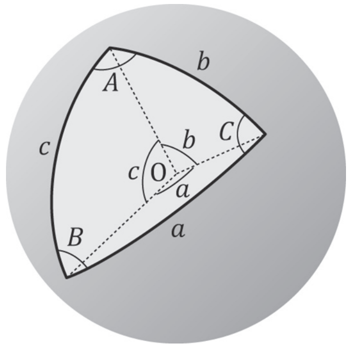

Fig. 9. Spherical triangle. 球面三角形.

大円上の 2 点間の距離を測地距離という．単位球の場合，球の中心と 2 点それぞれを結ぶ半直線のなす角を測地距離とみなすことができ，それら 2 点を単位ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ で表すなら，$\cos\theta = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ であるから，距離 d と内積の間に $d = \cos^{-1}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$ という関係が成り立つ．これと似た式が次回，歪み量を表す式として出てくる.

4.2 投影法

球面から平面への投影を説明しておく．地図投影法には色々な種類があるが，次回以降で重要になるのは等積投影とノモン投影である.

4.2.1 等積投影　等積投影では，球の接平面に投影する．接点 C を投影中心という．投影中心から角距離 θ にある点 P が移った先の点を P′ とすると，4 点 O，P，P′，C は同一平面上にあり，線分 CP と CP′ の長さが等しい．式で表すと，$\mathrm{CP'} = 2\sin(\theta/2)$ である（Fig. 10a）．これはシュミットネットを作るときの投影法である.

4.2.2 ノモン投影　球の接平面に投影するとして，接点を C とする．球の中心から球面上の点 P を通る半直線を引き，それと平面との交点 P′ を投影点とするのがノモン投影

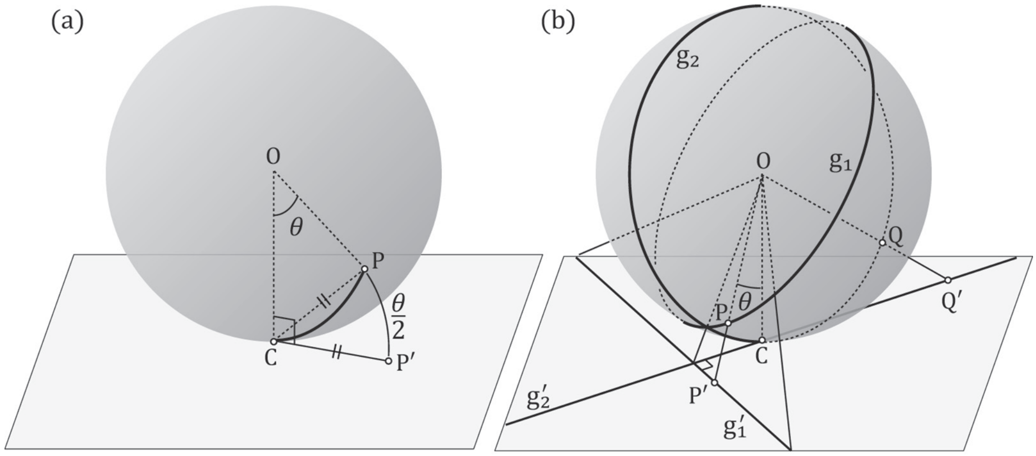

Fig. 10. Equal-area (a) and gnomonic (b) projections of spheres onto planes. The centers of spheres and projections are indicated by O and C, respectively. P is mapped to P'. Thick lines on the spheres depict great-circles. The great-crcles, g_1 and g_2, are mapped onto the lines, g_1' and g_2'. 球面の等積投影（a）とノモン投影（b）．球の中心と投影中心をそれぞれ O と C で示す．球面上の点 P が P′ に投影される．太線は大円．大円 g_1 と g_2 は直線 g_1' と g_2' に投影される.

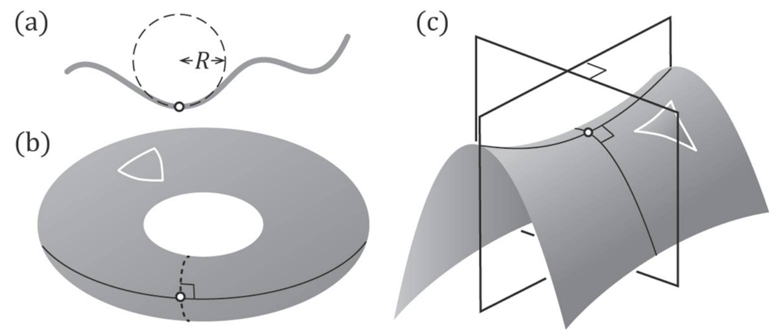

Fig. 11. Curvatures of smooth lines and surfaces at the points indicated by open circles. (a) The radius of curvature, R, of a line at its point (open circle) is defined as radius of the circle that tangents to the line at the point. The curvature of the line at the same point is $1/R$. (b, c) There are directions of maxmum and minimum curvature at every point on a smooth curve, and the directions always make a right angle. White lines depict the triangles defined by the geodesics between three points on the surfaces. なめらかな曲線と曲面の曲率．(a)曲線の曲率半径 R の逆数が曲線の曲率．(b, c)なめらかな曲面にはつねに最大曲率の方向と最小曲率の方向が存在し，互いにに直交する．曲面上の 3 点を結ぶ測地線によって規定される三角形が白線で示されている．

(gnomonic projection)である(Fig. 10b)．心射方位図法ともいう．線分 CP′の長さは，$\tan\theta$ である．大円は球の中心を通る平面と球面との交線であるから，この投影で大円は直線に投影される．直線に写されることで，曲面上の線が測地線であることが一目瞭然であることが，この投影法の長所である．ある大円 g_1 の極を Q，それが移る点を Q′とする．そして C と Q を通る大円を g_2 とすると，それらの影 g_1' と g_2' は直交する．

4.3　曲率

ここで曲率を定義しておく(例えば戸田, 1989)．なめらかな曲線のある 1 点で，その曲線に円弧をフィッティングするとき，この円弧の半径 R をその点における曲線の曲率半径という．そして，$1/R$ を曲率とよぶ(Fig. 11a)．曲がりがきついほど曲率は大きく，曲率が 0 なら直線である．

曲面でもその曲がりの程度を曲率で定量化することができ，褶曲構造の記載に使われ出している(例えば Pollard and Fletcher, 2005)．なめらかな曲面上の 1 点におけるその曲面の曲率は，その点から曲面に沿ってどちらに向かうかによって異なり，曲面上のどの点においても最大曲率の方向と最小曲率の方向がつねに存在する．例えば Fig. 11b の場合，ドーナッツの｢穴｣の方向(図中の点線の方向)の曲率が最大で，それと直交する輪の延長線上の方向(図中の実線の方向)の曲率が最小である．そしてそれら最大曲率と最小曲率を主曲率とよぶ．そしてそれらの積をガウス曲率という．Fig. 11c のように反り返った曲面の場合は，最大曲率と最小曲率が異なる符号を持つと考えるので，それらの積であるガウス曲率は負の値をもつ．球面上ではどの方向を向いても曲率がその球の半径の逆数に等しく一定であるから，曲率は球面上の位置と方向によらず一定である．単位球の曲率は 1 である．また，平面ではどの方向でも曲率が 0 で，ガウス曲率も 0 である．曲面上の 3 点を測地線で結んで描かれる三角形が考えられるが，Figs. 11b，c にはそうした三角形が描かれている．三角形の内角の和は，ガウス曲率が 0 の面では 180°，正符号の曲面では 180° より大きく，負号の

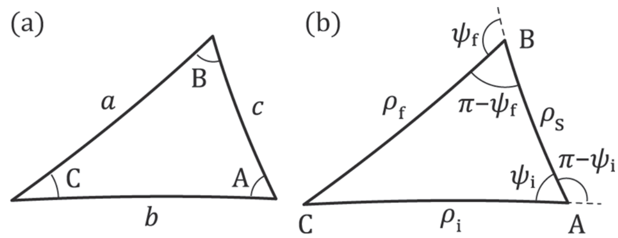

Fig. 12. (a) Hyperbolic triangle. (b) The correspondence between a hyperbolic triangle and the parameters of pre- and post-strain ellipses. (a)双曲三角形．(b)変形前後の楕円のパラメータと双曲三角形の対応．

曲面では 180° より小さい．また，その値の 180° からのずれは，球面三角形なら面積に比例する．

4.4　双曲幾何学

一様変形による楕円の変換則と球面三角法の公式を §4 で紹介した．すなわち前者は，

$$\cosh\rho_f = \cosh\rho_i \cosh\rho_s - \sinh\rho_i \sinh\rho_s \cos\psi_i \tag{25}$$

$$\sinh\rho_f \sin\psi_f = \sinh\rho_i \sin\psi_i \tag{26}$$

である．球面三角形の余弦公式と正弦公式は，

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{27}$$

$$\sin a \sin B = \mathrm{sih}\, b \sin A \tag{28}$$

であった．並べてみると，これら 2 組の式が似ていることに気づくだろう．このことは何を意味するのだろうか．球面三角法の公式で，a，b，c は三角形の頂点のあいだの測地距離である．それらに虚数単位 i を付けて ia，ib，ic とし，公式 $\cos \mathrm{i}x = \cosh x$ および $\sin \mathrm{i}x = \mathrm{i} \sinh x$ を使うと，式(27)，(28)は

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos A \tag{29}$$

$$\sinh a \sin B = \sinh b \sin A \tag{30}$$

と，みごとに式(25)，(26)と同じ形になる．ガウス曲率が−1という一定値をもつ曲面を想定すると，じつは式(29)，(30)は，その上の三角形(双曲三角形, hyperbolic triangle)の余弦定理と正弦定理なのである(中岡, 1993)．それはFig. 12aに示すような三角形である．双曲三角形の内角の和は180°より小さいので，図もそのように描いている．次回，双曲三角形の余弦定理を導出する．

式(29)，(30)の変数を$a \to \rho_f$，$b \to \rho_i$，$c \to \rho_s$，$A \to \psi_f$，$B \to \pi - \psi_f$と置き換えると(Fig. 12b)，それらの式は楕円の変換公式(25, 26)になる．また，$a \to \rho_i$，$b \to \rho_f$，$c \to \rho_s$，$A \to \psi_f$と置き換えると，

$$\cosh \rho_i = \cosh \rho_f \cosh \rho_s + \sinh \rho_f \sinh \rho_s \cos \psi_f$$

となる．この式は歪み解析のためにDunnet(1969, Eq. 28)が導いた式にほかならない．Fig. 12bの双曲三角形の正弦定理のほうは，$\sinh \rho_f \sin(\pi - \psi_f) = \sinh \rho_i \sin \psi_i$だが，$\sin(\pi - \psi_f) = \sin \psi_f$なので，$\sinh \rho_f \sin \psi_f = \sinh \rho_i \sin \psi_i$．これはRf/φ歪み解析の教科書でLisle(1985, Eq. A1.1)が示した式である．

双曲三角形が横たわるこの2次元の曲面を，形容矛盾ではあるが，双曲平面とよぶ．そしてそれを含む3次元空間をMinkowski空間とよび，この曲面上の幾何学を双曲幾何という．上で示した双曲三角形の三角法と歪み解析の式との対応関係は，Minkowski空間の幾何学として歪み解析を定式化できることを示している．本講座の次回以降では，この路線で歪み解析に誤差論を導入し，また，変形解析，運動論的渦度解析まで議論を展開する．

謝辞　査読者の石井和彦氏ならびに担当編集委員の増田幸治氏のコメントにより，本稿は読みやすくなった．また，本研究でJSPS科研費JP22340151の助成を受けた．記して感謝の意を表する．

文　献

Dunnet, D., 1969, A technique of finite strain analysis using elliptical particles. *Tectonophysics,* **7**, 117–136.

Elliott, D., 1970, Determination of finite strain and initial shape from deformed elliptical objects. *Geol. Soc. Amer. Bull.,* **81**, 2221–2236.

Hu, M. K., 1962, Visual pattern recognition using moment invariants. *IRE Trans. Inf. Theory,* **8**, 179–187.

Lisle, R. J., 1985, *Geological Strain Analysis: A Manual for the Rf/φ Method*. Pergamon Press, Oxford, 99p.

Mulchrone, K. F. and Choudhury, K. R., 2004, Fitting an ellipse to an arbitrary shape: Implications for strain analysis. *Jour. Struct. Geol.,* **26**, 143–153.

Nadai, A., 1950, *Theory of Flow and Fracture of Solids,* Vol. 1. McGraw-Hill, New York, 572p.

中岡 稔(Nakaoka, M.), 1993, 双曲幾何学入門：線形代数の応用(*Introduction to Hyperbolic Geometry: Application of Linear Algebra*)*．サイエンス社(Saiensu-sha Co.), 224p.

Pollard, D. D. and Fletcher, R. C., 2005, *Fundamentals of Structural Geology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 500p.

Ramsay, J. G., 1967, *Folding and Fracturing of Rocks*. McGraw-Hill, New York, 568p.

Teague, M. R., 1980, Image analysis via the general theory of moments. *Jour. Opt. Soc. Amer.,* **70**, 920–930.

戸田盛和(Toda, M.), 1989, ベクトル解析(*Vector Analysis*)*．岩波書店(Iwanami Shoten), 237p.

Wheeler, J., 1984, A new plot to display the strain of elliptical markers. *Jour. Struct. Geol.,* **6**, 417–423.

山路 敦(Yamaji, A.), 2013, 最近のRf/φ歪み解析：理論と実践．地質雑(*Jour. Geol. Soc. Japan*), **119**, 794–798.

Yamaji, A., 2013, Two-dimensional finite deformations evaluated from pre- and post-deformation markers: Application to balanced cross sections. *Jour. Struct. Geol.,* **51**, 144–155.

山路 敦(Yamaji, A.), 2016, 歪み解析と変形解析の数理：1．一様変形．地質雑(*Jour. Geol. Soc. Japan*), **122**, 275–286.

Yamaji, A. and Maeda, H., 2012, Determination of 2D strain from a fragmented single ammonoid. *Island Arc,* **22**, 126–132.

[URL1]National Institutes of Health, ImageJ, http://imagej.nih.gov/ij/.

* English translation from the original written in Japanese.