

歪み解析と変形解析の数理：2. 微小変形とその地質学的計測

Lecture note on the theories of strain and deformation analyses : 2. Infinitesimal deformations and their geological measurements

山路 敦*

Atsushi Yamaji*

2016年2月3日受付.

2016年6月6日受理.

* 京都大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻
Division of Earth and Planetary Sciences,
Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

Corresponding author: A. Yamaji,
yamaji@kueps.kyoto-u.ac.jp

1. はじめに

この講座の第2回ではまず、微小歪みテンソルについて解説する。そして、その応用として、方解石双晶による歪み解析について議論する。また、断層群や鉱脈群による岩体の変形を定量化する方法を考える。さらにまた、断層関連褶曲の成長ともなう歪みの計算法について解説する。

伸ばされた礫やひしゃげた化石など、歪み解析の対象といえば Ramsay and Huber (1983) やパスキエ・トゥロウ (1999) が紹介しているように、延性変形した変成岩を対象とすることが多い。しかし、脆性変形にも条件によっては適用可能である。すなわち、脆性変形を連続的な変形と見なすことで歪み解析や変形解析を可能とする、粗視化 (coarse gaining) によってである。断層変位は断層面をはさんで反対向きに生じる。つまり変位は断層面をはさんで不連続である。断層群による岩体の脆性変形は不連続的である。しかし、Fig. 1a のように岩体のサイズにくらべて変位量の小さな断層ばかりなら、Fig. 1b のように粗視化してみれば、連続的な変形で近似できるようになる。さらに一様変形で近似して、歪み楕円を描くこともできる。今回は、塑性変形だけでなく、こうした粗視化をしたうえで、変形を定量的に評価する方法も紹介する。

2. 微小歪み

微小歪みの計算に便利な微小歪みテンソルを導入する。まず基本を再確認しよう。変形で長さが L から L' になったとき、 $(L' - L)/L$ を歪み (strain) という。これはスカラー量だが、岩石の歪みは南北に伸び東西に縮むというぐあいに、方向によって歪み量が異なることがある、つまり異方的な歪みである。微小変形の場合について、異方的な歪みを表現する微小歪みテンソルを導入。そのために、岩体の中のある粒子

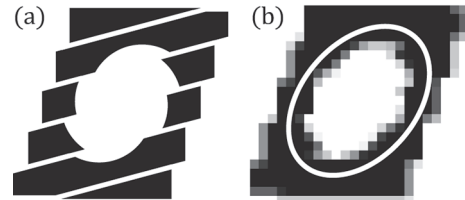


Fig. 1. Schematic illustration of coarse gaining for the approximation of discontinuous brittle deformation using a homogeneous one. 粗視化で不連続変形を一様変形で近似する例.

の変形前後の位置ベクトルを、それぞれ ξ および x とする。変位 $u = x - \xi$ が小さいとし、本講座第1回 (山路, 2016) で紹介した変形勾配テンソル $F = \partial x / \partial \xi$ を使う。 ξ は任意の位置ベクトルなので、その成分 ξ_1, ξ_2, ξ_3 は互いに独立である。ゆえに、 i と j をそれぞれ1から3までの整数とすると、 $i = j$ なら $\partial \xi_i / \partial \xi_j = 1$ であり、 $i \neq j$ なら $\partial \xi_i / \partial \xi_j = 0$ である。これらに注意すると、

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial (\xi_i + u_i)}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \approx \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

ただし δ_{ij} は Kronecker デルタで、単位行列 I の第 ij 成分に等しい。また、最後の近似のところでは $x \approx \xi$ を使った (この近似の誤差は微小歪みテンソルのノルムと同程度である (徳岡, 1999, p. 17)). ϵ_{ij} を第 ij 成分とする行列のノルムとして、例えば Frobenius ノルム ($\sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij}^2$)^{1/2} を使う。上の式は $F = I + \nabla u$ と書くことができる。ただし、この最後の項は変位勾配テンソル $\nabla u = \partial u / \partial x$ である。本講座の第1回で示した微小変形の式 $F = I + \delta F$ と比べることにより、

$$\delta F = \nabla u. \quad (1)$$

という式が得られる。

2.1 微小歪みテンソル

始点を共有する単位ベクトル a, b を考え、それらの変形後のベクトルを $a' = Fa = (I + \nabla u)a$ 、 $b' = (I + \nabla u)b$ とすると、

$$a' \cdot b' - a \cdot b = a^T (I + \nabla u)^T (I + \nabla u) b - a \cdot b.$$

微小変形を仮定しているから $\nabla u \approx 0$ であり、また、 $(I + \nabla u)^T (I + \nabla u) \approx I + \nabla u + (\nabla u)^T$ 。ゆえに、

$$a' \cdot b' - a \cdot b = a^T [\nabla u + (\nabla u)^T] b \quad (2)$$

と近似できる。そこで、

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (3)$$

として、これを微小歪みテンソル (infinitesimal strain tensor) または単に歪みテンソルという。成分で書くと、

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

である。この式で i と j を交換しても結果は変わらないから、 $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^T$ 、すなわち $\boldsymbol{\epsilon}$ は対称である。実対称行列の固有値は実数で、固有ベクトルは互いに直交する (本講座第 1 回)。この固有ベクトルの方向が、微小歪みの場合の主歪み軸である。

さて、 $\boldsymbol{\epsilon}$ の基本的性質をみておこう。式 (2) は変形前後のベクトルの内積がどう変化するかを表す式だが、 $\boldsymbol{\epsilon}$ を使うと、

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2\mathbf{a}^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{b} \quad (4)$$

となる。任意の単位ベクトルを \mathbf{e} とし、さらに $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{e}$ の場合を考える。また、 $\mathbf{a}' = \mathbf{F}\mathbf{a}$ 、 $|\epsilon| \ll 1$ 、 $|\mathbf{a}'| = (1 + \epsilon)\mathbf{a}$ とすると、式 (4) の左辺は $(1 + \epsilon)^2 \mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^2 \approx 2\epsilon \mathbf{a}^2$ 。右辺の方は $2\mathbf{a}^2 \mathbf{e}^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}$ 。したがって、

$$\epsilon = \mathbf{e}^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}.$$

これを \mathbf{e} 方向の歪みという。つまりその方向に $(1 + \mathbf{e}^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e})$ 倍に伸びるわけである。 $\boldsymbol{\epsilon}$ が与えられたなら、任意の方向の歪みがこの式で計算できるわけである。第 1 座標方向に \mathbf{e} を選ぶと、 $\mathbf{e} = (1, 0, 0)^T$ だから、上の式の右辺は

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_{11}.$$

第 2、第 3 座標軸方向からは同様に ϵ_{22} と ϵ_{33} が出てくる。つまり、 $\boldsymbol{\epsilon}$ の対角成分は座標軸方向の歪みを表すことがわかる。では非対角成分はどうか。

今度は \mathbf{a} 、 \mathbf{b} を互いに直交する変形前の単位ベクトルとすると $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 。式 (4) はこの場合、 $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = 2\mathbf{a}^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{b}$ 。それらの単位ベクトルの方向の歪みを ϵ_a および ϵ_b とすると、 $|\mathbf{a}'| = 1 + \epsilon_a$ 、 $|\mathbf{b}'| = 1 + \epsilon_b$ 。ただし、 $|\epsilon_a| \ll 1$ かつ $|\epsilon_b| \ll 1$ である。変形後のベクトルのなす角を θ とすると、微小変形だから $\theta \approx 90^\circ$ であり、それゆえに $\cos \theta \approx 0$ であることに注意すると、 $\epsilon_a \cos \theta$ と $\epsilon_b \cos \theta$ が 2 次の微小量として省けることがわかる。したがって、 $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = (1 + \epsilon_a)(1 + \epsilon_b) \cos \theta = (1 + \epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_a \epsilon_b) \cos \theta \approx \cos \theta$ 。ここで $\gamma = 90^\circ - \theta$ とすると $\cos \theta = \sin \gamma \approx \gamma$ なので、

$$\gamma = 2\mathbf{a}^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{b}. \quad (5)$$

となる (石原, 1991)。直交していた 2 本の単位ベクトルにはさまれる角が、変形で $\gamma \approx \tan \gamma$ だけ減少するわけである。ゆえに、上の式の γ は工学剪断歪みにほかならない。 $\mathbf{a} = (1, 0, 0)^T$ 、 $\mathbf{b} = (0, 1, 0)^T$ の場合、

$$\frac{\gamma}{2} = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_{12}.$$

つまり非対角成分 ϵ_{ij} は、第 i 座標方向と第 j 座標軸方向の半

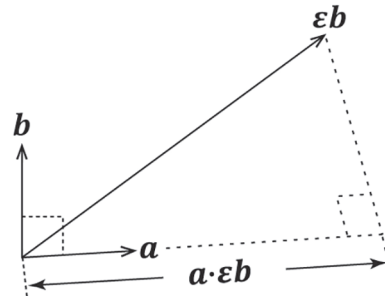


Fig. 2. Geometrical illustration of Eq. (5). 剪断歪みの式 (5) の幾何学的解釈。

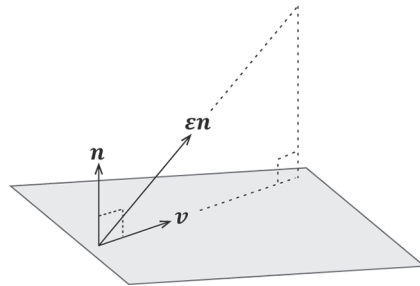


Fig. 3. Shear strain acting on the plane with the unit normal, \mathbf{n} , has the maximum along the direction, \mathbf{v} , that is the orthogonal projection of $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{n}$ onto the plane. 単位ベクトル \mathbf{n} に直交する面に作用する剪断歪みは、 $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{n}$ をその面に正射影した方向 \mathbf{v} で最大になる。

直線のなす角がこうむる工学剪断歪みの 1/2 に等しい。これを一般には剪断歪みとよぶ。本講座では、たんに剪断歪みと云ったら $\gamma/2$ のほうを指すことにする。

構造地質学の教科書では、横方向の単純剪断変形で縦方向の線が傾く角度 ϕ を使って、工学剪断歪みを $\tan \phi$ と定義するのが普通である。剪断方向を基準としてそれと直交する線の方向変化をみるわけである。しかし式 (5) で \mathbf{a} 、 \mathbf{b} を交換しても結果は変わらないので、剪断歪みという量は、 \mathbf{a} からみた \mathbf{b} の方向変化とか、その逆であるとかというような、主客の関係を含意しない。剪断歪みを表す式 (5) の幾何学的解釈を Fig. 2 に示す。剪断歪みは、ベクトル $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{b}$ を単位ベクトル \mathbf{a} の延長線上に正射影したときの影の長さにはかならない (本講座第 1 回 Fig. 3a)。

【問題】 体積変化がないなら $\text{trace } \boldsymbol{\epsilon} = 0$ であることを示せ。

【答え】 変形勾配テンソルを極分解する： $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ 。ここで \mathbf{R} は体積変化に寄与しないので、 \mathbf{V} についてのみ考える。そこで \mathbf{V} の固有ベクトルの方向に直交デカルト座標の座標軸をとり、単位長さの辺が座標軸と平行な立方体を考える。その体積は 1 である。この座標系では $\boldsymbol{\epsilon}$ が対角化されるので、変形後の体積は $(1 + \epsilon_{11})(1 + \epsilon_{22})(1 + \epsilon_{33}) \approx 1 + \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ したがって、体積の増分は $\text{trace } \boldsymbol{\epsilon}$ である。つまり、体積変化がなければ $\text{trace } \boldsymbol{\epsilon} = 0$ である。

【問題】 ある岩体が一様な微小歪み $\boldsymbol{\epsilon}$ をこうむり、その結果、内部の割れ目で断層変位がおきるとする。断層変位は最大剪断歪みの方向におきるとすると、単位法線ベクトルが \mathbf{n} である割れ目の変位方向はどうなるか計算せよ。

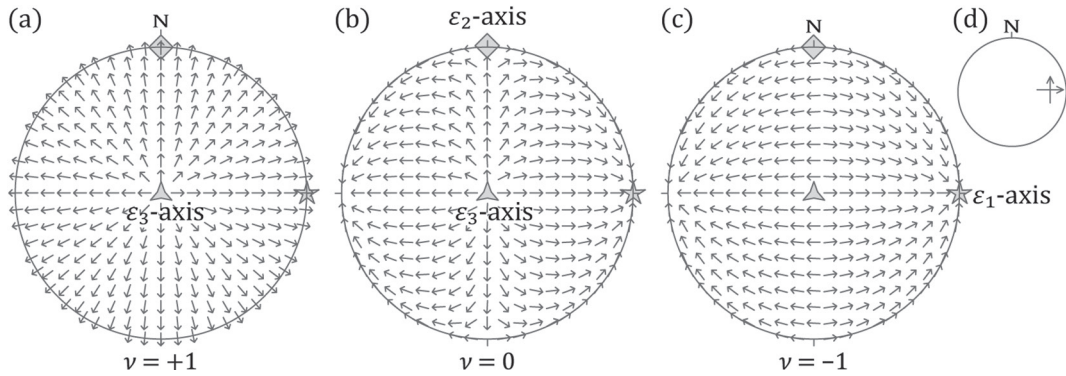


Fig. 4. (a–c) Tangent-lineation diagrams showing the directions of maximum shear strain for the three Lode parameters, $\nu = \pm 1$ and 0. (d) Diagram f depicting the overall maximum shear strain directions for (a–c). (a–c) 最大剪断歪みの方向を示す tangent-lineation diagram を主歪みの値が 3 つの場合について示す。 (d) Tangent-lineation diagram の説明。

【答え】 この面上に横たわる単位ベクトルを \mathbf{v} とすると、これは 2 条件 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ および $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 1 = 0$ を満たす。これらの制約条件のもと、剪断歪み $\gamma = 2\mathbf{v}^T \mathbf{e}\mathbf{n}$ を最大にする \mathbf{v} は、Lagrange の未定乗数法で決定することができる。ここでは制約条件が 2 つなので、未定乗数を λ, μ とすると、求めるのは $2\mathbf{v}^T \mathbf{e}\mathbf{n} - \lambda(\mathbf{v}^T \mathbf{v} - 1) - \mu \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ に極値をとらせる \mathbf{v} である。この式を \mathbf{v} で微分してゼロとおく： $2\mathbf{e}\mathbf{n} - 2\lambda \mathbf{v} - \mu \mathbf{n} = \mathbf{0}$ 。これを整理して、 $\mathbf{v} = (1/\lambda)\mathbf{e}\mathbf{n} - (\mu/2\lambda)\mathbf{n}$ 。左辺の \mathbf{v} は断層面上に横たわるベクトルであり、右辺第 2 項のベクトルは断層面に直交するベクトルである。つまり、 $(1/\lambda)\mathbf{e}\mathbf{n}$ を断層面に正射影した方向に \mathbf{v} が存在するということである。その向きは Fig. 3 からわかるように、 $\mathbf{e}\mathbf{n}$ を正射影した向きで最大、 $-\mathbf{e}\mathbf{n}$ を正射影した方向で最小になる。つまり、断層変位は $\mathbf{e}\mathbf{n}$ を正射影した方向に生ずる。ただし、上盤の変位方向を考えるとすると、 \mathbf{n} が断層面から見て上盤側を指すように定義する。上記の正射影の方向とは、 $(\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T)\mathbf{e}\mathbf{n}$ である。この括弧の中身は射影子(山路, 2000)である。

【問題】 微小歪みテンソル \mathbf{e} が与えられたとして、任意の方向の平面上での最大剪断歪みの方向は上の問題のように計算できる。ただし、伸びを正符号の歪みとする。方向の異なる多数の平面を考えたとき、それらの面における最大剪断歪み方向が orthorhombic 対称性をもつことを示せ。

【答え】 単位法線ベクトルを \mathbf{n} とする平面では、最大剪断歪みの方向は $\mathbf{e}\mathbf{n}$ をこの面に正射影した方向であるから、 $(\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T)\mathbf{e}\mathbf{n}$ というベクトルが指し示す方向である。ただし、 \mathbf{nn}^T は第 ij 成分が $n_i n_j$ という正方行列である。簡単のため、主歪み軸と平行に座標軸を選び、主歪みを $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ とすると(ただし $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$)、最大剪断歪み方向は、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (1 - n_1^2)n_1\epsilon_1 - n_1n_2^2\epsilon_2 - n_1n_3^2\epsilon_3 \\ -n_1^2n_2\epsilon_1 + (1 - n_2^2)n_2\epsilon_2 - n_2n_3^2\epsilon_3 \\ -n_1^2n_3\epsilon_1 - n_2^2n_3\epsilon_2 + (1 - n_3^2)n_3\epsilon_3 \end{pmatrix}$$

右辺の第 i 成分は、 n_i の奇数次の項のみで偶数次の項を含まない。したがって n_i の符号を換えると、 v_i の符号も換わるが v_i の絶対値に変化はない。すなわち、もとのペア (\mathbf{n}, \mathbf{v}) にたいして n_i の符号を換えたペア $(\mathbf{n}', \mathbf{v}')$ は、座標平面に対して対称に配置している。つまり直交した 3 面について鏡像

ということなので、orthorhombic 対称ということである。ただし、 $\epsilon_1 = \epsilon_2$ と $\epsilon_2 = \epsilon_3$ の場合は軸対称の歪みなので、最大剪断歪みの方向も軸対称である。そのことを示す tangent-lineation diagram を Figs. 4a–c にかかげる。この図の ν は前回紹介した Lode 比で、歪み楕円体は $\nu = -1$ なら歪み楕円体はハマキ型、 $\nu = +1$ なら円盤型、 $\nu = 0$ なら $\epsilon_2 = (\epsilon_1 + \epsilon_3)/2$ である。Fig. 4d はこのダイアグラムの見方を説明する図で、下半球等積投影図のなかの矢印の位置が考えている面の極の方向を表す。またこの場合、矢印の向きは下盤の受ける最大剪断歪み方向を示す。したがって、その図の右向き矢印は西傾斜の面で下盤が東向きの剪断を受けることを意味する。また、上向きの矢印は、西傾斜の面で下盤が北向きの剪断を受けるわけである。

2.2 回転テンソル

一般に、正方行列を \mathbf{A} とすると、 $\mathbf{A} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2 + (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)/2$ であるが、右辺第 1 項は対称行列であり、第 2 項は反対称行列である。後者は対角成分がゼロで、それ以外の第 ij 成分と第 ji 成分は、絶対値が等しく符号が逆である。微小歪みテンソルは変位勾配テンソル $\nabla \mathbf{u}$ の対称部分を取り出したものである。反対称部分のほう

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T] \tag{6}$$

を微小回転テンソル(infinitesimal rotation tensor)という。定義により、式 $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{e} + \mathbf{W}$ がなりたつ。成分で書くとこれは

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列の非対角成分から構成したベクトルを $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ として、 $\nabla \mathbf{u}$ の第 ij 成分が $\partial u_i / \partial x_j$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^T \\ &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \end{aligned}$$

と書く。つまり、最後の等号のところで $\nabla \times \mathbf{u}$ を定義してい

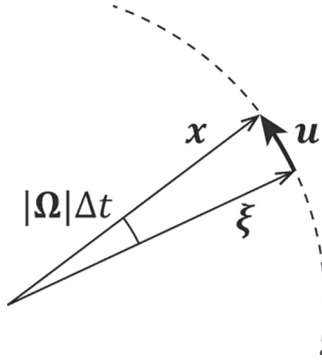


Fig. 5. Displacement of rigid-body rotation, \mathbf{u} , in a time interval, Δt , with the angular velocity, $|\Omega|$. 剛体回転のときの変位 \mathbf{u} と角速度 $|\Omega|$, 時間 Δt の関係.

る(厳密には $\mathbf{u} \times \nabla$ と書くべきところだが(久田, 1992, p. 31), 微分演算子の左側にその対象である \mathbf{u} を置く説明を省くため, また, $\nabla \times$ という記号を本講座のほかのところでは使わないので, 微分演算子の右側にその対象を書く通常の流儀をここでは採用する). 剛体回転している場合は (Fig. 5), 角速度ベクトルを Ω とすると, 微小時間 Δt での変位ベクトルは

$$\mathbf{u} = (\Omega \times \mathbf{x}) \Delta t = \begin{pmatrix} \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2 \\ \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3 \\ \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1 \end{pmatrix} \Delta t. \quad (7)$$

角速度ベクトルは回転軸と平行で, 右ねじの進む向きをもち, 大きさ $|\Omega|$ が角速度を表す. この式に $\nabla \times$ を作用させて $(\nabla \times \mathbf{u})/2 = \Omega \Delta t$ をえる. これを式(7)と比べることにより, 剛体回転の場合, \mathbf{w} は回転による変位にほかならないことがわかる. \mathbf{W} は \mathbf{w} とまったく同じ情報をになっているから, \mathbf{W} も回転を表す. その回転は \mathbf{w} を軸とし, 回転角が $|\mathbf{w}|$ というものである.

前回紹介した極分解の式は, $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ である. 回転は微小変形では $\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{W}$ になり, 同じ角度の逆回転は $\mathbf{R}^T = \mathbf{I} - \mathbf{W}$ である. また, $\mathbf{U} = \mathbf{I} + \mathbf{\epsilon}$ であり, $\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T = (\mathbf{I} + \mathbf{W})(\mathbf{I} + \mathbf{\epsilon})(\mathbf{I} - \mathbf{W}) \approx \mathbf{I} + \mathbf{\epsilon}$. したがって有限変形の場合の極分解の式は, 微小変形では $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{\epsilon} + \mathbf{W}$ となる.

3. 方解石双晶歪み解析

双晶のなかには, 結晶格子が力を受けて, ずれ動くことでできるものがある. すなわち, 機械的的双晶である (Fig. 6). その動きはミクロン・スケールの単純剪断である. 微小な単純剪断も多数の結晶粒子でおこなえば, 肉眼スケールでみて方解石のかたまりが塑性変形したように見える. そこで, ここでは, そうした多結晶体の歪みを, 結晶スケールの微小な単純剪断から見積もるために, 最近でもしばしば使われている方法 (e.g., Paulsen et al., 2014; Tripathy and Saha, 2015), すなわち Groshong (1972) の歪み解析法 (calcite strain gauge technique) を批判的に検討する. 方解石の機械的的双晶は, 歪み計としては確度 (accuracy) が低いというのが本節の結論である.

双晶は結晶格子が連続性を保ったまま, 結晶方位が結晶中

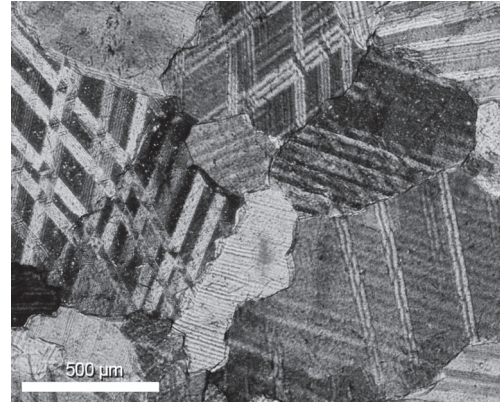


Fig. 6. Photomicrograph of twin lamellae in calcite. 平行な縞状あるいは格子状になった方解石の双晶ラメラ. 結晶粒ひとつにも複数方向のラメラが存在することに注意. クロスニコール.

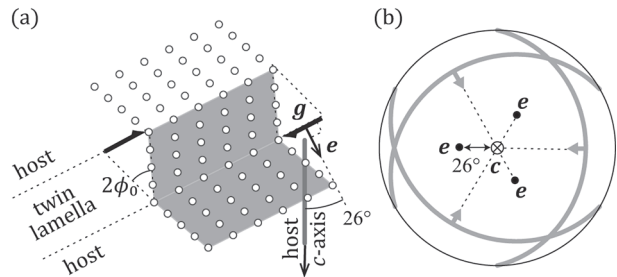


Fig. 7. The geometry of calcite e-twinning that results in simple shear along a twin lamella. (a) Schematic diagram of the calcite lattice structure surrounding a twin. (b) Stereoplot showing the orientations that can be twinned. 方解石の機械的的双晶 (e 双晶). (a) 双晶ラメラの形成により, ラメラに沿って結晶は太矢印 \mathbf{g} の方向に単純剪断変形をこうむる. ラメラの両側のホスト中の c 軸は, ラメラの極の方向 e と 26° で交差する. (b) ホストの c 軸を中心としたステレオ投影で e 双晶およびそれに沿った剪断変形の方向が c 軸のまわりに 3 回対称をなす. 剪断変形は c 軸を立てたとき, 逆断層センスで生ずる. 黒丸はラメラの極で, 太線はラメラの方向を表す大円.

のある面をさかいにして変わっている状態であるから, 連続性を保つという拘束条件のために, 結晶格子に対して特定の方向にでき, しかもずれ動く方向も向きも特定の方向である (Fig. 7). 方解石の場合それは e 面とよばれる c 軸と 64° で交わる面上で生じ, 偏光顕微鏡のクロスニコールで見ると明暗の縞模様ないし細い線としてみえる. その帯ないし線を双晶ラメラとよび, e 面に形成される双晶ラメラを e 双晶とよぶ. この双晶ラメラが形成されうる面は c 軸のまわりに 3 回対称をなしている. ひとつの方解石結晶粒のなかで, e 双晶を作りうる面の方向が 3 方向あるわけである. それら潜在的に e 双晶となる面のうち, 実際に双晶を作った面を twin 面, まだできていない面を untwin 面という. Fig. 6 の写真には 2 方向のラメラができている結晶粒子が複数写っているが, 右下と右上の粒子にはそれぞれ 1 方向のラメラしかない. 1 枚の双晶ラメラに対して, その両側にあつて結晶方位がもとのままである部分を, そのラメラのホスト部分という. この部分の c 軸とラメラが 64° で交わるわけである. Fig. 7a の

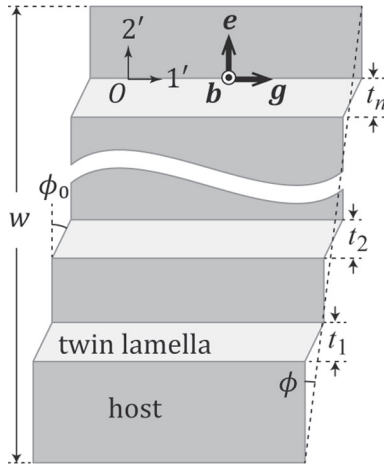


Fig. 8. Schematic illustration of the calcite strain gauge technique of Groshong (1972). 粒径 w の方解石結晶中に平行な n 枚の双晶ラメラができることによる結晶の単純剪断変形。ラメラの法線 (e) とラメラ形成時の運動方向 (g) に平行な模式的断面。

ように、ラメラの形成により、ラメラ部分で単純剪断変形がおきる。その剪断角 ϕ_0 は 19.25° である。

【問題】 ラメラの三次元的な方向は、定方位で採取したサンプルの定方位薄片をユニバーサルステージで観察することで測定できる。また、方解石の c 軸の方向もユニバーサルステージで測定することができる。双晶のホスト部分の c 軸は Fig. 7 のように、双晶ラメラと 64° でまじわる。これらを踏まえ、方解石のある結晶粒子で双晶ラメラの方向と c 軸の方向が測定されたとして、その双晶ラメラ形成にともなう twin gliding の方向を表す (Fig. 7a) 単位ベクトル g を決定せよ。

【答え】 ラメラの極を表す単位ベクトルを e 、 c 軸と平行な単位ベクトルを c とする。ただし、それらのベクトルが鋭角をなすように向き付けする。Fig. 7b のように、 e から c のほうに 90° 回転した方向が g になる。互いに直交する e と g のあいだの球面線形補間の式 (向井, 2012) が $c = (\sin 26^\circ)e + (\cos 26^\circ)g$ であるから、

$$g = \frac{c - (\sin 26^\circ)e}{\cos 26^\circ}$$

ここで 26° というのは、ラメラの極とホスト部分の c 軸のなす角である。つまり c 軸とラメラの三次元的方向を測定すれば、 e と g が決まるわけである。

3.1 Groshong の歪み解析

結晶 1 粒のなかの平行な双晶ラメラ群を双晶セット (twin set) という。ある双晶セットが n 枚の双晶ラメラからなるとし、ラメラに直交する方向の結晶粒子のさしわたしを w とし、この双晶セットの形成による結晶の単純剪断変形を見積もる (Fig. 8)。1 枚のラメラ形成にともなって、そのラメラは工学剪断歪み $\tan \phi_0$ をこうむるとすると、結晶構造の制約 (Fig. 7) により $\phi_0 \approx 19^\circ$ である。各ラメラの厚さを t_1, t_2, \dots, t_n とすると、第 i 番のラメラに沿った変位量は $t_i \tan \phi_0$ である。ゆえに、 n 枚のラメラによる総変位量は $\tan \phi_0$

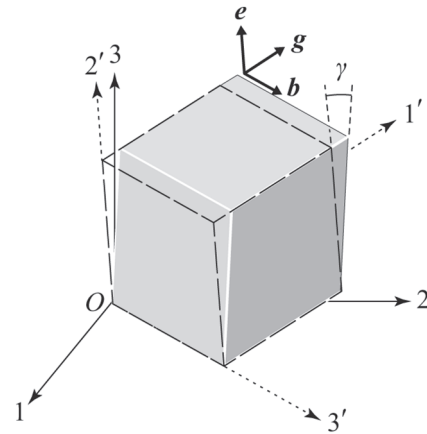


Fig. 9. Rectangular Cartesian coordinates with the common origin to consider the simple shear of a crystal grain by mechanical twinning. 機械的雙晶の形成による結晶粒の単純剪断変形を考えるための模式図。単位ベクトル e, g, b は、それぞれ双晶ラメラの法線、双晶形成による運動方向、それらに直交する方向を表し、プライム付きの座標はそれらに平行に設定されている。

$\sum_{i=1}^n t_i$ 。したがって、この結晶の受ける工学剪断歪みは

$$\gamma = \frac{1}{w} \tan \phi_0 \sum_{i=1}^n t_i \tag{8}$$

となる。Fig. 6 の例のように、ひとつの結晶のなかで双晶ラメラの幅の和が結晶の幅の半分にもなると、その工学剪断歪みは式 (8) により、 $\gamma = (\tan \phi_0)/2 \approx 17\%$ である。自乗したらもとの数より一桁以上小さくなる場合を微小というなら、 17% という数値は微小とはやや言いがたい。有限変形では変形の順序が全変形に効いてくるが、そうした粒子が複数存在する場合、双晶ラメラができた順番を知ることはおそらく不可能である。つまり、双晶ラメラが密に存在するサンプルでは、歪みの見積もりは誤差が大きい。ここで説明する歪み測定法は微小歪みを仮定するので、双晶の密度が比較的小さなサンプルに適用すべき方法である。

さて、こうして評価された工学剪断歪みはスカラー量であるが、それを微小歪みテンソルに変換しよう。まず、このラメラ群の形成による変位方向を第 1' 座標とし、ラメラの法線方向を第 2' 座標とする直交デカルト座標を $O-1'2'3'$ とする (Fig. 9)。また、第 1' 座標方向、第 2' 座標方向をそれぞれ単位ベクトル g, e で表す。また、 b を $g \times e$ の方向の単位ベクトルとする。この双晶セットの形成による歪みを表す歪みテンソルを ϵ とすると、式 (5) により $\gamma = e^T \epsilon g$ である。これと非圧縮条件 $\text{trace } \epsilon = 0$ をあわせて ϵ_{33} を消去すると、

$$\begin{aligned} \gamma = & (e_1 g_1 - e_3 g_3) \epsilon_{11} + (e_2 g_2 - e_3 g_3) \epsilon_{22} \\ & + (e_1 g_2 + e_2 g_1) \epsilon_{12} + (e_2 g_3 + e_3 g_2) \epsilon_{23} \\ & + (e_3 g_1 + e_1 g_3) \epsilon_{31} \end{aligned} \tag{9}$$

となる。左辺は観察される双晶セットから式 (8) により見積もられる量であり、右辺の 5 つの括弧でくくった量も観察から得られる量である。つまり、式 (9) は ϵ の 5 成分を未知数として含むことになる。そこで、Groshong (1972) は ϵ

を決定するために、薄片のなかで近隣の方解石結晶はすべて同じ歪みをこうむったと仮定した。つまり、どの結晶にとっても $\boldsymbol{\varepsilon}$ は同一であるとするわけである。この仮定の問題点を、次のサブセクションでとりあげる。さて、この仮定をおくと、6つ以上の双晶セットで γ , \mathbf{e} , \mathbf{g} を測定すれば、式(9)の右辺に示された $\boldsymbol{\varepsilon}$ の5成分が最小自乗的に決定できる。Groshong が仮定するのは、(1) 最小自乗解が誤差をもつとしても、多数のデータセットを処理した結果は、正しい答えを中心にはばらつくであろうこと。(2) 多数の結晶粒子を含む範囲で変形が一樣であること。(3) 双晶は結晶成長ではなく変形によるものであること。(4) 双晶ラメラの幅の和が粒径の半分に満たないこと。半分なら剪断歪みは17%にもなる。これが歪み量の測定限界であること。そして、(5) 双晶セットの形成は独立であることである。

3.2 歪みの重ね合わせ

Groshong (1972) の議論とは違って、じつは式(9)から最小自乗的に歪みテンソルを決定する必要はなく、一組の双晶セットのデータ γ , \mathbf{e} , \mathbf{g} からその形成で達成される歪みテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ が次のようにしてただちに計算できるのである。まず、当該の双晶セットに固有の座標系 $O-1'2'3'$ において、この双晶セットの形成による変形勾配テンソルは、

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書くことができる。なぜなら \mathbf{e} 双晶形成で、結晶は単純剪断をこうむるからである。微小変形を仮定すると、変位勾配テンソルは $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$ なので、それを表す行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これを問題とするラメラとは無関係の外部座標系 $O-123$ での表現に書き換えるには、座標回転の行列 $\mathbf{Q} = (\mathbf{g}, \mathbf{e}, \mathbf{b})$ を使えばよい。すなわち、後者の座標系における変位勾配テンソルは、

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T = \gamma \begin{pmatrix} g_1 e_1 & g_1 e_2 & g_1 e_3 \\ g_2 e_1 & g_2 e_2 & g_2 e_3 \\ g_3 e_1 & g_3 e_2 & g_3 e_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

となる。この式の右辺はすべて観測可能な量からなる。したがって、当該双晶セットの形成による歪みが計算できて、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \\ &= \frac{\gamma}{2} \begin{pmatrix} 2g_1 e_1 & g_1 e_2 + g_2 e_1 & g_1 e_3 + g_3 e_1 \\ g_2 e_1 + g_1 e_2 & 2g_2 e_2 & g_2 e_3 + g_3 e_2 \\ g_3 e_1 + g_1 e_3 & g_3 e_2 + g_2 e_3 & 2g_3 e_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

である。最後の行列は剪断歪みの大きさ γ を含まず、剪断変形の方向についての情報のみをもつ。この行列を規格化歪みテンソル (reduced strain tensor) という。結晶の塑性論では、 $(g_i e_j + g_j e_i)/2$ を第 ij 成分とするテンソルを Schmidt テンソルという (e.g., 渋谷, 2011)。Schmidt テンソルもま

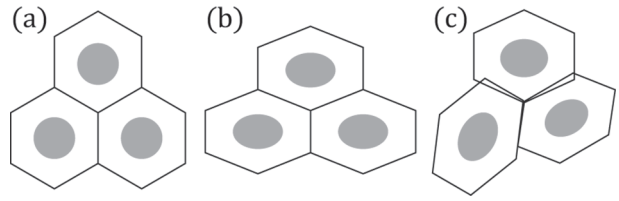


Fig. 10. Schematic illustration of the homogeneous and heterogeneous deformations of a crystalline aggregate. (a) The configuration of three crystal grains before deformation. (b) After homogeneous deformation. (c) After heterogeneous one. 多結晶体 (a) が一樣変形する場合と (b), そうでない場合 (c) を示す模式図。

た、変形の方向性の情報のみをもち、ここで γ で示されるような変形の大きさの情報をもたない。式(11)から、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は γ に比例することがわかる。この式により、一つの双晶セットによる歪みテンソルが計算できる。

【問題】 方解石の多結晶体のある薄片で、双晶セットが n 組観察されているとする。各セットの歪みテンソルは上のように算出される。そのことを前提に、 n セットを総合した全歪みを計算せよ。

【答え】 第 i セットによる歪みを $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ 、全歪みを $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ とする。第 i セットによる変形勾配テンソルは式(1)により、 $\mathbf{I} + \delta \mathbf{F}^{(i)} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}^{(i)}$ と書くことができる。本講座の第1回で示したように、全変形は $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I} + \delta \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I} + \delta \mathbf{F}^{(1)} + \dots + \delta \mathbf{F}^{(n)}$ 、すなわち $\nabla \bar{\mathbf{u}} = \nabla \mathbf{u}^{(1)} + \dots + \nabla \mathbf{u}^{(n)}$ である。ゆえに、式(3)により、

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T] = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} \quad (12)$$

となる。

3.3 見積もりは妥当か

そもそも方解石の多結晶体のなかで、1粒の結晶より大きな領域にわたって、すべての結晶の変形が一樣でありうるだろうか。Groshong (1972, p. 2026) は、一樣変形という仮定が1950年代におこなわれた石灰岩の変形実験の結果によって支持されるとしたが、それは妥当な議論だろうか。本サブセクションでは、結論として、方解石多結晶体のなかでの \mathbf{e} 双晶による変形が一樣であるという主張は、理論的には支持されないことを示す。また、1つの結晶粒のなかの双晶ラメラができる場所も、歪みに影響することを示す。

3.3.1 一樣性 歪みテンソルは式(11)により、一組の双晶セットからでも計算できる。Groshong (1972) が複数の結晶から最小自乗的に歪みテンソルを決定していることは、したがって、複数の双晶セットが示す歪みテンソルをある種平均化した歪みを算出しているのである。ゆえに、実験的に作用させた巨視的な歪みと平均化された歪みが調和的であることで、結晶スケールでの変形の一樣性が支持されるわけではない。

さて、多結晶体が一樣変形するなら、隣接する結晶粒子は同じ変形をこうむることになり、粒子間でギャップ(断裂)やオーバーラップは生じない。しかし、粒子ごとに異なる変形をする場合、それらが生じることになる (Fig. 10)。アルミニウム・銅・金のように面心立方格子を持つ多結晶体では、

結晶粒ごとに12もの方向のすべり系があって、各すべり面ごとに結晶格子は単純剪断を達成することができる。すべり系の数が多いために、各結晶粒子がどのような歪みを強制されても、多数のすべり系の動きを調整して、粒子間にギャップやオーバーラップを生じずに一様変形することができる。そのため面心立方格子を持つ金属は延性が高い(渋谷, 2011, p. 73)。

方解石の e 面は1つの結晶粒に3方向しかないわけだが、 e 双晶の形成で結晶粒は任意の歪みを達成できるだろうか。できないとすれば、破断や他の塑性変形機構が働いて隣接する多くの粒子で一様変形するか、または不均一な変形をするかである。これらの場合、 e 双晶による歪みを計測しても、結晶粒子のこうむった歪みを正しく見積もることはできない。まず、次の問題を考える。

【問題】 方向性の異なる微小単純剪断が n 系統存在するとして、その i 番目の工学剪断歪みを $q^{(i)}$ とする。それらの単純剪断を組み合わせて、非圧縮の任意の全歪みを達成できるだろうか。できるとしたら、最小の n はいくつか。ただし、それぞれの微小剪断の Schmidt テンソルは与えられているものとする。

【答え】 単純剪断の歪みテンソルは対称で、しかも非圧縮 (trace $\boldsymbol{\epsilon} = 0$) だから、 $\boldsymbol{\epsilon}$ の独立な成分は5つのみである。そこで、式(11)を次の形に書く：

$$\boldsymbol{\epsilon} = q \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ \epsilon_2 & \epsilon_4 & \epsilon_5 \\ \epsilon_3 & \epsilon_5 & -\epsilon_1 - \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

そしてこれを、5次元位置ベクトル $\boldsymbol{\epsilon} = q(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5)^T$ と同一視する。Schmidt テンソルが与えられているということは、 ϵ_1 から ϵ_5 までの5成分が与えられていることに等しい。全歪みについても同様に、等価な5次元位置ベクトル $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ が存在する。変形は微小なので、それは n 系統の単純剪断の重ね合わせに等しい： $\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = q^{(1)}\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} + \dots + q^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^{(n)}$ 。上付き添え字 (i) は第 i 番の双晶セットにかかわる量であることを示す。この問題は、位置ベクトル $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ が5次元空間の任意の点を指し示すためには、 n がいくつ以上でなければならないか、と言い換えることができる。方向性が異なる n 系統との前提なので $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^{(n)}$ は異なる方向をもつ。ところで、一次独立なベクトルが5本あれば、その一次結合で5次元空間のどの点も示すことができる。つまり、5系統の単純剪断の重ね合わせで任意の歪みを達成することができる (Reid, 1973, p. 148; 竹下, 1986)。

しかしここまでの議論では、剪断歪み q の値は正にも負にもなりうるとしていて、 e 双晶の形成にとまなう運動が \mathbf{g} 方向に生じて $-\mathbf{g}$ 方向には生じないという特殊事情を考慮していない。したがって、 $q^{(1)} > 0, \dots, q^{(n)} > 0$ であるとして考察をつけよう。ベクトル $q^{(1)}\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} + \dots + q^{(5)}\boldsymbol{\epsilon}^{(5)}$ では係数が正であるため、5本のベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^{(5)}$ を稜線とする五角錐の内部とその延長線上の点しか指し示すことができない (Fig. 11)。つまり、指定された $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ がその外部にあれば、それが示す歪みを与えられた5系統の単純剪断の重ね合わせで実現できないわけである。

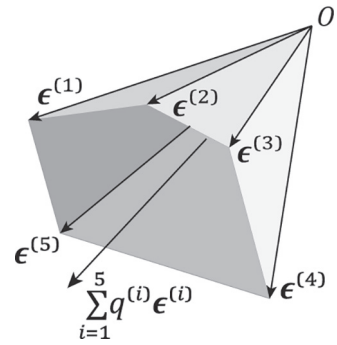


Fig. 11. Schematic illustration of a pentagonal pyramid defined by the linear combination of five linearly independent vectors in five-dimensional space. The coefficients of the combination are assumed to be positive in sign. 5次元空間において一次独立な5本のベクトルの線形結合によって定義される五角錐の模式図。ただし、線形結合の係数はすべて正の値とする。

そこで、非斉次 Farkas の定理(川崎, 2004)を考える。それはこの問題の文脈では、次のように書くことができる：

$q^{(1)} > 0, \dots, q^{(n)} > 0$ のとき、任意の5次元ベクトル $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ が n 本の5次元ベクトルの線形結合 $q^{(1)}\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} + \dots + q^{(n)}\boldsymbol{\epsilon}^{(n)}$ と等しくなるためには、 $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^{(n)}$ のすべてと直角ないし鋭角で交わり、なおかつ $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ とは鈍角をなす5次元ベクトル \mathbf{y} が存在してはならない。

$n = 5$ なら $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ は上述の五角錐の内部または稜線の上にあるから、5次元空間において $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^{(5)}$ のすべてと鈍角で交わる方向の \mathbf{y} が存在しうる。 $n = 6$ のとき、5本のベクトルのすべてと鈍角で交わるように六番目のベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^{(6)}$ をとれば、上述の \mathbf{y} はこの5次元空間には存在しない。ゆえに、 $n \geq 6$ でなければならない。つまり、 e 双晶形成では、方向性の異なる双晶セットが少なくとも6セットなければ、任意の全歪みを達成できない。■

さて、方解石の結晶粒子1つは3方向の e 双晶を作りうることを思い出そう (Fig. 7)。上の問題で考えた最小数に満たないということは、 e 双晶形成だけでは、ひとつの結晶は指定された任意の歪みを達成できないことを意味する。このことは Fig. 7b からわかる。つまり、 c 軸が立っている場合、 e 双晶形成による運動は、逆断層センスでしかおきない。したがって、3方向の双晶がどう形成されようと、それらによる全歪みが c 軸方向の短縮になることはない。多結晶体が変形するためには、歪みは一様でないか、または破壊や圧力溶解など e 双晶形成以外の変形メカニズムも変形に寄与するかのどちらかである。後者であるとすれば、 e 双晶から求めた全歪みは実際の全歪みとは多かれ少なかれ一致しない (Yamaji, 2015)。

3.3.2 歪みの見積もり そもそも Groshong の方法で、双晶セット1つによる剪断歪みを正しく見積もることができるのだろうか。同じラメラの幅と本数でも、結晶粒のどこにできるかで、その結晶粒の歪み量が異なる (Fig. 12) という理由で、本サブセクションで、この問いに否定的答えを提示する。

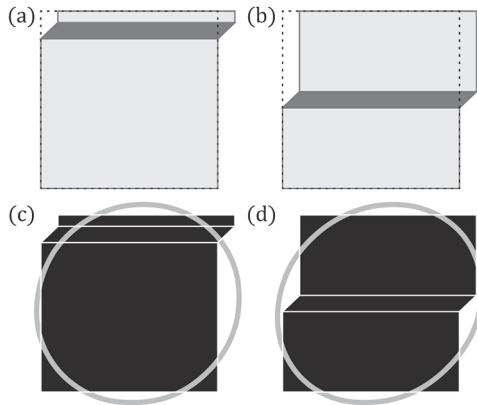


Fig. 12. Schematic illustrations demonstrating the difference in shear strain resulting from the formation of an e-twin lamella in a calcite crystal grain. (a, b) Lamellae in the marginal and central parts of the grain. Dotted lines indicate the pre-deformation grain shape of the grain. (c, d) Profiles of the post-deformation shapes and their best-fit ellipses. 結晶粒のどこに e 双晶ができるかで、結晶粒のこうむる歪み量が異なることを説明する図。(a) 粒子の端に双晶ラメラができる場合。(b) 粒子の中央部に双晶ラメラができる場合。点線はラメラ形成前の粒子の形を表す。(c, d) ラメラ形成後の粒子のシルエットと、それにベストフィットする楕円。

模式的な例を使ってこのことを示そう。薄片で観察される正方形の結晶粒のなかに、双晶ラメラが1本だけできる状況を想定しよう。同じ幅の e 双晶が結晶粒の端にできる場合 (Fig. 12a) と中央付近にできる場合 (Fig. 12b) を考える。幅が同じなので、ラメラに沿った単純剪断の変位量も同じである。しかし、ラメラ形成前後の粒子の形の変化は、あきらかに前者のほうが小さい。

この差を定量化するために、本講座の第3回で紹介する方法で、ラメラ形成後の粒子の形にベストフィットする楕円を決定した。ラメラ形成前の粒子は正方形なので、それにベストフィットする楕円は円にほかならない。したがって、形成後のそれにベストフィットする楕円が、次回で証明するように、粒子のこうむる歪みを表す歪み楕円である(この正方形が単位面積を持つと仮定。ここでのベストフィットの意味およびベストフィット楕円による歪み解析については次回詳述)。結果として、歪み楕円のアスペクト比は、Fig. 12c の場合に 1.06、Fig. 12d の場合に 1.15 である。単純剪断のときの剪断歪み(工学剪断歪みの半分)を q とすると、本講座第1回 §8 により、歪み楕円の主半径は、 $[1 + 2q^2 \pm 2q(q^2 + 1)^{1/2}]^{1/2}$ であり、歪み楕円のアスペクト比 R は次の式

$$R^2 = \frac{1 + 2q^2 + 2q\sqrt{q^2 + 1}}{1 + 2q^2 - 2q\sqrt{q^2 + 1}}$$

を満たす。これを q について解くと、実数で正符号の解は $q = (R-1)/2R^{1/2}$ である。したがって、上でえられた2つのアスペクト比を使って、粒子がこうむった工学剪断歪み $2q$ がそれぞれ 0.0596 および 0.143 と求まる。つまり、ラメラの幅と本数が同じでも、結晶粒の端にできたラメラによる歪みへの寄与は小さい。Groshong の見積もりは、双晶ラメラが等間隔にできるか、または、粒子の中央部にできることを

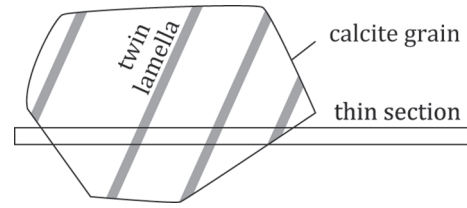


Fig. 13. Schematic diagram illustrating the sampling bias that results from the orientations of twin lamellae relative to a thin section. 薄片と双晶ラメラの方向の関係によるサンプリング・バイアス。

暗黙のうちに仮定しているのである。現実にはいろいろなどころにできるから、Groshong の方法は歪みを過大評価することになる。■

他方、双晶ラメラによる歪み計測には、観測バイアスがある。薄片と平行に近い双晶ラメラは、ラメラの分布密度が低いときにとくに認定しにくく、見逃されるおそれ大きい (Fig. 13)。Yamaji (2015) の見積もりによると、最大で 20~25% のラメラが見逃されるという。このバイアスで、歪みは過小評価されることになる。

さらにまた、粒径の効果もある。同じ剪断歪みを受けた粒子でも、小さな粒子は多結晶体全体の歪みへの寄与は小さいはずである。こうした粒径による差異が、Groshong の方法では考慮されていないのも問題である。

これらのことから、有用ではあるものの、方解石双晶を歪み計として使うことには課題があることがわかる。方解石の双晶については、歪み計としての検討と併行して、古応力計としての利用が半世紀にわたって検討されてきている(例えば Lacombe, 2010)。ひずみ計としては上述の問題があるにしても、方解石の e 双晶は、応力計としては望みがある。方解石双晶による応力解析については別の機会に解説する。

4. 断裂系による岩体の変形

ある直立した露頭で、正断層群に切られた水平層がみられたとする (Fig. 14)。それらの断層の変位は、この露頭面と平行であったとすると、この岩体は、これらの断層の変位により、平面変形をこうむったといえる。断層の切断関係から、断層活動の順番がわかるので、それにしたがって 1 から 6 と断層に番号を振ってある。各断層の変位量が露頭のサイズに比べて小さいので、各断層による変形は微小であるとして、これらの断層活動による岩体の微小歪みテンソルを計算するはどうしたらいいだろうか。

本来歪みは不均一なもので、1つの露頭で観察されるひずみがそれを含む岩体全体の様歪みを表すと考えるのは早計である。また、露頭の範囲は限られるので、露出していない部分を含めた岩体の変形を推定するのは、不完全なデータからということになる。そのため、何らかの仮定を置かなければならない。ここではそれを、Fig. 8 に示した方法で推定する。

断層1条による岩体の変形が単純剪断で近似できることに注目すれば、Fig. 9 に示した発想が利用できることがわか

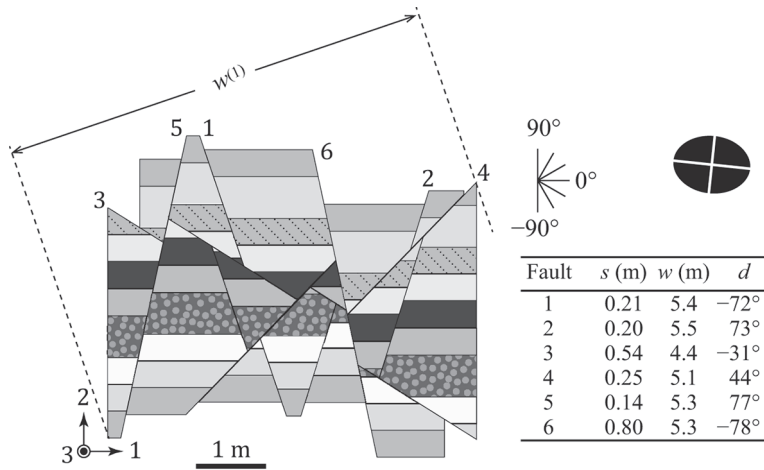


Fig. 14. Brittle deformation of a rock mass by six minor faults, the parameters of which are listed in the table: s , displacement; w , size of the mass along the line perpendicular to the fault; d , the dip of fault. The strain ellipse is depicted in the upper-right corner. Dotted lines are parallel to Fault-1. 小断層による岩体の脆性変形を示す模式図。これら6条の断層による、ここに示した岩体の変形が計算できる。右下の表は断層データ: s , 変位量; w , 断層に直交する岩体のサイズ; d , 断層の傾斜(右上がりなら正の値, 右下がりなら負の値)。右上の黒い楕円は歪み楕円。点線はFault-1と平行。

るだろう。すなわちまず、各断層について工学剪断歪み $\gamma^{(i)} = s^{(i)}/w^{(i)}$ を計算する。岩体の幅は Fig. 14 の $w^{(i)}$ のように測る。次に各断層について

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(i)} &= (\cos(d^{(i)} - 90^\circ), \sin(d^{(i)} - 90^\circ), 0)^T \\ &= (\sin d^{(i)}, -\cos d^{(i)}, 0)^T \\ \mathbf{g}^{(i)} &= (\cos d^{(i)}, \sin d^{(i)}, 0)^T \text{ sign } d^{(i)} \end{aligned}$$

を計算する。ただし $\text{sign } d$ は d が正の値なら +1, 負の値なら -1 であり、第3座標は露頭面と直交する方向にとっている。すると式(10)により、 $\nabla \mathbf{u}^{(i)} = \gamma^{(i)} \mathbf{g}^{(i)} [\mathbf{e}^{(i)}]^T$ となる。これを使って、各断層の微小歪みテンソルと微小回転テンソルは、次の式で算出される:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^{(i)} + (\nabla \mathbf{u}^{(i)})^T], \quad \mathbf{W}^{(i)} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^{(i)} - (\nabla \mathbf{u}^{(i)})^T]$$

ここまでくれば、式(12)により全歪みが計算でき、また、全回転は $\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^{(1)} + \dots + \mathbf{W}^{(6)}$ と計算できる。

【問題】 Fig. 14 に示した岩体の6条の断層による変形を見積もってみよ。また、歪み楕円の主軸とアスペクト比を求め、 $\overline{\mathbf{W}}$ から回転の量と向きを求めよ。

【答え】 上述の算法により、

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.03 & 0.00 \\ -0.03 & -0.17 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.10 & 0.00 \\ -0.10 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

となる。 $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ の固有値は ± 0.14 であり、X 軸を表す固有ベクトルは $(0.99, -0.11, 0.00)^T$ であるから、水平から右下がりに $\tan^{-1}(0.11/0.99) \approx 6^\circ$ の方向に14%伸び、それと直交方向に14%短縮したことになる。歪み楕円のアスペクト比は $(100 + 14)/(100 - 14) \approx 1.3$ である。他方、 $\overline{\mathbf{W}}$ から回転を表すベクトルは、 $\mathbf{w} = (0.00, 0.00, 0.10)^T$ である。したがって、全微小回転テンソルは、第3座標軸(露頭面に直交し手前向きが正)を軸とする $|\mathbf{w}| = 0.10 \text{ rad} \approx 6^\circ$ の反時計回り回転を表す。■

この例は平面変形を扱っているが、一般の非圧縮変形を同じ方法で扱うことができる。しかし、こうして見積もられる変形は、一様変形を仮定したうえで見積もられる、この露頭の範囲内での変形ではないことに注意しよう。断層をはさ

んで変位の向きが不連続的に反対になるわけだから、本来断層による変形は一様ではありえない。この場合、個々の断層の変位が、露頭に見えている範囲の岩体のサイズより1桁以上小さいので、個々の断層による岩体の変形を粗視化(coarse graining)して、単純剪断変形で近似したわけである。その工学剪断歪みは、変位量 s と断層面に直交する岩体の差し渡し w から計算した。しかし、工学剪断歪みを見積もる方法はユニークではない。Molnar(1983)は断層面の面積からそれを見積もった。Molnar法を使うにあたり、Yamaji(2013)はどの断層も露頭の奥行き方向には単位長さだけ広がっていると断層の面積を近似した。さらにまた別の近似法を、この講座の最後で説明する。いずれにせよ、近似の仕方によって当然 $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ と $\overline{\mathbf{W}}$ の値は幾分異なる。

露頭内外の変形の非一様性も問題である。たまたま数が枯れたために Fig. 14 より広く地層が露出した場合、 w はその図に示された値より大きくなる。そして、そのことが計算結果に影響する。また、脆性変形は不均一であることにも注意すべきである。実際、断層が一樣な密度で分布することはほとんどない。この露頭で評価された変形が、その地域の変形をどれだけ代表するか、他の露頭も数多く観察して評価する必要がある。

【問題】 熱水循環が盛んな岩体では、網目状の鉱脈群ができることがある(Fig. 15)。それによって、そうした鉱脈群を含む岩体はどれだけ変形するのだろうか。考えている岩体のサイズ L にくらべて各鉱脈の幅が小さく、また、鉱脈に沿った断層変位がないものとして歪みテンソルを求めよ。(鉱脈ではなく岩脈群の形成でも、同じ方法が使える。)

【答え】 簡単のため、1枚の鉱脈は扁平な円盤として、その半径が r , 最大厚が t , 鉱脈の極を表す単位列ベクトルを \mathbf{n} とする。Fig. 16a のように岩体の一方の端が静止しているとして、この鉱脈の形成で岩体のもう一方の端が \mathbf{n} 方向に変位する。その量は $(\pi r^2/L^2)t$ 程度だろう。それによる変位勾配は、この量を L で割ればよい。方向性まで加味したテンソル量として表現すると、 $\nabla \mathbf{u} = (\pi r^2/L^3)t \mathbf{nn}^T$ であるが、 \mathbf{nn}^T は対称テンソルである。第 i 鉱脈にかかわる量を (i) という上付き添え字で表すなら、 N 枚の鉱脈の形成で岩体がこうむる全歪みは、したがって

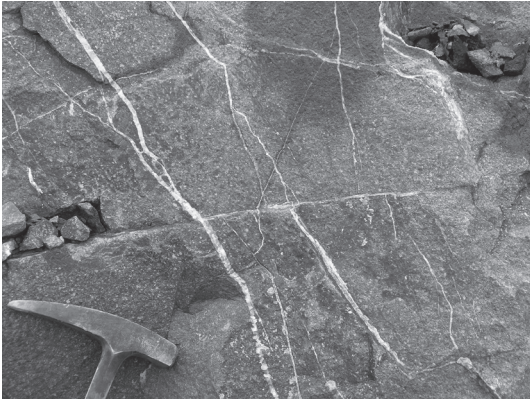


Fig. 15. Quartz veins in Pliocene andesite near the Kushikino Mine, southern Kyushu. 鹿児島県旧串木野鉦山付近の鮮新世安山岩を切る石英脈群.

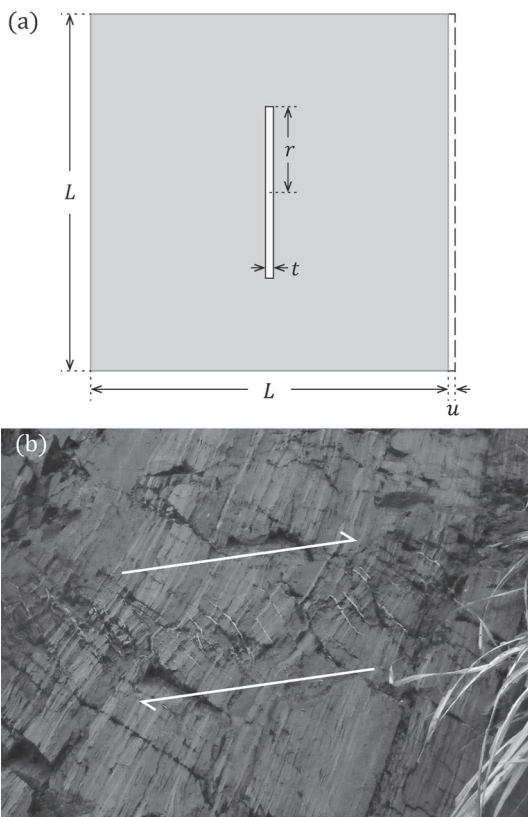


Fig. 16. (a) Schematic illustration of strain evaluation from a mineral vein in a rock mass with the dimension of L . (b) Echelon veins in the Taishu Group, Tsushima, and their shearing sense. Bedding surfaces are curved in a dextral sense (white arrows) along the vein array. (a) 大きさ L の岩体中に厚さ t 、半径 r の薄い円盤状の鉦物脈ができた場合の岩体の歪みを考えるための図。(b) 雁行鉦脈の形成による剪断。対馬の対州層群。鉦脈群のところで層理面がわずかに右ずれセンスで湾曲している。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{total}} = \frac{\pi}{L^3} \sum_{i=1}^N [r^{(i)}]^2 t^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} [\mathbf{n}^{(i)}]^T \quad (13)$$

となる。鉦脈が岩体中に一様に分布し、また、岩体と鉦脈の形状を単純化して考えているので、これは近似式である。■
一様分布ではなく雁行脈をなしているなら、全変形には非

対称部分が生じ、岩体はいくぶんかの剪断変形を受けることになる (Fig. 16b)。雁行脈が開けば、必然的に脈と平行な変位もいくらかは起きるので、この問題の前提が厳密には成り立たない。鉦脈に沿った断層変位がある場合を Hobbs and Ord (2015, p. 261) が扱っているが、要は断層群の活動による歪み (式 11) と鉦脈群形成による歪み (式 13) の和をとるとのことである。

本セクションで紹介した方法は、断層や鉦脈の形成による岩体の変形を大雑把に見積もる方法であったが、利用にあたっては問題がある。X線CTのような方法で岩石の内部まで三次元的に構造が把握できる場合を除いて、岩石サンプルや露頭の表面にみられる断層や鉦脈は、岩石サンプルの内部や露頭の奥でどうなっているかわからないことである。断層や鉦脈の面積を実測することは難しい。露出していない構造による寄与もあるだろう。断層群による全変形の見積もりは、このため地質学よりむしろ地震学で広く利用されている。ただし、すべての断層が露頭面に直交し、なおかつ断層変位が露頭と平行なら、平面変形しか生じないので、平面変形としての全変形や全歪みを露頭でとれるデータから見積もることはできる。同様に、露頭に直交した鉦脈しかなければ、上記の方法で平面変形の全歪みを評価することができる。

5. 速度勾配と体積変化

位置が2次元の直交デカルト座標を $O-x_1x_2$ で表されるとき、位置の関数として速度 \mathbf{v} が与えられたとき、体積変化がどう表されるか考える。

5.1 速度勾配テンソル

簡単のために2次元で考えることにして、Fig. 17のように辺の長さが dx_1 と dx_2 の微小な長方形領域を考える。速度場を関数 $\mathbf{v}(x_1, x_2)$ で表現すると、単位時間あたり左側からこの領域への流入量は $v_1 dx_2$ である。左側からの流出量は $[v_1 + (\partial v_1 / \partial x_1) dx_1] dx_2$ と近似することができる。あわせると、単位時間あたりのこの領域からの正味の流出量は $(\partial v_1 / \partial x_1) dx_1 dx_2$ となる。同様に、上下の境界からの流出量の和は $(\partial v_2 / \partial x_2) dx_1 dx_2$ であるから、この領域からの単位時間あたり単位面積あたりの流出量は

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \text{trace } \mathbf{L}$$

となる。左辺は速度場の発散 (divergence) である。また、右辺の \mathbf{L} は速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) であり、 $\partial v_i / \partial x_j$ がその第 ij 成分である。三次元でも微小な立方体領域を考えることで、同様にして $\text{trace } \mathbf{L}$ が流出量になることがわかる。さて、 $\text{trace } \mathbf{L} = 0$ であれば、一方の壁から流入したのと同じ量が他方の壁から出て行くということだから、単位体積あたりの物質の量に増減がない。つまり、累進変形の場合の体積保存は、式

$$\text{trace } \mathbf{L} = 0 \quad (14)$$

によって表されるわけである。このトレースが正符号なら流出量が正ということだから体積が増加する。負なら減少す

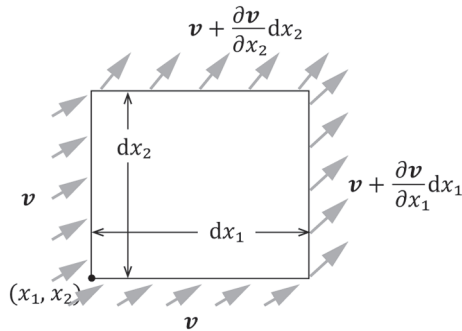


Fig. 17. Geometrical and mathematical depiction of the velocity field around a small rectangular parcel of a deforming rock mass. 微小な直方体からの流出量を計算するための模式図。この直方体は、紙面に直交方向に単位長さの厚さを持つ。

る。成分を使って書くなら、二次元では

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \tag{15}$$

である。三次元では左辺に $\partial v_3/\partial x_3$ が加わる。連続体力学や流体力学では、この式を連続の式 (equation of continuity) という。ただし、これに密度変化を含めた場合を連続の式とよぶこともある。式(15)の応用として、次節で断層伝播褶曲を考える。

5.2 トライシアー断層伝播褶曲

歪み解析と地質図規模の構造形成をむすぶモデルとして、トライシアー断層伝播褶曲モデルを紹介する。地質断面図を描くことは、地層の走向傾斜(姿勢)や鍵層の位置など、欠落が多くて散在するデータから、地下の2次元的構造を推定する問題である。これは数学的には、逆問題を解くことに相当する。逆問題とは、因果関係のある現象の結果のほうを観測して、原因のほうを推定する問題である。つまり、地下構造がしかじかであるならば、観察された鍵層の位置や姿勢が説明できる、ということからその「しかじか」がどんな構造であるべきかを推定する問題である。この問題を解くためには、原因を入力し、結果を出力するような仕組みを考えなければならない。これを逆問題にたいしてフォワード・モデルという。

バスク法では、褶曲構造は同心褶曲 (concentric fold) 以外にありえないことをフォワード・モデルにしている。しかし、現実には相似褶曲など、多様な褶曲がありうる。フォワード・モデルは唯一ではない。また、フォワード・モデルをひとつ選択したとしても、調整すべきパラメータが複数ある。例えば同心褶曲なら、同心円の中心の位置である。これら複数個の変数を観測データに合うように調整することになる。しかし、同斜構造のような特別に単純な地下構造でない限り、有限個の制約条件に適合する地質断面は複数存在するのが普通である。そこで、追加で何らかの仮定が必要になる。地質学の実習でバスク法が教えられるのは、コンパスと定規だけで描けるからにすぎない。単純な構造を大まかに把握することが目的ならそれで十分だが、鍵層の地下深度を正確に予測したいというような求めに応じるには、ほかの描画

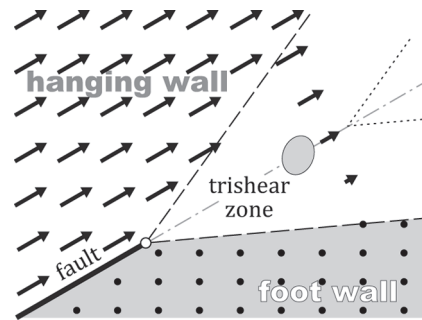


Fig. 18. Schematic cross-section illustrating the trishear fault-propagation model. The gray ellipse represents the strain in the trishear zone. 断層伝播褶曲のモデル。トライシアーを説明するための模式的断面図。灰色の楕円は、trishear zone のなかの歪み楕円を模式的に示す。

法を試みるべきである。

最近描かれるようになってきたのは、バランス断面である。地殻浅所における変形では、固結した岩体の体積が大規模に増減することはないので、体積が変形前後で変わらないという条件を課し、なおかつ、堆積岩体なら変形前の水平な状態にもどせることを、条件として描く地質断面図である。それらの条件をゆるめるなど、バランス断面にもいくつかのバリエーションがあるが、ここではトライシアー (trishear) とよばれる方法 (Erslev, 1991) を、歪み解析との関連で紹介しよう。トライシアーにも変種がいろいろあるが (Hardy and Allmendinger, 2011)、ここでは最も単純なモデルをとりあげる。

断層伝播褶曲といえば、既存の和書ではキंक褶曲が複合した断面上では角張った構造として紹介されている (例えば狩野・村田, 1998)。それに対し、トライシアーは、なめらかに地層の傾斜が変化する断層伝播褶曲を再現するために考案された地質構造形成モデルであり、伝播しつつある断層のまわりの速度場に特有の仮定をおく。断層が伝播するとは、断層の先端 (Fig. 18 の白丸) が断層の延長線上 (図中の一点鎖線上) を右上に移動し、変位とともに断層面が拡大するということである。まず、逆断層は平面であるとして、各瞬間において、Fig. 18 の2本の破線で区切られた領域 (trishear zone) に注目する。この図で footwall とした領域は、静止していると仮定する。また、断層の上盤側で trishear zone の左側の領域は、断層の変位速度と同じ速度 V で動くとする。断層が伝播するには、断層の先端はこれより早く右上に移動する必要がある。さて、trishear zone の内部では、速度場は空間的に連続的に変化するが、体積は保存すると仮定するので、trishear zone の上面と下面において速度がそれぞれ V と 0 という境界条件のもとに式 $\text{trace } \mathbf{L} = 0$ を解くことにより、trishear zone 内部の速度場が計算できるのである。ただし連続の式だけでは、速度場はユニークに決まらないので、もう一つ条件が要る。そこで、Zehnder and Allmendinger (2000) は簡単のため、断面図上で、断層の延長線上と平行に x 軸、直交する方向に y 軸を定義したとき、 v_x が y の一次関数になるという仮定をおいた。

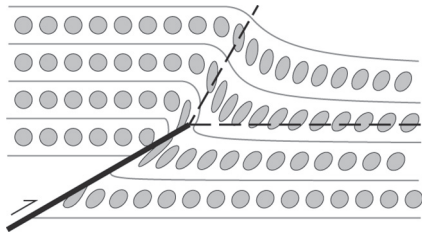


Fig. 19. An example of trishear fault-propagation folding and strain ellipses calculated using the software 'FaultFold Forward' produced by R. W. Allmendinger [URL1]. トライシアー断層伝播褶曲とその歪み場を表す歪み楕円群. Allmendinger 氏のソフトウェア FaultFold Forward を使用して描画.

さて、Fig. 18 の点線は、ある時間の経過後における trishear zone の位置を示している。瞬間ごとに trishear zone の外側は剛体的に振る舞うと仮定しているから、trishear zone でも上下の境界に近い部分は、時間とともに次々に変形が凍結し、剛体的に振る舞う領域に帰属するようになる。この図の場合、trishear zone の速度場は単純剪断のそれに似たものになるから、その領域の変形はおおまかに言って、X 軸が急傾斜した歪みと時計回りの回転の合成となる。その結果、はじめに水平だった地層は、被覆層中に単斜構造(狩野・村田, 1998)を形成する。その例を Fig. 19 に示す。これは、Allmendinger 氏のソフトウェア FaultFold Forward [URL1] を使って描いた図である。速度を時間積分することにより位置の変化が追跡できるので、§6 の練習問題の方法で、岩体各部の歪み楕円を描くこともできる。この図には、歪み楕円も示されている。そうした歪みを露頭規模の変形構造と比べることにより、伏在断層の位置や傾斜を推定することができるだろう。

謝 辞

大学院生の山中克正氏には、方解石の変形ラメラの顕微鏡写真を提供していただいた。また、古角晃洋氏には、トライシアーの図の作成に協力していただいた。査読者の石井和彦氏からのコメントで、特に方解石双晶の歪み解析について大幅に原稿を改善することができた。また、担当編集委員の増田幸治氏からは建設的なご意見をいただいた。記して感謝の意を表す。なお、本研究には科学研究費補助金(基盤(B)22340151)を使用した。

文 献

- Erslev, E. A., 1991, Trishear fault-propagation folding. *Geology*, **19**, 617–620.
 Groshong, R. H., 1972, Strain calculated from twinning in calcite. *Geol. Soc. Amer. Bull.*, **83**, 2025–2038.
 Hardy, S. and Allmendinger, R. W., 2011, Trishear: A review of kinematics, mechanics, and applications. In McClay, K., Shaw, J. H. and Suppe, J. eds., *Thrust Fault-Related Folding*, AAPG Mem. **94**, 95–119.
 Hobbs, B. and Ord, A., 2015, *Structural Geology. The Mechanics of Deforming Metamorphic Rocks: Volume 1, Principles*.

- Elsevier, 665p.
 久田俊明(Hisada, T.), 1992, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎(*Foundations of Tensor Analysis for Non-Linear Finite Element Method*)*. 丸善(Maruzen Co.), 226p.
 石原 繁(Ishihara, S.), 1991, テンソル: 科学技術のために(*Tensors for Scientists and Engineers*)*. 裳華房(Shokabo Co.), 202p.
 狩野謙一・村田明広(Kano, K. and Murata, A.), 1998, 構造地質学(*Structural Geology*)*. 朝倉書店(Asakura Publ.), 298p.
 川崎英文(Kawasaki, H.), 2004, 極値問題(*Extremal Problems*). 横浜図書(Yokohama Books Co.), 244p.
 Lacombe, O., 2010, Calcite twins, a tool for tectonic studies in thrust belts and stable orogenic forelands. *Oil Gas Sci. Tech.*, **65**, 809–838.
 Molnar, P., 1983, Average regional strain due to slip on numerous faults of different orientations. *Jour. Geophys. Res.*, **88**, 6430–6432.
 向井信彦(Mukai, N.), 2012, 基礎からのコンピュータグラフィックス(*Introduction to Computer Graphics*)*. 日新出版(Nisshin Publ.), 182p.
 パスキエ・トゥロウ, 鳥海光弘・金川久一訳(Passchier, C. W. and Trouw, R. A. J., translated by Toriumi, M. and Kanagawa, K.), 1999, マイクロテクトニクス(*Microtectonics*). シュプリンガー・フェアラーク東京(Springer-Verlag, Tokyo), 277p.
 Paulsen, T. S., Wilson, T. J., Demosthenous, C., Millan C., Jarard, R. and Laufer, A., 2014, Kinematics of the Neogene Terror Rift: Constraints from calcite twinning strains in the ANDRILL McMurdo Ice Shelf(AND-1B) core, Victoria Land Basin, Antarctica. *Geophere*, **10**, 828–841.
 Ramsay, J. G. and Huber, J. I., 1983, *The Techniques of Modern Structural Geology: Volume 1, Strain Analysis*. Academic Press, London, 307p.
 Reid, C. N., 1973, *Deformation Geometry for Materials Scientists*. Pergamon Press, Oxford, 234p.
 渋谷陽二(Shibuya, Y.), 2011, 塑性の物理: 素過程から理解する塑性力学(*Physics of Plasticity: Theory of Plasticity from its Elementary Processes*)*. 森北出版(Morikita Publ. Co.), 259p.
 竹下 徹(Takeshita, T.), 1986, 石英多結晶の異方的塑性流動. 唐戸俊一郎・鳥海光弘編, 固体と地球のレオロジー(*Rheology of Solids and of the Earth*), 東海大学出版会(Tokai Univ. Press), 219–238.
 徳岡辰雄(Tokuoka, T.), 1999, 有理連続体力学の基礎(*Foundations of Rational Continuum Mechanics*)*. 共立出版(Kyoritsu Shuppan.), 270p.
 Tripathy, V. and Saha, D., 2015, Inversion of calcite twin data, paleostress reconstruction and multiphase weak deformation in cratonic interior: Evidence from the Proterozoic Cuddapah basin, India. *Jour. Struct. Geol.*, **77**, 62–81.
 山路 敦(Yamaji, A.), 2000, 理論テクトニクス入門: 構造地質学からのアプローチ(*Introduction to the Theories of Tectonics: Approach from Structural Geology*), 朝倉書店(Asakura Publ.), 287p.
 Yamaji, A., 2013, Two-dimensional finite deformations evaluated from pre-and post-deformation markers: Application to balanced cross sections. *Jour. Struct. Geol.*, **51**, 144–155.
 Yamaji, A., 2015, How tightly does calcite e-twin constrain stress? *Jour. Struct. Geol.*, **72**, 83–95.
 山路 敦(Yamaji, A.), 2016, 歪み解析と変形解析の数理: 1. 一様変形. 地質雑(*Jour. Geol. Soc. Japan*), **122**, 275–286.
 Zehnder, A. T. and Allmendinger, R. W., 2000, Velocity field for the trishear model. *Jour. Struct. Geol.*, **22**, 1009–1014.
 [URL1] Allmendinger, R. W., FaultFold Forward, v. 6, <http://www.geo.cornell.edu/geology/faculty/RWA/programs/fault-foldforward-v-6.html>.

* English translation from the original written in Japanese.