数理解析研究所講究録
第2002巻 2016年 39-41

Type-definability of groups generated by a generic set in simple theories

神戸大学・システム情報学研究科　岡部 峻典

Shunsuke Okabe

Graduate School of System Informatics,

Kobe University

1 はじめに

群と呼ばれる構造は, 様々の, より複雑な他の代数的構造の中に基礎部品として組み込まれている. ある言語の理論において, その中の言葉で記述される群を研究することは, もとの理論におけるモデルのより深い理解につながる. 本発表では, 理論及びそのモデルに対し, その中で (タイプによって) 表現されている群の性質に関する研究について話した.

以降, T は完全な単純理論とする. また, $\bar{\kappa}$ を通常の議論では出てこないほど巨大な強極限基数とし, $\bar{\kappa}$-飽和かつ $\bar{\kappa}$-均質なモンスターモデル $\mathcal{M}$ を考えることによって, 濃度 $\bar{\kappa}$ 未満のすべてのパラメタ上のタイプはすべてモンスターモデル上に解を持つタイプとして考えることができる.

2 タイプ定義可能な群

パラメタの集合 $G \subseteq \mathcal{M}$ が**タイプ定義可能な群**であるとは, G と G 上の 3 項関係がそれぞれ $\emptyset$-タイプ $G(x)$ と $\cdot(x, y, z)$ で定義されており, G が $\cdot$ を演算とする群をなしているときをいうのであった. まず, G の元及び G の部分集合に対して, generic という性質を定義する. なお, 3 項関係 $\cdot(x, y, z)$ は $x.y = z$ と書くことにし, 誤解のない限り演算としての省略形は積極的に用いていく. 例えば, $a.b.c = d$ は $\exists x[\cdot(a, b, x) \wedge \cdot(x, c, d)]$ の省略である.

定義 2.1. $g \in G$ が G について A 上 **(left-)generic** であるとは, 任意の $a \in G$ について $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A a$ ならば $a.g \mathop{\smile\!\!\!\!\!|} Aa$ が成り立つことをいう. また, $X \subseteq G$ が A-タイプ定義可能かつ A 上 generic な元を持つとき, X は G について **generic** であるという.

注意 2.2. (left-)generic の定義において g と a の位置を入れ替えたものを **right-generic** というが, 実は両者の定義は同値となる. また, G についてではなく, タイプ定義可能な部分群 H についても genericity を考えることができる. ただし, 定義にあらわれるパラメタ A は H をタイプ定義できるものに限られる.

与えられた群のタイプ定義可能性には, その群の G における指数の大きさが深く関係している. これに関し, G の connected component という部分群の定義を述べておく.

定義 2.3. タイプ定義可能な部分群 H が G において **bounded index** を持つとは, $|G:H| < \kappa$ が成り立つことをいう. A 上タイプ定義可能で bounded index を持つ部分群全体の集合 $\mathcal{H}$ について, その共通部分がなす群 $G_A^{00} := \bigcap \mathcal{H}$ を G の A 上の **connected component** という.

3　生成された部分群が (タイプ) 定義可能であるということ

ある群がパラメタの集合によって生成される場合, その集合がタイプ定義可能であったとしても, 生成された群がタイプ定義可能になるとは限らない. 「有限個の元が存在してそれらの積で書ける」という条件は一階論理では (たとえタイプによってでも) うまく記述できないのである. しかしながら, 群の元の生成が実は特定の有限パターンのみで十分であることがわかれば, その群はタイプ定義可能ということになる. 例えばこのことは, ω-安定な理論においては, 既約という性質を持つ集合で生成される群の (タイプではなく論理式によっての) 定義可能性が成り立つことが Zilber によって示されている (Zilber の既約性定理).

単純な理論において, 一般に次のような予想がある.

予想 3.1. G をタイプ定義可能な群とする. パラメタ A に対し, A-タイプ定義可能な集合 X が G の A 上の connected component G_A^{00} について generic であるならば, $\langle X \rangle$ はタイプ定義可能であり, 特に $\langle X \rangle = X.X = G_A^{00}$ となる.

これに対し, 本研究では次の結果を示した.

定理 3.2. A-タイプ定義可能な $X \subseteq G_A^{00}$ が G_A^{00} について generic であるならば, $G_A^{00} = X.X^{-1}.X.X^{-1} = X^{-1}.X.X^{-1}.X$ が成り立つ. すなわち, $\langle X \rangle$ はタイプ定義可能である.

4　今後の展望

いま, 上の X にさらに他の条件を付け加えたときに何が成り立つのかを考えたい. 例えば, 一般的な群論において, ある群の良い特徴を持つ任意の部分集合が, ある性質 P(例えば可換性など) をみたすとき, 群全体でもその性質 P, もしくはそれに類する他の性質 P' が成り立つかどうかを考えることは有益である. そこで, 次のような予想を考える.

予想 4.1. A-タイプ定義可能な集合 X を, G_A^{00} について generic なものとしてとる. X の任意の元 x について $x^2 = 1$ が成り立つとき, G_A^{00} は可換となる.

他にも, 次のような予想も存在する.

予想 4.2. A-タイプ定義可能な集合 X を, G_A^{00} について generic なものとしてとる. X の任意の元 x について $x^3=1$ が成り立つとき, G_A^{00} は冪零性を持つ.

このように, X に追加する条件を変えることによって様々な予想を考えることができる. これらの予想は, 安定理論などのより狭い理論のクラスにおいては, Morley ランク有限などの条件をさらに付け加えた上である程度の解決がなされている. さらに, これらの予想について考えることは, Burnside 問題などの重要な問題を考えることに役立つのではないかと予想される.

また, はじめに考えていた予想 3.1 が本当に成り立つのかどうかについて詰めていくのも, これらの予想の解決に寄与しそうである.

参考文献

[1] B. Kim, *Simplicity Theory*, Oxford Logic Guides 53, Oxford Science Publications, 2014.

[2] F. O. Wagner, *Simple Theories*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] S. Shelah, *Classification Theory*, North-Holland, 1990.

[4] 坪井明人, モデルの理論, 河合文化教育研究所, 1997.

[5] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.