数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 8-16

Minimal models and modular linear differential equations of order 4

有家 雄介 *
筑波大学数理物質系

1 はじめに

頂点作用素代数 (VOA) V の既約加群 $M=\bigoplus_{n=0}^{\infty}M_{h+n}$ の指標

$$\mathrm{ch}_M=\mathrm{tr}_M\, q^{L_0-c/24}=\sum_{n=0}^{\infty}\dim M_{h+n}q^{n-c/24} \tag{1}$$

を考える．ここで, c は V の中心電荷, h は共形ウエイトとよばれる有理数で, M_{h+n} は次数作用素 L_0 に関する有限次元の固有空間である．Y. Zhu ([15]) は V が有理的かつ C_2-cofinite とよばれる条件をみたすとき, 既約加群の指標 ch_M は $q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ とおくと τ の関数として複素上半平面 $\mathbb{H}$ において正則であり，既約加群の指標で張られる空間は変換

$$\mathrm{ch}_M(\tau)\mapsto \mathrm{ch}_M\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right),\quad \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}) \tag{2}$$

により不変であることを証明した．この証明の重要なステップとして, 解空間が指標の張る空間を含む微分方程式が存在することが示されている．ここで現れる微分方程式はモジュラー微分方程式 (MLDE) とよばれている ([2]).

一般に VOA に対して, MLDE であってその解空間が指標の空間と一致するものが存在するとは限らない．1階の MLDE の解は，その定義から定数関数のみである．したがって既約加群を唯一つしか持たない VOA (正則 VOA) に対してはその指標を解に持つような MLDE をどのようにとっても階数は1より大きくなる (つまり解空間は指標の空間より大きくなる)．また，[1] ではレベルが2のいくつかのアフィン VOA に対しても，指標の空間と解空間が一致するような MLDE が存在しないことが示されている．

これらの結果は，既約加群の指標の張る空間が MLDE の解空間に一致するような VOA がかなり少ないことを示唆しているように思われる．そこで，指標の張る空間が n 階の MLDE の解空間と一致するような VOA を分類できるか? という問題を考える．MLDE の階数が2の場合には, [10]

*arike@math.tsukuba.ac.jp

において, 現れる VOA は Virasoro VOA およびレベル 1 のアフィン VOA (のうちのいくつか) であることが示されている.

本稿では, この問題を $n=4$ の場合に考察する. 階数が大きくなると, MLDE の一般型のもつパラメータが増えるため, MLDE に対応する VOA を決定するにはさらに条件が必要になる.. 本稿では, VOA 自身の指標が $q^{-c/24}(1+q^2+O(q^3))$ となることを仮定して分類を行った. 講演の時点ではさらに追加の条件 [1] が必要であった. しかし, 講演後に別の方法をためしてみたところ, この条件は不要であることが明らかになったので, 本稿で述べる内容は講演のものとは多少異なっていることをあらかじめお断りしておく.

2 モジュラー微分方程式

この節ではモジュラー微分方程式の定義を紹介し, その基本的な性質について述べる. 特に, 良い頂点作用素代数の既約表現の指標の張る空間がモジュラー微分方程式の解空間と一致するための必要十分条件をあたえた G. Mason の結果について説明する [2].

ウエイト $2k$ の Eisenstein 級数を

$$E_{2k}=1-\frac{4k}{B_{2k}}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n,\quad q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau},\quad \tau\in\mathbb{H} \tag{3}$$

とする. ここで B_{2k} はベルヌーイ数, $\sigma_m(n)=\sum_{d|n}d^m$, $\mathbb{H}$ は複素上半平面とする. ウエイト k のセール微分 ϑ_k を

$$\vartheta_k=q\frac{d}{dq}-\frac{k}{12}E_2 \tag{4}$$

とし, その合成を

$$\vartheta_k^p=\vartheta_{k+2(p-1)}\circ\cdots\circ\vartheta_{k+2}\circ\vartheta_k \tag{5}$$

で定める.

Definition 1. 微分方程式

$$\vartheta_0^pf+\sum_{i=0}^{p-2}P_i\vartheta_0^if=0 \tag{6}$$

は P_i がウエイト $2(p-i)$ の正則モジュラー形式のとき, **モジュラー微分方程式**とよばれる.

Remark 1. (a) ここで導入した MLDE は [9] などではウエイト 0 のモニックな MLDE とよばれている.
(b) (6) の左辺の和に $i=p-1$ の項が現れない理由は, 係数の関数 P_{p-1} はウエイト 2 の正則モジュラー形式, つまり 0 であることによる.

[1] 整数の共形ウエイトをもつ既約加群が存在しないという条件.
[2] 実際にはベクトル値モジュラー関数に関する主張である.

一般にモジュラー微分方程式の解空間は変換

$$f(\tau) \mapsto f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \tag{7}$$

により不変であって, $q=0$ にのみ確定特異点を持つ確定特異点型の微分方程式となることが知られている ([9]).

Proposition 1 ([9, Theorem 4.3]). V を C_2-cofinite かつ rational な VOA とし, $\mathcal{X}(V)$ をその既約加群の指標の張る空間とする. $\mathcal{X}(V)$ を解空間に持つような MLDE が存在するための必要十分条件は, $\mathcal{X}(V)$ の基底 $\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ であって,

$$f_i = q^{\lambda_i}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i q^n), \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p \tag{8}$$

および $p(p-1) = 12\sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ をみたすものが存在することである.

Remark 2. 容易に分かるように, 階数 1 の MLDE は

$$\vartheta_0 f = q\frac{d}{dq} f = 0 \tag{9}$$

となるのでその解は定数になってしまう. そのため自明でない正則 VOA の指標のみたす MLDE の階数は 1 より大きくなる. たとえば E_8 格子に付随する格子 VOA V_{E_8} の指標のみたす MLDE は 2 階で

$$\vartheta_0^2 f - \frac{1}{6}E_4 f = 0 \tag{10}$$

となることが知られている ([10]). この微分方程式のもう 1 次元分の余分な解を調べた研究もあり ([6]) mixed mock modular form が現れることが示されている.

3 Virasoro VOA とその拡大

Virasoro 代数 $\mathbf{Vir} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}c$ の中心電荷 c, 最高ウエイト h の Verma 加群を $M(c,h)$ とし, その最高ウエイトベクトルを $v_{c,h}$ とする. また, $M(c,h)$ の既約商を $L(c,h)$ で表す. このとき, $L_{-1}v_{c,0}$ で生成される $M(c,0)$ の部分加群による $M(c,0)$ の商を $V(c,0)$ とすると, $V(c,0)$ は VOA であることが知られている ([5]). $V(c,0) \neq L(c,0)$ となる必要十分条件は互いに素な正整数 p, q が存在して

$$c = c_{p,q} = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \tag{11}$$

とかけることである. つまりこのとき, $V(c_{p,q},0)$ は自明でないイデアルを持つ. $L(c_{p,q},0)$ も VOA であり, C_2-cofinite かつ rational であることが知られている ([13]). このとき, 既約 $L(c_{p,q},0)$-加群は最高ウエイト

$$h_{r,s} = \frac{(rq-sp)^2-(p-q)^2}{4pq}, \quad 1 \le r \le p-1, \quad 1 \le s \le q-1 \tag{12}$$

をもつ既約最高ウエイト **Vir**-加群 $L(c_{p,q}, h_{r,s})$ により与えられる (VOA の加群としては $h_{r,s}$ が共形ウエイトである). 最高ウエイトが等しい既約加群は同型であり, $h_{r,s} = h_{p-r,q-s}$ なので, 既約加群の個数は $(p-1)(q-1)/2$ である. また, 既約加群の指標を

$$\chi_{r,s} = q^{h_{r,s}-c_{p,q}/24} \sum_{n=0}^{\infty} \dim L(c_{p,q}, h_{r,s})_{h_{r,s}+n} q^n \tag{13}$$

とかく. 既約加群の定義により, $\dim L(c_{p,q}, h_{r,s})_{h_{r,s}} = 1$ である.

このとき, Proposition 1 により以下を得る.

Theorem 2 ([11, 12]). $\mathcal{X}(L(c_{p,q}, 0))$ を解空間にもつ $(p-1)(q-1)/2$ 階の MLDE $L_{p,q}(\vartheta_0)f = 0$ が存在する.

また, Virasoro 代数の Verma 加群の構造定理 ([3, 4, 7]) により, VOA V の指標 ch_V が $L(c_{p,q}, 0)$ の指標 $\chi_{1,1}$ と一致するとき V と $L(c_{p,q}, 0)$ は同型である. この事実を用いることで, 以下の定理を得る.

Theorem 3. 互いに素な正整数 p, q を $L(c_{p,q}, 0)$ の既約加群の共形ウエイトの集合は正整数を含まないものとしてとる. このとき, 中心電荷 $c_{p,q}$ の VOA V の指標の空間 $\mathcal{X}(V)$ が MLDE $L_{p,q}(\vartheta_0)f = 0$ の解空間に含まれるとき, $V \cong L(c_{p,q}, 0)$ である.

この定理の条件「$L(c_{p,q}, 0)$ の既約加群の共形ウエイトの集合は正整数を含まない」は $L_{p,q}(\vartheta_0)f = 0$ の解のうち $q^{-c_{p,q}/24}(1 + O(q))$ の形をしたものが一意的に定まる, したがって $\chi_{1,1}$ となる, ことを示すために用いられる.

次に $L(c_{p,q}, 0)$ の simple current extension と MLDE の関係について述べる. Virasoro 代数の加群のフュージョン則 (cf. [7]) から既約加群 $L(c_{p,q}, h_{1,q-1})$ は simple current であることが知られている ([7]). $h_{1,q-1} = (p-2)(q-2)/4$ が整数のとき, 直和 $L(c_{p,q}, 0) \oplus L(c_{p,q}, h_{1,q-1})$ に $L(c_{p,q}, 0)$ の (非自明な) 拡大としての VOA の構造が唯一つ定まる ([8]). この VOA を $\hat{L}(c_{p,q}, h_{1,q-1})$ で表す.

つぎにこの拡大の既約表現の共形ウエイトのリストを求めよう. $h_{1,q-1} = (p-2)(q-2)/4$ が整数となるとき, p と q が互いに素であることから, ある正整数 t と u が存在して $p = 2t+1$, $q = 4u+2$ となる. このとき, 既約 $\hat{L}(c_{p,q}, h_{1,q-1})$-加群の共形ウエイトの集合は

$$h_{r,2u+1}\,(1 \le r \le t), \quad h_{r,2v-1}(1 \le r \le t,\, 1 \le v \le u) \tag{14}$$

となり, $\dim \mathcal{X}(\hat{L}(c_{p,q}, h_{1,q-1})) = t(u+1)$ である (cf. [14]). このとき, Proposition 1 により以下を得る.

Theorem 4. 互いに素な整数 p, q に対して, 正整数 t, u が存在して, $p = 2t+1$, $q = 4u+2$ とかけているとする. このとき $\hat{L}(c_{p,q}, h_{1,q-1})$ の指標の空間を解空間に持つ MLDE $\hat{L}_{p,q}(\vartheta_0)f = 0$ が存在する. この MLDE の階数は $t(u+1)$ である.

また, $L(c_{p,q}, 0)$ のときと同様に以下の定理が成り立つ.

Theorem 5. 互いに素な整数 p, q に対して, 正整数 t, u が存在して, $p = 2t+1$, $q = 4u+2$ とかけていて, 既約 $\hat{L}(c_{p,q}, h_{1,q-1})$-加群の共形ウエイトの集合が正整数を含まないとする. このとき, 中心電荷 $c_{p,q}$ の VOA V の指標の空間が $\hat{L}_{p,q}(\vartheta_0)f = 0$ の解空間に含まれているとする. このとき, $V \cong \hat{L}(c_{p,q}, h_{1,q-1})$ である.

証明の概略は以下の通りである．既約 $\hat{L}(c_{p,q}, h_{1,q-1})$-加群の共形ウエイトの集合が正整数を含まない，および V の中心電荷は $c_{p,q}$ であるという条件から，V の指標は $\chi_{1,1}+\chi_{1,q-1}$ であることが分かる．そこで既約 $L(c_{p,q}, 0)$-加群および $V(c_{p,q}, 0)$ のウエイト空間の次元の漸近挙動を用いて Virasoro 元 ω で生成される部分代数が $V(c_{p,q}, 0)$ でないこと，つまり $L(c_{p,q}, 0)$ になることを証明する．このとき，$V = L(c_{p,q}, 0) \oplus L(c_{p,q}, h_{1,q-1})$ であり，自明な拡大でないことがわかるので，extension の一意性から結論を得る．

4 中心電荷の候補と対応する微分方程式

この節では VOA V が以下の条件

(A) V の中心電荷と既約加群の最低ウエイトは有理数.

(B) V の既約表現の張る空間 $\mathcal{X}(V)$ はある 4 階の MLDE の解空間と一致している．

(C) V の指標 ch_V は $q^{-/24}(1+q^2+O(q^3))$ とかける．

をみたす場合に，V の中心電荷として現れうるものを求める．確定特異点型の微分方程式であることから，MLDE の解を求める際に Frobenius の方法を用いることができる．本稿では 4 階の MLDE を主な考察の対象とするので，4 階の場合に簡単に説明する．4 階の MLDE の一般型を $q\dfrac{d}{dq}$ を用いて書き下すと

$$f'''' - E_2 f''' + (3E_2' + \alpha_1 E_4) f'' - \left(E_2'' + \frac{\alpha_1}{2} E_4' - \alpha_2 E_6\right) f' + \alpha_3 E_8 f = 0, \tag{15}$$

となる．ここで $f' = q\dfrac{d}{dq} f$ である．MLDE (15) がべき級数 $f_\rho = q^\rho(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n)$ という形の解を持つと仮定し，これを (6) に代入すると，関係式

$$\Psi(\rho) := \rho^4 - \rho^3 + \alpha_1 \rho^2 + \alpha_2 \rho + \alpha_3 = 0 \tag{16}$$

を得る．この方程式を微分方程式 (15) の決定方程式，その根を特性べき数とよぶ．重根でない特性べき数 λ であって，$\lambda + \mathbb{Z}_{>0}$ が特性べき数でないものをとる．このとき，係数 a_n は関係式

$$\begin{aligned} a_n = \Psi(\lambda+n)^{-1} \sum_{m=1}^{n} \Big\{ & e_{2,m}(n-m+\lambda)^3 - \big(3m e_{2,m} + \alpha_1 e_{4,m}\big)(n-m+\lambda)^2 \\ & + \big(m^2 e_{2,m} + \tfrac{1}{2}\alpha_1 m e_{4,m} - \alpha_2 e_{6,m}\big)(n-m+\lambda) - \alpha_3 e_{8,m} \Big\} a_{n-m} \end{aligned} \tag{17}$$

により一意的に定まる．ここで $E_k = \sum_{n=0}^{\infty} e_{k,n} q^n$ と定める．こうして定まったべき級数 f_λ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数であり，MLDE (15) の解になることが知られている．

Remark 3. (a) 一般に，特性方程式が重根を持つ場合には $\log q$ の項を持つ解が現れる．特性べき数の間に整数差がある場合には $\log q$ の項を持つ解が現れる場合もある．
(b) MLDE の階数が 5 以下の場合は与えられた特性べき数を持つような MLDE は唯一つに定まる．

さて，条件 (B) により, $\mathcal{X}(V)$ は有限次元になるので, 任意の V-加群は組成列を持つことが分かる．したがって, V の指標 ch_V は $\mathcal{X}(V)$ の元になる．

いま $\mathrm{ch}_V \in \mathcal{X}(V)$ なので, $q^{3-c/24}$ の係数 $(= \dim V_3)$ を m とおいて, ch_V を (15) に代入する．このとき, 左辺に現れるべき級数の最初の 4 つの項の係数から

$$\frac{c^4}{331776}+\frac{c^3}{13824}+\frac{c^2}{576}\alpha_1-\frac{c}{24}\alpha_2+\alpha_3=0, \tag{18}$$

$$-\frac{c^3}{576}-\frac{c^2}{8}-c+\left(\frac{5c^2}{12}+5c\right)\alpha_1+21c\alpha_2+480\alpha_3=0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\frac{c^4}{331776}-\frac{79c^3}{13824}-\frac{23c^2}{32}-\frac{77c}{6}+8+\\ &\qquad\left(\frac{2161c^2}{576}+\frac{539c}{6}+4\right)\alpha_1+\left(\frac{16631c}{24}+2\right)\alpha_2+61921\alpha_3=0\end{aligned} \tag{20}$$

および

$$\begin{aligned}&\frac{mc^4}{331776}-\frac{11mc^3}{13824}-\frac{5c^3}{576}+\frac{5mc^2}{64}-\frac{11c^2}{8}+54m-\frac{27mc}{8}-37c-48\\ &\qquad+\left(\frac{mc^2}{576}+\frac{145c^2}{12}-\frac{mc}{4}+9m+385c+720\right)\alpha_1\\ &\qquad\qquad+\left(-\frac{mc}{24}+5145c-1008+3m\right)\alpha_2+(m+1050720)\,\alpha_3=0.\end{aligned} \tag{21}$$

を得る．(18)–(20) は α_1, α_2, α_3 の連立方程式である．この連立方程式を解くと $c\neq 0,-22/5,7/578$ のとき

$$\begin{aligned}\alpha_1&=-\frac{56c^3+993c^2-11660c-1440}{96(578c-7)},\\ \alpha_2&=-\frac{-25c^4-829c^3-7347c^2+1008c+3456}{1728(578c-7)},\\ \alpha_3&=-\frac{14c^5+425c^4+3672c^3+5568c^2+9216c}{110592(578c-7)}\end{aligned} \tag{22}$$

となる．$c = 7/578$ の場合は連立方程式 (18)–(20) は解を持たない (したがって, 条件 (B) をみたすような中心電荷 7/578 の VOA は存在しない)．$c = 0$ および $c = -22/5$ のときはそれぞれ $(\alpha_2,\alpha_3)=(-2\alpha_1-4,0)$，$(17/675-\alpha_1/6, 1793/4320000-11\alpha_1/3600)$ となる．

$c\neq 0,-22/5$ のとき, (22) を (21) に代入すると,

$$\begin{aligned}&1050c^5+(5m+31020)c^4+(275600-703m)c^3\\ &\qquad+(32992m+673104)c^2+(504352-517172m)c+3984m-210432=0\end{aligned} \tag{23}$$

を得る．条件 (A) から $c\in\mathbb{Q}$ で, $m=\dim V_3\in\mathbb{Z}_{>0}$ である．

Proposition 6 (D. Zagier). 方程式 (23) の解 (c,m) で, $c \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ をみたすものは以下のリストのものに限る.

c	$-114/7$	$-46/3$	$-68/7$	$-22/5$	$-3/5$	$1/2$	$4/5$
m	2	1	1	1	1	1	2

c	36	122/3	238/5	48
m	501 971	3 132 760	37 950 512	42 987 520

Proposition 6 および (18)–(20) から条件 (B) および (C) をみたす VOA の中心電荷と対応する MLDE の候補が得られる. 条件 (A) と (B) から, MLDE(15) の特性べき数はすべて有理数となる. 中心電荷の候補のうち, $c = 36, 122/3, 238/5, 48$ に対応する MLDE の特性べき数は複素数を含むことが分かる. したがって, 条件 (A)–(C) をみたす VOA の中心電荷と対応する MLDE の特性べき数は Table 1 のようになる. このとき, 各中心電荷に対応する MLDE は以下のようになる.

c	特性べき数	特性べき数 $+c/24$
$c_{2,3} = 0$	$0,\ 2,\ (-1 \pm \sqrt{-7-4\alpha_1})/2$	$0,\ 2,\ (-1 \pm \sqrt{-7-4\alpha_1})/2$
$c_{2,5} = -22/5$	$-1/60,\ 11/60, (25 \pm \sqrt{1114-3600\alpha_1})/60$	$-1/5,\ 0,\ (14 \pm \sqrt{1114-3600\alpha_1})/60$
$c_{2,7} = -68/7$	$-1/42, 5/42, 17/42, 1/2$	$-3/7, -2/7, 0, 2/21$
$c_{3,4} = 1/2$	$-1/48, 1/24, 23/48, 1/2$	$0, 1/16, 1/2, 25/48$
$c_{2,9} = -46/3$	$-1/36, 1/12, 11/36, 23/36$	$-2/3, -5/9, -1/3, 0$
$c_{3,5} = -3/5$	$-1/40, 1/40, 9/40, 31/40$	$-1/20, 0, 1/5, 3/4$
$c_{3,14} = -114/7$	$-1/28, 3/28, 1/4, 19/28$	$-5/7, -4/7, -3/7, 0$
$c_{5,6} = 4/5$	$-1/30, 1/30, 11/30, 19/30$	$0, 1/15, 2/5, 2/3$

Table 1: 中心電荷と特性べき数

$$c_{2,3} : f'''' - E_2 f''' + (3E_2' + \alpha_1 E_4) f'' - \left(E_2'' + \frac{\alpha_1}{2} E_4' + (2\alpha_1 + 4) E_6\right) f' = 0, \tag{24}$$

$$c_{2,5} : \vartheta_6 \circ \vartheta_4 \circ L_{2,5}(\vartheta_0) f + \left(\alpha_1 - \frac{121}{400}\right) E_4 L_{2,5}(\vartheta_0) f = 0, \tag{25}$$

$$c_{2,7} : \vartheta_6 \circ L_{2,7}(\vartheta) f = 0, \tag{26}$$

$$c_{3,4} : \vartheta_6 \circ L_{3,4}(\vartheta) f = 0, \tag{27}$$

$$c_{2,9} : L_{2,9}(\vartheta_0) f = 0, \tag{28}$$

$$c_{3,5} : L_{3,5}(\vartheta_0) f = 0, \tag{29}$$

$$c_{3,14} : \hat{L}_{3,14}(\vartheta_0) f = 0, \tag{30}$$

$$c_{5,6} : \hat{L}_{5,6}(\vartheta_0) f = 0. \tag{31}$$

MLDE (28)–(31) に対して Theorem 3 および Theorem 5 を用いることにより中心電荷 $c_{2,9}$, $c_{3,5}$, $c_{3,14}$, $c_{5,6}$ に対しては対応する VOA を決定することができる. 一方, (24)–(27) に対しては, それぞれの MLDE を解くことで, 対応する中心電荷を持つ条件 (A)–(C) をみたす VOA が存在しないことが証明できる. したがって, 以下の結果を得る.

Theorem 7. 頂点作用素代数 V が条件

(A) V の中心電荷と既約加群の最低ウエイトは有理数.

(B) V の既約表現の張る空間 $\mathcal{X}(V)$ はある 4 階の MLDE の解空間と一致している.

(C) V の指標 ch_V は $q^{-c/24}(1+q^2+O(q^3))$ である.

をみたしているとする. このとき V は以下のいずれかと同型である.

$$L(-46/3,0), \quad L(-3/5,0), \quad \hat{L}(-114/7,3), \quad \hat{L}(4/5,3). \tag{32}$$

References

1. Y. Arike, M. Kaneko, K. Nagatomo, Y. Sakai, Affine vertex operator algebras and modular linear differential equations, to appear in Lett. Math. Phys.

2. C. Dong, H. Li, G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine, Commun. Math. Phys., **214**, 1–56 (2000)

3. B. Feigin and D. Fuchs, Representation theory of the Virasoro algebra, In. *Representation theory of Lie groups and related topics* Adv. Stud. Contemp. Math., **7**, New York, Gordon and Breach, 465–554 (1990)

4. B. Feigin and D. Fuchs, Verma modules over the Virasoro algebra, Lect. Notes in Math., **1060**, 230–245 (1982)

5. I. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, Duke Math. J., **66**, No. 1, 123–168 (1992)

6. P. Guershoy, A mixed mock modular solution of Kaneko–Zagier equation, Ramanujan J., **36**, No. 1–2, 149–164 (2015)

7. K. Iohara and Y. Koga, *Representation theory of the Virasoro algebra*, Springer-Verlag, London, 2011.

8. C. H. Lam and H. Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stablizers, Commun. Math. Phys., **277**, 237–285 (2008).

9. G. Mason, Vector-valued modular forms and linear differential operators, Int. J. Number Theory, **3**, no. 3, 377–390 (2007)

10. S. D. Mathur, S. Mukhi and A. Sen, On the classification of rational conformal field theories, Phys. Letter B, **213**, No. 3, 303–308 (1988)

11. A. Milas, Ramanujan's "Lost Notebook" and the Virasoro algebra, Commun. Math. Phys., **251**, 567–588 (2004)

12. A. Milas, Virasoro algebra, Dedekind η-function and specialized MacDonald identities, Transformation Groups, **9**, No. 3, 273–288 (2004)

13. W. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebras, IMRN, No 7, 197–211 (1993)

14. H. Yamauchi, Module categories of simple current extensions of vertex operator algebras, J. Pure Appl. Algebra **189**, 315–328 (2004)

15. Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, J. Amer. Math. Soc., **9**, 237–302 (1996)