数理解析研究所講究録
第2003巻 2016年 133-134

Blocks of finite groups

千葉大学大学院理学研究科　　音喜多　純拓
Yoshihiro Otokita
Graduate School of Science
Chiba University

序論

G を有限群，$(\mathcal{K},\mathcal{O},k)$ を p-モジュラー系とする．すなわち，$\mathcal{O}$ は完備離散付値環で標数 0 の商体 $\mathcal{K}$ と標数 $p>0$ の剰余体 k を持つ．以下では，k は代数的閉体，$\mathcal{K}$ は G の任意の部分群の分解体となっているものと仮定する．群多元環 kG のブロック B に対し，B に属する既約通常指標，既約 Brauer 指標の個数をそれぞれ $k(B),l(B)$ と表す．また B の不足群の一つを $\delta(B)$, カルタン行列を C_B とする．一般に $l(B)\leq k(B)$ であり，等号が成立するのは $k(B)=l(B)=1$ のときに限る．さらにこれは $|\delta(B)|=1$ であることとも同値であることが知られている．そこで以下では $k(B)-l(B)=1$ の場合を考える．このとき $\delta(B)$ は初等可換群 (elementary abelian group) であることが示されている ([4, Theorem 7.1])．一方，本稿の主定理は以下である．

主定理　[10, Theorems 1.1 , Corollary 1.2]

(1)　$p=2,k(B)-l(B)=1$ のとき C_B の対角成分は偶数である．

(2)　$k(B)=3$ のとき p は奇素数である．

群多元環 kG とそのブロック B は対称多元環である．上記主定理は対称多元環のカルタン行列に関する [3] の結果を用いて示す．本稿では証明の概要を挙げるが，詳しくは [10] で述べている．

主定理 (1) の証明

Step 1

$\delta(B)$ の G-共役類は 2 個であり，よって $\delta(B)$ の指数 (exponent) は 2 である．

Step 2

$n\geq 0$ に対し，B の k-部分空間

$$K(B)=\sum_{a,b\in B}k(ab-ba),$$
$$T_n(B)=\{a\in B\mid a^{p^n}\in K(B)\},$$
$$T_n(B)^{\perp}=\{a\in B\mid \lambda(T_n(B)a)=0\}$$

を定義する．ここで $\lambda:B\to k$ は B の対称多元環としての k-線形形式である．このとき Step 1 と [7, Theorem J] より，$T_1(B)=J(B)+K(B)$, $T_1(B)^{\perp}=\mathrm{soc}(B)\cap Z(B)$ を得る．

Step 3

以上より，$(T_1(B)^{\perp})^2=0$ となり，[3, Lemma 3.4] から (1) を得る．

主定理 (2) の証明

Step 1

$p=2$ と仮定して矛盾を導く．[8] より，$l(B)=2$ としてよい．このとき (1) と [3, Lemma 4.3] を用いて，$Z(B)$ の Higman ideal $H(B)$ に対して $H(B)=0$ を得る．

Step 2

[2, Proposition 3.13] より，Higman ideal は projective center $Z^{\mathrm{pr}}(B)$ と一致する．ここで $k(B)-l(B)=1$ のとき，[6, Theorem 3.1, Lemma 3.8] より $\dim Z(B)/Z^{\mathrm{pr}}(B)=2$ であるから，$k(B)=\dim Z(B)=2$ となり矛盾である．

いくつかの問題

「$k(B)=2$ のとき $|\delta(B)|=2$」であることが [1] によって示されている．次の問題として「$k(B)=3$ のとき $|\delta(B)|=3$ ではないか？」が予想されており，いくつかの仮定のもとではこれが正しい（[9, Theorem 4.1, Theorem 4.2]）ことが示されているが，一般のブロックに対しては未解決である（この予想が正しければ「$k(B)=3$ ならば $p=3$」が導かれる）．一方，[5] において「非自明な不足群を $\delta(B)$ を持つブロック B に対し，$2\sqrt{p-1}\leq k(B)$ ではないか？」が予想されており，これが正しければ本稿の主定理と合わせて，「$k(B)=3$ ならば $p=3$」を得る．

参考文献

[1] J. Brandt, *A lower bound for the number of irreducible characters in a block*, J. Algebra **74** (1982), 509 – 515.

[2] M. Broué, *Higman's criterion revisited*, Michigan Math. J. **58** (2009), 125–179.

[3] L. Héthelyi, E. Horváth, B. Külshammer, J. Murray, *Central ideals and Cartan invariants of symmetric algebras*, J. Algebra **293** (2005), 243–260.

[4] L. Héthelyi, R. Kessar, B. Külshammer, B. Sambale, *Blocks with transitive fusion systems*, J. Algebra **424** (2015), 190–207.

[5] L. Héthelyi, B. Külshammer, *On the number of conjugacy classes of a finite solvable group*, Bull. Lond. Math. Soc. **32** (2000), 668–672.

[6] R. Kessar, M. Linckelmann, *On blocks with Frobenius inertial quotient*, J. Algebra **249** (2002), 127–146.

[7] B. Külshammer, *Bemerkungen über die Gruppenalgebra als symmetrische Algebra. II*, J. Algebra **75** (1982), 59–69.

[8] B. Külshammer, *Symmetric local algebras and small blocks of finite groups*, J. Algebra **88** (1984), 190–195.

[9] B. Külshammer, G. Navarro, B. Sambale, P. H. Tiep, *Finite groups with two conjugacy classes of p-elements and related questions for p-blocks*, Bull. Lond. Math. Soc. **46** (2014), 305–314.

[10] Y. Otokita, *On 2-blocks with* $k(B)-l(B)=1$, Arch. Math. (Basel) **106** (2016), 225–228.