数理解析研究所講究録
第2005巻 2016年 174-180

Oseen 方程式と Navier-Stokes 方程式のための安定化特性曲線有限要素スキーム

野津裕史 *，田端正久 †

* 早稲田大学高等研究所
† 早稲田大学理工学術院

*h.notsu@aoni.waseda.jp

1 はじめに

我々は，Navier-Stokes 方程式のための安定化特性曲線有限要素スキームを開発した [2, 3]．同スキームは特性曲線有限要素法 [6] と圧力安定化法 [1] を結合したものである．特性曲線法は，最終的に得られる大規模連立一次方程式の係数行列が対称という利点を持っている．加えて，圧力安定化法により流速と圧力ともに P1（区分線形）要素による計算が可能であり，特に 3 次元計算において有用である．我々は理論解析をすすめ，Oseen（線形化 Navier-Stokes）方程式および Navier-Stokes 方程式のための安定化特性曲線有限要素スキームについての結果を得た [4, 5]．本稿ではそれらの結果をまとめ，スキームおよび得られた結果の相違点について述べる．

2 問題設定

$\Omega \subset \mathbb{R}^d (d=2,3)$ を有界多角形 $(d=2)$ または多面体 $(d=3)$ 領域，$\Gamma \equiv \partial\Omega$ を Ω の境界, ν_0, T を正定数，$\nu \in (0, \nu_0]$ とする．w, f : $\Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$, u^0 : $\Omega \to \mathbb{R}^d$ は与えられた関数で，それぞれ，既知流速，外力，初期値である．物質微分 D/Dt_w を

$$\frac{D}{Dt_w} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + w \cdot \nabla$$

により定義する．$v : \Omega \to \mathbb{R}^d$ に対して $D(v)$: $\Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ を

$$D_{ij}(v) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (i, j = 1, \cdots, d)$$

により定義する．既知流速 w について次の仮定をおく．

仮定 1 流速 w は次をみたす．

$$\begin{cases} w \in C^0([0,T]; W^{1,\infty}(\Omega)^d), \\ w = 0, \ (x,t) \in \Gamma \times [0,T]. \end{cases}$$

次の 2 つの問題を考える．問題 1 において $w=u$ としたものが問題 2 である．

問題 1（Oseen） Oseen 方程式で支配される問題;

$$
\begin{aligned}
\frac{Du}{Dt_w} - \nabla(2\nu D(u)) + \nabla p = f, &\qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
\nabla \cdot u = 0, &\qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
u = 0, &\qquad (x,t) \in \Gamma \times (0,T),\\
u = u^0, &\qquad x \in \Omega,\ \text{at}\ t = 0,
\end{aligned}
$$

を満たす $(u,p) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ を求めよ．

問題 2（Navier-Stokes） Navier-Stokes 方程式で支配される問題;

$$
\begin{aligned}
\frac{Du}{Dt} - \nabla(2\nu D(u)) + \nabla p = f, &\qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
\nabla \cdot u = 0, &\qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
u = 0, &\qquad (x,t) \in \Gamma \times (0,T),\\
u = u^0, &\qquad x \in \Omega,\ \text{at}\ t = 0,
\end{aligned}
$$

を満たす $(u,p) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ を求めよ．ここに,

$$
\frac{D}{Dt} \equiv \frac{D}{Dt_u} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla
$$

である．

3 安定化特性曲線有限要素スキーム

同じ記号 $(\cdot,\cdot)$ でスカラー，ベクトル，行列値関数の $L^2(\Omega)$ 内積を表す. 流速と圧力の関数空間 V, Q をそれぞれ,

$$
V \equiv H_0^1(\Omega)^d, \qquad Q \equiv L_0^2(\Omega) \equiv \{q \in L^2(\Omega);\ (q,1) = 0\},
$$

とする．$V \times V$ 上の双一次形式 a と $H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$ 上の双一次形式 b をそれぞれ,

$$
a(u,v) \equiv 2\big(D(u), D(v)\big), \qquad b(v,q) \equiv -(\nabla \cdot v, q),
$$

で定義する．$\mathscr{T}_h = \{K\}$ を領域 Ω の三角形 $(d=2)$ または四面体 $(d=3)$ 分割とする．流速と圧力に対応する P1 有限要素空間 X_h, M_h をそれぞれ,

$$
\begin{aligned}
X_h &\equiv \{v_h \in C^0(\bar{\Omega})^d;\ v_h|_K \in P_1(K)^d,\ \forall K \in \mathscr{T}_h\},\\
M_h &\equiv \{q_h \in C^0(\bar{\Omega});\ q_h|_K \in P_1(K),\ \forall K \in \mathscr{T}_h\},
\end{aligned}
$$

とし，$V_h \equiv V \cap X_h$, $Q_h \equiv Q \cap M_h$ とする．δ_0 を正定数，h_K を要素 K の直径，$(\cdot,\cdot)_K$ を $L^2(K)^d$ 内積とする．$H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 上の h に依存する双一次形式 $\mathscr{C}_h$ と $(V \times Q) \times (V \times Q)$ 上の h に依存する双一次形式 $\mathscr{A}_h$ をそれぞれ，

$$\mathscr{C}_h(p,q) \equiv -\delta_0 \sum_{K \in \mathscr{T}_h} h_K^2 (\nabla p, \nabla q)_K,$$

$$\mathscr{A}_h((u,p),(v,q)) \equiv \nu a(u,v) + b(v,p) + b(u,q) + \frac{1}{\nu}\mathscr{C}_h(p,q),$$

により定義する．

時間刻み Δt に対して $t^n \equiv n\Delta t$ $(n \in \mathbb{Z})$，$N_T \equiv \lfloor T/\Delta t \rfloor$ とする．$\Omega \times (0,T)$ 上で定義された関数 g に対して $g^n \equiv g(\cdot, t^n)$ とする．u, v : $\Omega \to \mathbb{R}^d$ を関数とする．v による上流点を与える関数 $X_1(v, \Delta t) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ を

$$X_1(v,\Delta t)(x) \equiv x - v(x)\Delta t$$

により定義する．記号 $\circ$ は関数の合成を表し，

$$u \circ X_1(v,\Delta t)(x) \equiv u\big(X_1(v,\Delta t)(x)\big)$$

とする．

問題 1 および 2 のための安定化特性曲線有限要素スキームを述べる．

スキーム 1（Oseen） $u^0 \in V$ の近似 $u_h^0 \in V_h$ が与えられたとする．問題 1 のための安定化特性曲線有限要素スキーム;

$$\Big(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(w^n, \Delta t)}{\Delta t}, v_h\Big) + \mathscr{A}_h((u_h^n, p_h^n),(v_h,q_h)) = (f^n, v_h),$$
$$\forall (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h,\ n = 1, \cdots, N_T,$$

により $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h \times Q_h$ を求めよ．

スキーム 2（Navier-Stokes） $u^0 \in V$ の近似 $u_h^0 \in V_h$ が与えられたとする．問題 2 のための安定化特性曲線有限要素スキーム;

$$\Big(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(u_h^{n-1}, \Delta t)}{\Delta t}, v_h\Big) + \mathscr{A}_h((u_h^n, p_h^n),(v_h,q_h)) = (f^n, v_h),$$
$$\forall (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h,\ n = 1, \cdots, N_T,$$

により $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h \times Q_h$ を求めよ．

4 安定性と誤差評価

Sobolev 空間 $L^2(\Omega), H^1(\Omega), W^{1,\infty}(\Omega)$ のノルムを $\|\cdot\|_0 \equiv \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_1 \equiv \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{1,\infty} \equiv \|\cdot\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ と書く．ノルム空間 $X (= L^2(\Omega),\ H^1(\Omega))$, 関数集合 $\{u^n\}_{n=0}^{N_T} \subset X$,

$\{p^n\}_{n=1}^{N_T} \subset H^1(\Omega)$, $q \in H^1(\Omega)$ に対してノルムおよびセミノルム $\|\cdot\|_{l^\infty(X)}$, $\|\cdot\|_{l^2(X)}$, $|\cdot|_h$, $\|\cdot\|_{l^2(|\cdot|_h)}$ を

$$\|u\|_{l^\infty(X)} \equiv \max\{\|u^n\|_X;\ n=0,\cdots,N_T\}, \qquad \|u\|_{l^2(X)} \equiv \left\{\Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|u^n\|_X^2\right\}^{1/2},$$

$$|q|_h \equiv \left\{\sum_{K\in\mathscr{T}_h} h_K^2 \|\nabla q\|_{L^2(K)}^2\right\}^{1/2}, \qquad \|p\|_{l^2(|\cdot|_h)} \equiv \left\{\Delta t \sum_{n=1}^{N_T} |p^n|_h^2\right\}^{1/2},$$

により定義する. 後退差分作用素 $\bar{D}_{\Delta t}$ を

$$\overline{D}_{\Delta t} u^n \equiv \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \quad (n = 1,\cdots,N_T)$$

とする.

スキーム 1 および 2 について，次の安定性および誤差評価を得た.

4.1 スキーム 1 (Oseen) の結果

定理 1（安定性, [4]） (i) 仮定 1 が成り立つとする. (u_h, p_h) をスキーム 1 の解, $\Delta t_0 (\le 1)$ を (4) をみたす正定数, $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$ とする. このとき, $h, \Delta t$ および ν に依存しない正定数 $c = c(\|w\|_{C^0(W^{1,\infty})}, \|u_h^0\|_0, \|f\|_{l^2(L^2)})$ が存在して，次の評価が成立する.

$$\|u_h\|_{l^\infty(L^2)},\ \sqrt{\nu}\|u_h\|_{l^2(H^1)},\ \frac{1}{\sqrt{\nu}}|p_h|_{l^2(|\cdot|_h)} \le c. \tag{1}$$

(ii) さらに，ある $p_h^0 \in Q_h$ が存在して，

$$b(u_h^0, q_h) + \frac{1}{\nu}\mathscr{C}_h(p_h^0, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \tag{2}$$

を満たすとする. このとき, h と Δt に依存しない正定数 $c' = c'(\|w\|_{C^0(W^{1,\infty})}, \|u_h^0\|_1, |p_h^0|_h, \|f\|_{l^2(L^2)}, 1/\nu, \nu_0)$ が存在して，次の評価が成立する.

$$\|u_h\|_{l^\infty(H^1)},\ \|\bar{D}_{\Delta t} u_h\|_{l^2(L^2)},\ \|p_h\|_{l^2(L^2)} \le c'.$$

注意 1 (i) (1) に現れる正定数 c は ν に依存しない. (ii) $u_h^0 \in V_h$ を $(u^0, 0)$ の $\mathscr{A}_h$ による Stokes 射影の第一成分とするとき, (2) を満たす $p_h^0 \in Q_h$ が存在する.

定理 2（誤差評価, [4]） 仮定 1 が成り立つとする. (u, p) を問題 1 の解とし, $u \in H^1(0,T; V \cap H^2) \cap H^2(0,T; L^2)$, $p \in H^1(0,T; Q \cap H^1)$, $\nabla \cdot u^0 = 0$ が成り立つとする. (u_h, p_h) をスキーム 1 の解, $\Delta t_0 (\le 1)$ を (4) をみたす正定数, $\Delta t \in (0, \Delta t_0]$ とする. $u_h^0 \in V_h$ は $(u^0, 0)$ の $\mathscr{A}_h$ による Stokes 射影の第一成分とする. このとき, h と Δt に依

存しない正定数 $c = c(\|w\|_{C^0(W^{1,\infty})},\ \|u\|_{H^1(H^2)\cap H^2(L^2)}, \|p\|_{H^1(H^1)}, 1/\nu,\ \nu_0)$ が存在して，次の評価が成立する．

$$\|u_h - u\|_{l^\infty(H^1)},\ \left\|\bar{D}_{\Delta t}u_h - \frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{l^2(L^2)},\ \|p_h - p\|_{l^2(L^2)} \le c(\Delta t + h).$$

4.2 スキーム 2 (Navier-Stokes) の結果

定理 3（[5]） 問題 2 の解 (u,p) は $u \in C^0([0,T];W^{1,\infty}) \cap H^1(0,T;H^2) \cap H^2(0,T;L^2)$, $p \in H^1(0,T;H^1)$, $\nabla \cdot u^0 = 0$ とする．Δt_* を任意に固定した正定数とする．このとき，h と Δt に依存しない正定数 h_0 および c_0 が存在して，任意の $h \in (0,h_0]$ と

$$\Delta t \le \min\{c_0 h^{d/4}, \Delta t_*\} \tag{3}$$

に対して，次の (i)–(iii) が成立する．

(i) $u_h^0 \in V_h$ を $(u^0,0)$ の $\mathscr{A}_h$ による Stokes 射影の第一成分とする．このとき，スキーム 2 の解 $(u_h,p_h) = \{(u_h^n,p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h \times Q_h$ が唯一存在する．

(ii) 正定数 $c_1 = c_1(\|u\|_{C^0(W^{1,\infty}\cap H^2)}, \|p\|_{C^0(H^1)}, 1/\nu, \nu_0)$ が存在して次の評価が成立する．

$$\|u_h\|_{l^\infty(L^\infty)} \le c_1.$$

(iii) 正定数 $c = c(\|u\|_{C^0(W^{1,\infty})\cap H^1(H^2)\cap H^2(L^2)}, \|p\|_{H^1(H^1)}, 1/\nu, \nu_0)$ が存在して次の評価が成立する．

$$\|u_h - u\|_{l^\infty(H^1)},\ \left\|\bar{D}_{\Delta t}u_h - \frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{l^2(L^2)},\ \|p_h - p\|_{l^2(L^2)} \le c(\Delta t + h).$$

5 スキームおよび結果の相違点

スキーム 1 と 2 の違いは第 1 項の合成関数部分のみである．従って，スキーム 1 と 2 において得られる連立一次方程式の係数行列は等しく，かつ，それは対称である．

スキーム 1 は本質的に無条件安定であるのに対して，スキーム 2 は条件安定である．スキーム 2 の条件安定性は Navier-Stokes 方程式の非線形性に起因している．以下この点について述べる．

問題 1 (Oseen) を考えるとき，次の命題は上流点集合 $X_1(w^n,\Delta t)(\Omega)$ $(n = 1,\cdots,N_T)$ がすべて Ω に含まれるための十分条件を与えている．

命題 1（ [7, Proposition 1] ） 仮定 1 および Δt についての不等式

$$\Delta t < 1/\|w\|_{C^0(W^{1,\infty})} \tag{4}$$

の下で次式が成り立つ.

$$X_1(w^n,\Delta t)(\Omega)=\Omega \quad (n=1,\cdots,N_T).$$

問題 1 (Oseen) のためのスキーム 1 において時間刻み Δt が不等式 (4) をみたすとき，命題 1 により上流点は Ω に含まれ，$u_h^{n-1}\circ X_1(w^n,\Delta t)$ は意味をもつ．それに対して問題 2 (Navier-Stokes) のためのスキーム 2 では，u_h は未知関数であるため $u_h^{n-1}\circ X_1(u_h^{n-1},\Delta t)$ が意味をもつことは自明ではない．実際，(4) に対応する

$$\Delta t\|u_h^{n-1}\|_{1,\infty}<1 \tag{5}$$

を示すことは本質的である．定理 3 の証明では，Δt の条件 (3) の下で (5) が成り立つことを数学的帰納法により示している．また，証明中で逆不等式

$$\|v_h\|_{1,\infty}\le ch^{-d/2}\|v_h\|_1, \quad \forall v_h\in V_h,$$

を利用しており，これが Δt の条件 (3) に現れている.

6 結び

Oseen 方程式および Navier-Stokes 方程式のための安定化特性曲線有限要素スキームを述べた．両スキームについて得られた安定性と収束性の結果をまとめ，それらの相違点について言及した.

謝辞 本研究は，文部科学省科学技術人材育成費補助金（テニュアトラック普及・定着事業）「早稲田高等研究所テニュア・トラックプログラム」，日本学術振興会科学研究費補助金若手研究 (B), No. 23740090, 基盤研究 (C), No. 25400212, (S), No. 24224004, および日独共同大学院プログラム（流体数学）の支援を受けた.

参考文献

[1] F. Brezzi and J. Pitkäranta. On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations. In W. Hackbusch editor, Efficient solutions of Elliptic Systems, Vieweg, Wiesbaden (1984), 11–19.

[2] H. Notsu. Numerical computations of cavity flow problems by a pressure stabilized characteristic-curve finite element scheme. *Transactions of Japan Society for Computational Engineering and Science*, Online ISSN: 1347-8826 (2008).

[3] 野津裕史，田端正久. Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化・特性曲線法結合有限要素スキーム. 日本応用数理学会論文誌, **18** (2008), 427–445.

[4] H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Oseen equations. Submitted. Available at: `http://www.waseda.jp/wias/achievement/dp/data/dp2013001.pdf`

[5] H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Navier-Stokes equations. Submitted. Available at: `http://www.waseda.jp/wias/achievement/dp/data/dp2013002.pdf`

[6] O. Pironneau. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. Numerische Mathematik, **38** (1982), 309–332

[7] H. Rui and M. Tabata. A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. Numerische Mathematik, **92** (2002), 161–177.