

# 成層乱流のプラントル数依存性

京都大学大学院 工学研究科 沖野真也 (Shinya Okino)  
京都大学大学院 工学研究科 花崎秀史 (Hideshi Hanazaki)

## 概要

The Prandtl number dependence of stratified turbulence is investigated by direct numerical simulations. For moderate stratification, the horizontal spectrum of the potential energy shows an increase in high wavenumbers as the Prandtl number increases, while the  $-1$  power law appears in a low horizontal wavenumber range. The potential energy spectra comply with the Batchelor scaling, which had been derived for a passive scalar. When stratification becomes strong, irrespective of the Prandtl number, both the kinetic and the potential energy spectra exhibit the  $-3$  power law, and the proximity of them is observed in high horizontal wavenumbers, which means the Batchelor scaling is no longer valid for the horizontal spectra of the potential energy.

## 1 緒言

乱流中における熱や物質の輸送は我々の身の回りにおいて普遍的に起こる現象である。例えば、大気・海洋中における熱、塩分、汚染物質等の拡散の予測や工業製品中の熱輸送・燃焼の効率化などに関連して、地球物理学や機械工学において非常に重要なテーマとして位置づけられる。

Batchelor(1959)は等方乱流中における、流れに影響を及ぼすことなく受動的に運動する“パッシブスカラー”のスペクトルに関する研究をおこなった。ここでは Prandtl 数  $Pr$  が 1 よりも十分に大きいとき、スカラーは Batchelor 波数  $k_{B*} = Pr^{1/2}k_{K*}$  において散逸し ( $k_{K*}$  は Kolmogorov 波数である。以後、下付きの  $*$  は有次元量を表すものとする。)、散逸移流領域 ( $k_{K*} < k_* < k_{B*}$ ) において、スカラースペクトルは波数の  $-1$  乗にしたがって減少することが理論的に示された。実際に  $Pr > 1$  の場合について直接数値計算をおこなった例として Bogucki *et al.*(1997)がある。

一方、熱や塩分などのスカラーを含む流体は、それらの分布によって流体自身の密度を変化させる。このようなスカラーは浮力を介して流れに影響を及ぼすため、“アクティブスカラー”と呼ばれる。これまで、アクティブスカラーの平均場が鉛直方向に勾配をもった流体中の乱流、すなわち成層乱流の研究は数多くなされてきた (e.g. Herring & Métais, 1989; Laval *et al.*, 2003; Waite & Bartello, 2004; Lindborg, 2006; Brethouwer *et al.*, 2007; Kimura & Herring, 2012) が、その多くの場合、 $Pr = 1$  が対象であった。

一方で、水中における熱と塩分の Prandtl 数はそれぞれ 7 と 700 であり、特に実験室系においては  $Pr = 1$  とは大きく異なる振舞いを示すと考えられる。(塩分に対しては通常 Schmidt 数が用いられるが、運動学的には等価である。) 本研究では、Prandtl 数が 1 よりも大きいアクティブスカラーによる成層乱流の性質について直接数値シミュレーションによって調べることを目的とする。

## 2 基礎方程式

周期境界を有する、一辺の長さが  $L_*$  の立方体領域に満たされた密度成層流体を考える。流体の代表密度を  $\rho_{0*}$ 、動粘性係数を  $\nu_*$ 、スカラーの拡散係数を  $\kappa_*$ 、重力加速度を  $g_*$  とする。座標系として、鉛直方向に  $z_*$  座標、水平方向に  $x_*, y_*$  座標をとる。本研究ではスカラー  $S_*$  の寄与による一様密度成層を取り扱う。すなわち、平均密度、平均スカラー場を  $\bar{\rho}_*, \bar{S}_*$  として、 $d\bar{\rho}_*/dz_* \propto d\bar{S}_*/dz_* = \text{const.}$  である。これらを用いて、浮力振動数は  $N_* = \sqrt{-(g_*/\rho_{0*}) \cdot d\bar{\rho}_*/dz_*}$  と定義される。

また、全エネルギー ( $TE_{0*}$ ) が時間的に一定となるように調節された柱状外力  $f_{i*}$  を加えることにより、定常乱流を生成する。柱状外力とは、水平成分のみをもち ( $f_{3*} = 0$ )、鉛直方向には一様 ( $\partial f_{i*}/\partial z_* = 0$ ) な外力である。エネルギーは negative viscosity (Yamazaki *et al.*, 2002) によって、波数  $k_{f*} = 2\pi/L_*$  に注入されるものとする。

流速  $u_{i*}$ 、基本場からの圧力変動  $p'_*$ 、スカラー変動  $S'_*$  を支配する基礎方程式は、代表長さ  $L_{f*} = 1/k_{f*}$ 、代表速度  $U_* = \sqrt{2TE_{0*}/3\rho_{0*}}$ 、代表圧力変動  $\rho_{0*}U_*^2$ 、代表スカラー変動  $L_{f*}d\bar{S}_*/dz_*$  を用いて無次元化され、以下で与えられる；連続の式、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

Boussinesq 近似を施した運動方程式、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{S}{Fr^2} \delta_{i3} + f_i, \quad (2)$$

スカラーの輸送方程式、

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u_j \frac{\partial S}{\partial x_j} = \frac{1}{RePr} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} + u_3. \quad (3)$$

ここで、下付きの \* を除いたものは無次元量を表し、簡単のために圧力変動とスカラー変動の ' は省略している。系の挙動を決定する無次元パラメータは、Reynolds 数:  $Re = U_*L_{f*}/\nu_*$ 、Froude 数:  $Fr = U_*/(N_*L_{f*})$ 、Prandtl 数:  $Pr = \nu_*/\kappa_*$  の三つである。本研究では二種類の Froude 数  $Fr = 1$  と 0.05 に対する流れの Prandtl 数依存性を  $Pr = 1, 3, 7$  と変化させて議論する。なお、Reynolds 数は一定 ( $Re = 400$ ) とした。

### 3 数値計算法

方程式 (1)-(3) の解を直接数値計算によって求める。計算には  $512^3$  の格子点を用いたスペクトル法を採用した。切断波数を 170 とし、 $3/2$  則によりエイリアス誤差を除去した。時間発展スキームとして 4 次精度の Runge-Kutta 法を用い、時間刻み幅は  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$  とした。初期値として、密度一様流体に対して外力  $f_i$  を与え、定常に達した状態を用いた。

計算には大阪大学サイバーメディアセンターの SX-ACE を利用した。4 ノード 16 コアの Flat MPI 並列により、 $t = 20$  までの計算に約 15.5 時間を要した。

### 4 計算結果

以後の結果は特に断りのない限り、いずれも流れが定常状態に達した  $t = 15$  におけるものである。このとき、Taylor マイクロ長に基づく Reynolds 数は  $Re_\lambda \sim 150$ 、Kolmogorov 波数は  $k_K \sim 65$  であった。 $Pr = 7$  における Batchelor 波数は  $k_B = Pr^{1/2}k_K \sim 170$  であり、今回の計算ではスカラーの最小スケールまで解像できているといえる。

Fig. 1 に次式で定義される浮力 Reynolds 数の時間変化を示す。

$$Re_b = \frac{\epsilon_*}{\nu_* N_*^2}. \quad (4)$$

ここで、 $\epsilon_*$  は運動エネルギー散逸率である。浮力 Reynolds 数については  $Pr$  への依存性が小さかったため、ここでは  $Pr = 7$  の結果を示している。中程度の成層の場合 ( $Fr = 1$ )、 $Re_b \sim 100 \gg 1$  で

あるのに対し、強成層の場合 ( $Fr = 0.05$ ),  $Re_b \sim 0.2 \ll 1$  である。浮力 Reynolds 数は Ozmidov 波数  $k_{O*} = (N_*^3/\epsilon_*)^{1/2}$  を用いて次のようにも書ける。

$$Re_b = \left( \frac{k_{K*}}{k_{O*}} \right)^{4/3}. \quad (5)$$

なお、Ozmidov 波数は浮力効果と非線形効果が釣り合う波数を表す。  $Fr = 1$  の場合の  $Re_b \gg 1$  は  $k_O \ll k_K$  を意味し、浮力の影響がごく低波数域に限定されていることが分かる。一方で、  $Fr = 0.05$  の場合は  $k_O \gg k_K$  であるため、存在する最小の渦スケールにまで浮力の影響が及んでいることになる。 Brethower *et al.* (2007) によると、浮力 Reynolds 数は鉛直拡散項に対する鉛直移流項の比に相当し、  $Re_b < 1$  のとき、準二次元的な流れが生じることが報告されている。

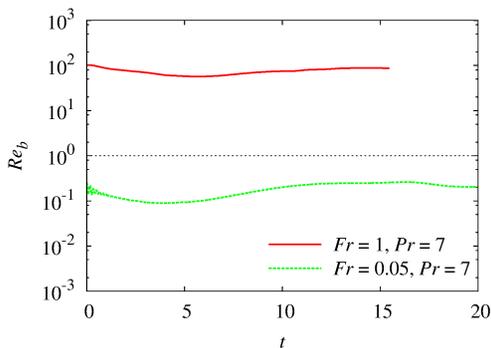


Figure 1: Time development of the buoyancy Reynolds number,  $Re_b$ .

#### 4.1 中程度の成層 ( $Fr = 1$ ) の場合

Fig. 2 に局所スカラー散逸率  $(\partial S/\partial x_i)^2/RePrFr^2$  の三つの面  $x = 0, y = 0$  及び  $z = 0$  上における分布を示す。スカラー散逸率は小さいスケールのスカラーの挙動を示す指標となる。  $Pr = 1, 7$  のいずれの場合においても、水平断面と鉛直断面に定性的な違いは見られず、スカラーの分布は等方的であるといえる。これは成層の効果が比較的に弱いためであり、  $Fr$  の減少と共に流れが非等方化し、鉛直方向に扁平な構造が現れることが期待される (Herring, J. R. & Métais, O., 1989)。実際に後に示す  $Fr = 0.05$  の場合 (Fig. 6) では明らかな非等方性が確認できる。  $Pr = 1$  の場合と  $Pr = 7$  の場合を比べると、  $Pr = 7$  のほうがより小さなスケールの変動を含んでいる。これはパッシブスカラーに対して Batchelor (1959) が示したように、高 Prandtl 数のスカラーがより高波数で散逸していることを表している。

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの水平スペクトルはそれぞれ以下のように定義される；

$$E_K(k_h) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dk_z k_h \hat{u}_i(k_h, \phi, k_z) \hat{u}_i^*(k_h, \phi, k_z)/2, \quad (6)$$

$$E_P(k_h) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dk_z k_h \hat{S}(k_h, \phi, k_z) \hat{S}^*(k_h, \phi, k_z)/(2Fr^2). \quad (7)$$

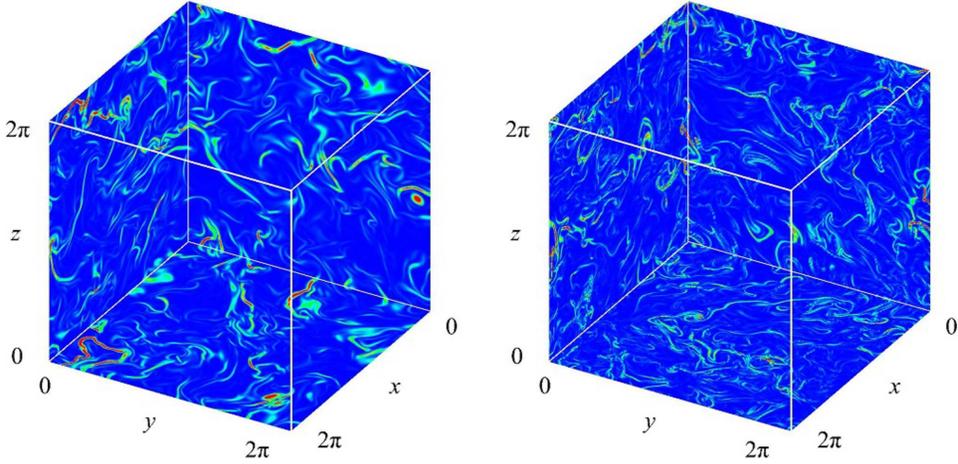


Figure 2: Distributions of the local scalar dissipation rate  $(\partial S/\partial x_i)^2/RePrFr^2$  at  $Fr = 1$ . Three representative planes ( $x = 0, y = 0$  and  $z = 0$ ) are shown. (Left)  $Pr = 1$  and (right)  $Pr = 7$ . Light/dark grey indicates the region of high/low dissipation rate.

ここで,  $k_h$  は水平波数  $k_h = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ,  $k_z$  は鉛直波数,  $\phi$  は波数空間における水平成分のなす偏角  $\tan \phi = k_y/k_x$  であり,  $\hat{\cdot}$  はフーリエ展開係数, 上付きの  $*$  は複素共役を表すものとする. このとき, 運動エネルギー  $KE$  とポテンシャルエネルギー  $PE$  はそれぞれ次の式で求められる;

$$KE = \frac{1}{2} \langle u_i^2 \rangle = \int_0^\infty dk_h E_K(k_h), \quad (8)$$

$$PE = \frac{1}{2Fr^2} \langle S^2 \rangle = \int_0^\infty dk_h E_P(k_h). \quad (9)$$

ここで,  $\langle \rangle$  は空間平均を表す.

Fig. 3 に運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの水平スペクトル  $E_K, E_P$  を示す. 運動エネルギースペクトルでは, Prandtl 数によらず低波数領域において  $k_h^{-5/3}$  に比例する慣性領域が約 1 桁 ( $1 \leq k_h \leq 10$ ) にわたって見られる. 一方, ポテンシャルエネルギーにおいても  $Pr = 1$  の場合に限りに, 低波数領域における  $-5/3$  乗則が確認できる.  $Pr = 1$  の場合の以上のような特徴は Lindborg (2006) によっても報告されている. また,  $Pr = 1$  のときのみ, 高波数領域において運動エネルギースペクトルとポテンシャルエネルギースペクトルは同程度の大きさをもっている.

Prandtl 数を増加させると  $E_K, E_P$  共に高波数成分が増加する. この傾向はポテンシャルエネルギースペクトルにおいて特に顕著であり, 高波数領域において  $E_K \ll E_P$  となる. また, パッシブスカラーの場合に見られる  $k^{-1}$  スペクトルがアクティブスカラーに対しても  $k_h^{-1}$  スペクトルとして確認できる. そこで, Kolmogorov 波数  $k_K$ , Batchloer 波数  $k_B$ , 運動エネルギー散逸率  $\epsilon$ , ポテンシャルエネルギー散逸率  $\chi$  を用いてポテンシャルエネルギースペクトルを規格化したものを Fig. 4 に示す. 低波数領域においてグラフは平坦な形となり, Prandtl 数が高くなるにつれて  $k_h^{-1}$  に比例する領域が現れることが確認できる. 一方, 高波数領域において, グラフは全て一本の曲線上に乗っていることが分かる. 以上の結果は, パッシブスカラーに対して成立する Batchelor のスケーリングがアクティブスカラーの水平スペクトルに対しても成り立つことを示している.

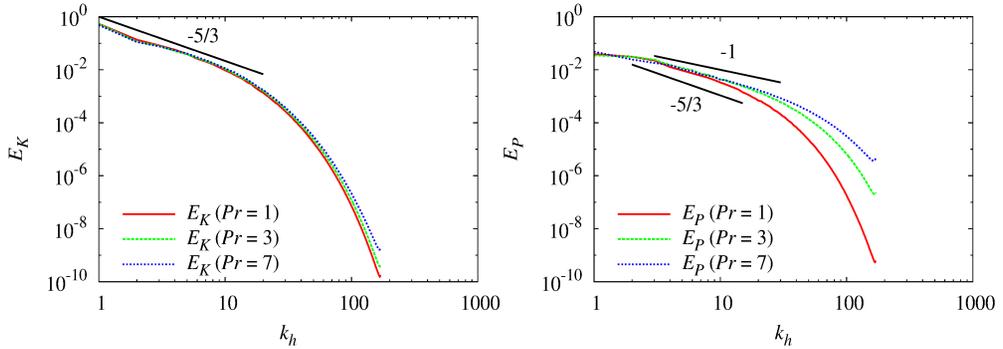


Figure 3: Prandtl number dependence of the horizontal spectra of (left) the kinetic energy and (right) the potential energy at  $Fr = 1$ .

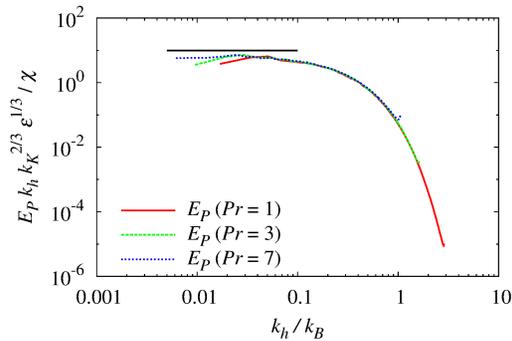


Figure 4: Compensated horizontal spectra of the potential energy at  $Fr = 1$ .

Fig. 3 において運動エネルギースペクトルの高波数成分が増加した理由について、次式で定義される鉛直スカラーフラックス  $F_S$  の水平スペクトルを用いて考察する。

$$F_S = \frac{1}{Fr^2} \langle Sw \rangle = \int_0^\infty dk_h C_{Sw}(k_h), \quad (10)$$

$$C_{Sw}(k_h) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dk_z k_h \Re[\hat{S}(k_h, \phi, k_z) \hat{w}^*(k_h, \phi, k_z)] / Fr^2. \quad (11)$$

ここで、 $\Re[z]$  は  $z$  の実部を表す。鉛直スカラーフラックスは運動エネルギーとポテンシャルエネルギー間のエネルギー交換を表し、 $F_S > 0$  のときは運動エネルギーからポテンシャルエネルギーへの変換が、 $F_S < 0$  のときはその逆が起こっていることを示す。

Fig. 5 は  $t = 15$  における鉛直スカラーフラックスの水平スペクトルの Prandtl 数依存性を示している。低波数領域  $1 \leq k_h \lesssim 10$  において、Prandtl 数の値によらず、 $C_{Sw}$  が同程度の正の値をとっていることが分かる。これは外力によって低波数側に注入された運動エネルギーがポテンシャルエネルギーへと変換されていることを示しており、Prandtl 数依存性が見られないのは低波数領域においてはスカラー拡散項  $1/(RePr)\partial^2 S/\partial x_j^2$  の影響が小さいためである。一方、図中の  $5 \leq k_h \leq 100$  におけるスペクトルの拡大図に示されているように、 $k_h \gtrsim 10$  においては  $C_{Sw}$  は負の値をとり、ポテンシャルエネルギーから運動エネルギーへの変換が起こっている。またその絶対値は Prandtl 数

と共に大きくなる傾向にあり、このために運動エネルギースペクトルの高波数成分も増加するものと考えられる。

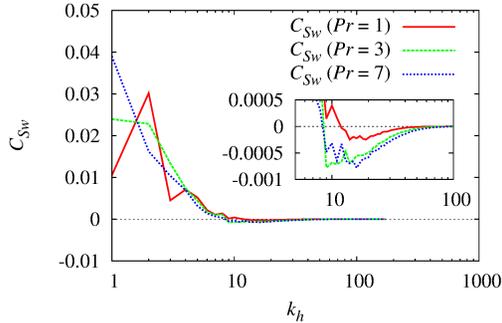


Figure 5: Prandtl number dependence of the vertical scalar flux spectrum at  $Fr = 1$ . The inset shows the close-up of  $5 \leq k_h \leq 100$ .

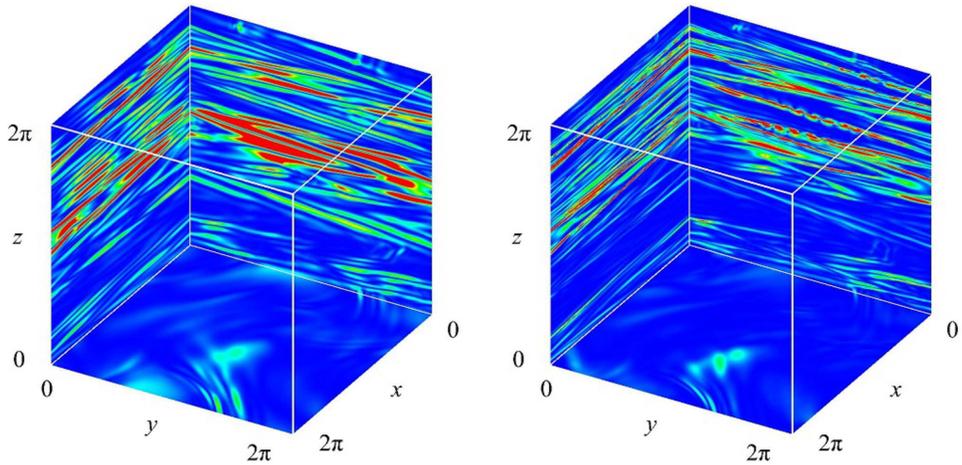
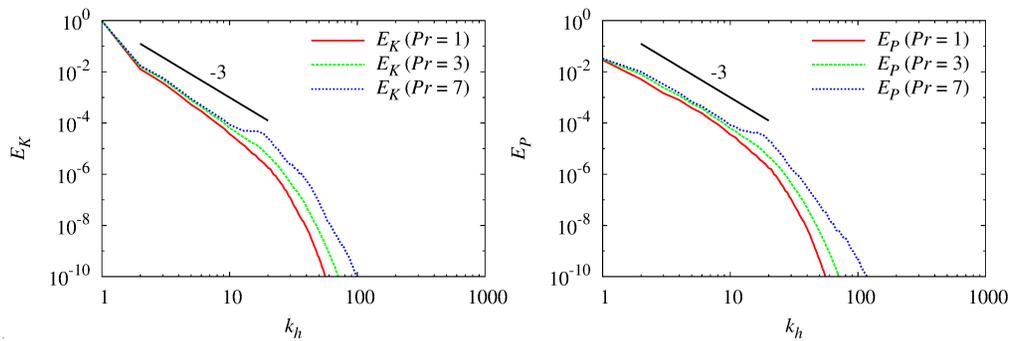
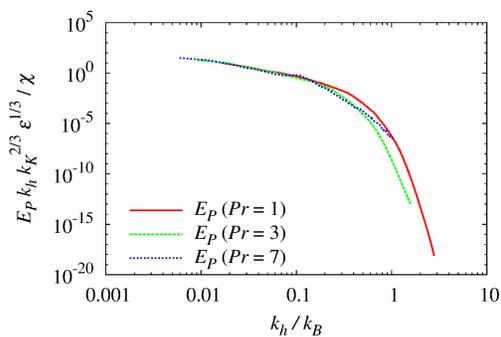
## 4.2 強成層 ( $Fr = 0.05$ ) の場合

Fig. 6 に局所スカラー散逸率  $(\partial S / \partial x_i)^2 / RePrFr^2$  の  $Fr = 0.05$  における分布を示す。  $Fr = 1$  の場合とは異なり、水平方向と鉛直方向との明らかな非等方性が確認できる。鉛直断面内では薄い層状の構造が積み重なっているのに対して、水平断面内では散逸の大きな領域が限られた領域に局在している。強い成層状態におけるこのような構造は渦度場に対しても現れることが報告されている (Waite & Bartello, 2004)。

$Fr = 1$  の場合と同様の傾向であるが、  $Pr = 7$  のほうが  $Pr = 1$  に比べ、より小さなスケールの変動を含んでいる様子が見られる。また  $Pr = 7$  のとき、  $x = 0$  面内の中央付近に水平方向に数個連なった高散逸の領域が確認できる。これは Laval *et al.* (2003), Brethower *et al.* (2007) でも見られたせん断不安定性によるものであると考えられる。

$Fr = 0.05$  における運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの水平スペクトル  $E_K, E_P$  を Fig. 7 に示す。運動エネルギースペクトル、ポテンシャルエネルギースペクトル共に低波数領域において、Prandtl 数によらず  $k_h^{-3}$  に比例する領域が見られる。実際に、大気観測により  $k_{h*}^{-3}$  スペクトルが成層の影響を受けやすい低波数領域において確認されている (Nastrom & Gage, 1985)。

Prandtl 数を増加させると  $E_K, E_P$  の高波数成分は共に増加するものの、  $E_P$  の増加量は  $Fr = 1$  の場合ほど顕著ではない。また、  $Pr > 1$  であっても、高波数領域において  $E_K \sim E_P$  である。これは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの散逸が同程度の波数で起こっていることを意味し、強成層状態においては Batchelor のスケールリングが成り立たないことを示している。実際に、 Fig. 8 に規格化されたポテンシャルエネルギースペクトルを示すが、  $Fr = 1$  の場合とは違って、  $Pr$  の異なるスペクトルが高波数域において重なる様子は見られない。

Figure 6: Same as Fig. 2, but  $Fr = 0.05$ .Figure 7: Same as Fig. 3, but  $Fr = 0.05$ .Figure 8: Compensated horizontal spectra of the potential energy at  $Fr = 0.05$ .

## 5 結言

成層乱流の Prandtl 数依存性 ( $Pr = 1, 3, 7$ ) について直接数値シミュレーションによって解析し、以下の知見を得た。成層の強さが中程度 ( $Fr = 1$ ) で  $Re_b \gg 1$  となるとき、

1. スカラーの散逸は等方的であり、高  $Pr$  の場合にはより小さなスケールで散逸が起こる。
2.  $Pr$  の値によらず、運動エネルギーの水平スペクトルは低波数領域において  $-5/3$  乗則に従う。
3.  $Pr$  が大きくなるにつれて、運動エネルギースペクトルの高波数成分はわずかに大きくなる。これは鉛直スカラーフラックスの水平スペクトルが高波数領域において常に負の値をとることで、ポテンシャルエネルギーから運動エネルギーへのエネルギー変換が一方向的に起こるためである。
4.  $Pr > 1$  のとき、ポテンシャルエネルギーの水平スペクトルは低波数領域において  $-1$  乗則に従う。
5. パッシブスカラーの場合と同様に、 $Pr$  が大きくなるにつれて、ポテンシャルエネルギースペクトルの高波数成分は大きくなる。特にこの場合、Batchelor のスケージングがアクティブスカラーについても成り立つ。

一方、成層が強く ( $Fr = 0.05$ )、 $Re_b \ll 1$  となるとき、

6. スカラーの散逸場は鉛直方向に薄い層状の二次元構造をなす。
7.  $Pr$  の値によらず、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの水平スペクトルは低波数領域にて  $-3$  乗則に従う。
8. 運動エネルギースペクトルとポテンシャルエネルギースペクトルは同程度の水平波数で散逸し、Batchelor のスケージングは成立しない。

本稿で示した結果は水平スペクトルに関するものであるが、鉛直スペクトルに関する考察も必要である。また、成層乱流においてはしばしば流れ場を渦成分と波動成分に分けて議論することが多い (Craya-Herring 分解)。これらの点については追って報告したい。

## 参考文献

- BATCHELOR, G. K. 1959 Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. *J. Fluid Mech.* **5**, pp.113-133.
- BOGUCKI, D., DOMARADZKI, J. A. & YEUNG, P. K. 1997 Direct numerical simulations of passive scalars with  $Pr > 1$  advected by turbulent flow. *J. Fluid Mech.* **343**, pp.111-130.
- BRETHOUWER, G., BILLANT, P., LINDBORG, E. & CHOMAZ, J. M. 2007 Scaling analysis and simulation of strongly stratified turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **585**, pp.343-368.
- HERRING, J. R. & MÉTAIS, O. 1989 Numerical experiments in forced stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* **202**, pp.97-115.

- KIMURA, Y. & HERRING, J. R. 2012 Energy spectra of stably stratified turbulence *J. Fluid Mech.* **698**, pp.19-50.
- LAVAL, J. P., MCWILLIAMS, J. C. & DUBRULLE, B. 2003 Forced turbulence: successive transition with Reynolds number. *Phys. Rev. E* **68**, 036308.
- LINDBORG, E. 2006 The energy cascade in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **550**, pp.207-242.
- NASTROM, G. D. & GAGE, K. S. 1985 A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *J. Atmos. Sci.* **42**, pp.950-960.
- WAITE, M. L. & BARTELLO, P. 2004 Stratified turbulence dominated by vortical motion. *J. Fluid Mech.* **517**, pp.281-308.
- YAMAZAKI, Y., ISHIHARA, T. & KANEDA, Y. 2002 Effects of wavenumber truncation on high-resolution direct numerical simulation of turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.* **71**, pp.777-781.