

# 壁乱流における流速変動の対数則について

気象研究所 毛利英明

Hideaki Mouri

Meteorological Research Institute

## 1. はじめに

円管内あるいは平板上で発達した壁乱流を考える。乱流が定常な場合には Reynolds 応力  $\rho \langle -u_z w_z \rangle$  が一定となる領域が存在する。但し  $\rho$  は質量密度,  $u_z$  と  $w_z$  は壁からの高度  $z$  における平均流方向および鉛直方向の流速変動,  $\langle \cdot \rangle$  は時間平均である。この応力一定層では平均流  $U_z$  が対数則に従う:

$$\frac{U_{z_1} - U_{z_2}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{z_1}{z_2} \right). \quad (1)$$

但し  $u_* = \langle -u_z w_z \rangle^{1/2}$  は摩擦速度。Kármán 定数  $\kappa$  の値は 0.4 前後。流速  $U_z$  自体は応力一定層の外部にも依存するから流速差  $U_{z_1} - U_{z_2}$  を議論することにする。

平均流  $U_z$  の対数則は従来から知られていたが、最近になって流速変動  $u_z$  の偶数次モーメントについても対数則が応力一定層で見出された [1-5]:

$$\frac{\langle u_{z_1}^{2m} \rangle^{1/m} - \langle u_{z_2}^{2m} \rangle^{1/m}}{u_*^2} = -\alpha_m \ln \left( \frac{z_1}{z_2} \right) \quad \text{at } m = 1, 2, 3, \dots \quad (2a)$$

但し

$$\alpha_1 \simeq 1.2-1.3 \quad \text{and} \quad \alpha_m \simeq \alpha_1 [(2m-1)!!]^{1/m}. \quad (2b)$$

比例係数  $\alpha_m$  間の関係から流速変動  $u_z$  の確率密度分布が正規分布に近いことが解る。ここでは簡単のため壁乱流を理想化して厳密な正規性を仮定する。

流速変動  $u_z$  の対数則は、壁に接している渦の集団で壁乱流を説明する attached eddy 仮説から予測されていた [6, 7]。しかし平均流  $U_z$  の対数則が統計学的な議論から導出されたことを考慮して [8], 統計学的な議論から流速変動  $u_z$  の対数則を導出することを試みる。

## 2. 平均流の対数則

平均流  $U_z$  の対数則を導出する議論について整理しておく [8]。対数則が見出される応力一定層は壁からも乱流の外部領域からも離れている。この応力一定層には特徴的な流速として摩擦速度  $u_*$  が存在するが特徴的な高度は存在しない。高度  $z_1$  と  $z_2$  における平均流の差  $U_{z_1} - U_{z_2}$  は  $u_*$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  だけで記述される。摩擦速度  $u_*$  で無次元化した平均流の差  $(U_{z_1} - U_{z_2})/u_*$  は尺度変換  $x \rightarrow \Lambda x$  に対して不変だから高度の比  $z_1/z_2$  の関数である:

$$\frac{U_{z_1} - U_{z_2}}{u_*} = f \left( \frac{z_1}{z_2} \right). \quad (3)$$

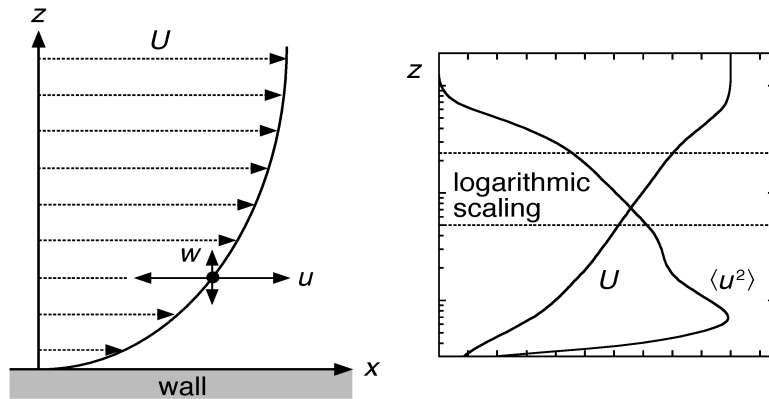


図 1: 平板上に発達した壁乱流の模式図. 左側: 平均流方向の流速  $U_z + u_z$  と鉛直方向の流速  $w_z$ . 右側: 平均流  $U_z$  と流速変動の分散  $\langle u_z^2 \rangle$  の鉛直分布.

ここで  $(U_{z_1} - U_{z_2}) + (U_{z_2} - U_{z_3}) = U_{z_1} - U_{z_3}$  だから  $f(z_1/z_2) + f(z_2/z_3) = f(z_1/z_3)$  を得る. 解は対数関数  $f(z_1/z_2) \propto \ln(z_1/z_2)$  となり式 (1) に対応する.

つまり対数則が得られるのは, 特徴的な流速  $u_*$  が存在するのに対し特徴的な高度が存在しないためである. 特徴的な流速も存在しない場合は式 (3) が成立しない. 局所的に一様等方な乱流における慣性領域と同様に冪則が得られるであろう [9].

応力一定層においては対数則が成立する高度  $z$  の領域には明確な境界が存在しない [8]. 明確な境界が存在するなら特徴的な高度として振る舞う筈だから対数則は成立しないであろう. 応力一定層は Reynolds 数が十分に高く壁と乱流の外部領域が十分に離れた場合について理想化した状況と考えるべきである.

### 3. 流速変動の対数則

流速変動  $z$  の対数則を得るため応力一定層が以下の条件を満たすと仮定する: (i)  $(u_{z_1} - u_{z_2})/u_*$  の確率密度関数は  $z_1/z_2$  だけに依存 [8]; (ii)  $(u_{z_1} - u_{z_2})/u_*, \dots, (u_{z_{N-1}} - u_{z_N})/u_*$  は互いに独立; (iii)  $(u_{z_1} - u_{z_2})/u_*$  の確率密度関数は自己相似. 但し動粘性係数  $\nu$  に対して  $z_1 - z_2 \gg \nu/u_*$  とする [8]. 壁乱流を理想化して得た条件ではあるが, 流速変動  $u_z$  が厳密な正規性を持ち応力一定層が成立するとした前章までの理想化に対応した条件になっている.

流速変動  $u_z$  が 0 となる高度  $z_0$  まで応力一定層を延長できると仮定して, 高度  $z_0$  から高度  $z$  までの領域を条件  $\lambda = z_{n-1}/z_n > 1$  に従って  $z_0 > z_1 > \dots > z_N = z$  と分割する:

$$\frac{u_z}{u_*} = \frac{u_z - u_{z_0}}{u_*} = \sum_{n=1}^N \frac{u_{z_n} - u_{z_{n-1}}}{u_*} \quad \text{with} \quad N = \frac{\ln(z_0/z)}{\ln \lambda}. \quad (4a)$$

この確率変数  $u_z$  に対してキュムラント  $\langle u_z^{\tilde{m}} \rangle_c = d^{\tilde{m}} \ln(\exp(i\xi u_z)) / d(i\xi)^{\tilde{m}} |_{\xi=0}$  を考える. 具体的には  $\langle u_z^2 \rangle_c = \langle (u_z - \langle u_z \rangle)^2 \rangle$  など. 但し流速変動  $u_z$  の定義から  $\langle u_z \rangle_c = \langle u_z \rangle = 0$  である.

条件 (i) から何らかの確率変数  $S_\lambda$  が存在して式 (4a) の右辺各項と同じ確率密度関数を持つことが解る. また条件 (ii) から右辺各項が互いに独立なことが解る. 独立な確率変数の和に対するキュムラントは個々の確率変数に対するキュムラントの和に等しいから

$$\frac{\langle u_z^{\tilde{m}} \rangle_c}{u_*^{\tilde{m}}} = \sum_{n=1}^N \frac{\langle (u_{z_n} - u_{z_{n-1}})^{\tilde{m}} \rangle_c}{u_*^{\tilde{m}}} = \frac{\ln(z_0/z)}{\ln \lambda} \langle S_\lambda^{\tilde{m}} \rangle_c. \quad (4b)$$

ここで  $\langle S_\lambda^{\tilde{m}} \rangle_c / \ln \lambda$  の値は  $\lambda$  の値に無関係だから定数  $\beta_{\tilde{m}}$  に置き換えて構わない. 高度  $z_1$  と高度  $z_2$  とで差をとれば高度  $z_0$  が消去できる:

$$\frac{\langle u_{z_1}^{\tilde{m}} \rangle_c - \langle u_{z_2}^{\tilde{m}} \rangle_c}{u_*^{\tilde{m}}} = -\beta_{\tilde{m}} \ln \left( \frac{z_1}{z_2} \right). \quad (4c)$$

特に  $\tilde{m} = 2$  においては式 (4c) から  $m = 1$  における式 (2) の対数則が得られる. しかし  $\tilde{m} \geq 3$  つまり  $m \geq 2$  においては条件 (i) と (ii) だけでは対数則が確定しない.

条件 (iii) から式 (4a) の左辺と右辺各項の確率密度関数が同一であることが解る. 確率変数の和について分布が不変なのは安定分布だけである [10]. よって  $(u_{z_n} - u_{z_{n-1}})/u_*$  は安定分布に従う. 分散が有限な安定分布は正規分布だけである. 正規分布については  $\tilde{m} \geq 3$  の場合に  $\langle u_z^{\tilde{m}} \rangle_c = 0$  つまり式 (4c) で  $\beta_{\tilde{m}} = 0$  が得られる. 結局  $m \geq 2$  における対数則 (2) が得られる.

逆に対数則の式 (2) から式 (4a) を介して条件 (i)–(iii) を導出することも可能である. 正規分布に従う任意の確率変数は同一で互いに独立な正規分布に従う任意の数の確率変数の和として記述が可能だからである [10].

つまり条件 (i)–(iii) は流速変動  $u_z$  の対数則が成立するための必要充分条件である. 条件 (i) は平均流  $U_z$  の対数則が成立する条件の一般化に相当している. これに対して条件 (ii) は異なる高度  $z$  における流速変動  $u_z$  に相関が存在しないことを保証している. 相関が存在すると相関の特性長が応力一定層の特性長になってしまう. 条件 (i) と (ii) から応力一定層には特徴的な流速  $u_*$  は存在しても特徴的な高度が存在せず何らかの対数則が成立する. 対数則を式 (2) の形に限定するのが条件 (iii) であり, 流速変動  $u_z$  が従う確率密度関数の形状についても特徴的な高度が存在しないことを保証している.

#### 4. 現象論との比較

流速変動  $u_z$  の対数則は attached eddy 仮説つまり壁乱流を壁に接する渦の重ね合わせと考える現象論で予測されていた [6, 7]. 渦の速度場は互いに自己相似で特徴的な流速  $u_*$  を共有するのに対し, 渦の全高は様々で特徴的な値を持たないと仮定されている.

流速変動  $u_z$  に寄与するのは全高  $z$  以上の渦に限られるから, 流速変動の差  $u_{z_1} - u_{z_2}$  に寄与するのは全高が  $z_1$  と  $z_2$  の間にある渦である. すると表 1 に示すように渦の特徴は第 3 章の必要充分条

表 1: 統計学的条件と attached eddies の現象論.

統計学的条件	現象論
(i) $(u_{z_1} - u_{z_2})/u_*$ の確率密度関数は $z_1/z_2$ だけに依存.	渦は特徴的流速 $u_*$ を共有するが特徴的全高は存在しない.
(ii) $(u_{z_1} - u_{z_2})/u_*, \dots, (u_{z_{N-1}} - u_{z_N})/u_*$ は独立.	渦は独立して分布.
(iii) $(u_{z_1} - u_{z_2})/u_*$ の確率密度関数は自己相似.	渦の速度場は自己相似.

件 (i)–(iii) と良く対応することが解る. 第 3 章の議論は attached eddy 仮説が流速変動  $u_z$  の対数則を導出する理由の説明にも対応しているのである.

提唱されて以来 attached eddy 仮説は細密化が繰り返されてきたが [11], このような渦が壁乱流に存在する理由は現在も不明である. これに対して条件 (i)–(iii) を壁乱流の応力一定層が充たすと期待するのは自然である. こうした統計学的な議論は現象論よりも壁乱流の理解に有望と考えられる.

## 5. 対数則の係数 $\alpha_m$ と $1/\kappa$ との関係

流速変動  $u_z$  の対数則における係数  $\alpha_1$  と平均流  $U_z$  の対数則における係数  $1/\kappa$  との関係を条件 (i)–(iii) を用いて調べる. これらの条件は  $u_z/u_*$  が時刻パラメータ  $\tau = \ln(z_0/z)$  についての Wiener 過程つまり Brown 運動であることを保証している. 但し時刻  $\tau \geq 0$  で定義された確率過程  $\chi_\tau$  が Wiener 過程であるための条件は  $\chi_\tau$  が確率連続で  $\tau = 0$  において値 0 を取り  $\chi_{\tau_1} - \chi_{\tau_2}$  の確率密度関数が時間差  $\tau_1 - \tau_2$  だけで決まる正規分布であり  $\chi_{\tau_1} - \chi_{\tau_2}, \dots, \chi_{\tau_{N-1}} - \chi_{\tau_N}$  が互いに独立なことである [10].

Wiener 過程は時間幅の極限  $\delta\tau \rightarrow 0$  に対する酔歩で記述できる. よって酔歩は流速変動  $u_z$  を記述できる. 平均流  $U_z$  も考慮して  $\chi_\tau = (U_z + u_z)/u_*$  と定義する. 独立パラメータとして Kármán 定数  $\kappa$  と定数  $\gamma > 0$  を用いれば, 時間幅  $\delta\tau$  に対する移動幅  $\delta\chi_\tau$  と確率  $p$  は

$$\delta\chi_\tau = \begin{cases} +(\gamma\delta\tau/\kappa)^{1/2} & \text{with } p = 1/2 - (\delta\tau/\gamma\kappa)^{1/2}/2, \\ -(\gamma\delta\tau/\kappa)^{1/2} & \text{with } p = 1/2 + (\delta\tau/\gamma\kappa)^{1/2}/2. \end{cases} \quad (5a)$$

極限  $\delta\tau \rightarrow 0$  において

$$\langle \delta\chi_\tau \rangle = -\frac{\delta\tau}{\kappa} \quad \text{and} \quad \langle (\delta\chi_\tau - \langle \delta\chi_\tau \rangle)^2 \rangle = \frac{\gamma\delta\tau}{\kappa}. \quad (5b)$$

式 (5b) を式 (1) および式 (2) と比較して

$$\alpha_1 = \frac{\gamma}{\kappa} \quad (5c)$$

つまり整合的な記述を得るには流速変動  $u_z$  の対数則における係数  $\alpha_1$  が平均流  $U_z$  の対数則における係数  $1/\kappa$  に比例している必要がある. ここで  $\kappa \simeq 0.4$  および  $\gamma \simeq 0.5$  を用いれば測定値  $\alpha_1 \simeq 1.2\text{--}1.3$  が得られる [1–5].

パラメータ  $\gamma$  の意味を明らかにするため壁乱流のエネルギー収支を考える. 式 (2) を用いて高度  $z$  と高度  $z + \delta z$  とでの流速変動  $u_z$  の運動エネルギー密度の差を評価すると

$$-\frac{\rho}{2} \frac{d\langle u_z^2 \rangle}{dz} \delta z = \alpha_1 \frac{\rho u_*^2 \delta z}{2z}. \quad (6a)$$

この運動エネルギーは平均流  $U_z$  に Reynolds 応力  $\rho\langle -u_z w_z \rangle = \rho u_*^2$  が作用して供給される. 式 (1) を用いれば高度  $z$  における平均流の運動エネルギー密度から全流速変動の運動エネルギー密度  $\rho\langle u_z^2 + v_z^2 + w_z^2 \rangle / 2 = \rho\langle \mathbf{u}_z^2 \rangle / 2$  への変換率が得られる. 但し  $v_z$  は平均流に垂直な水平流速. 結果は

$$\rho\langle -u_z w_z \rangle \frac{dU_z}{dz} = \frac{1}{\kappa} \frac{\rho u_*^3}{z}. \quad (6b)$$

供給された運動エネルギーは高度  $z$  から高度  $z + \delta z$  までの流速変動を時間  $\Gamma \delta z / u_*$  だけ維持すると仮定する. 但し  $\Gamma > 0$  は定数. 式 (6a) と式 (6b) を比較して

$$\alpha_1 = 2\Gamma \frac{\langle u_z^2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_z^2 \rangle} \frac{1}{\kappa}. \quad (6c)$$

つまりパラメータ  $\gamma = 2\Gamma \langle u_z^2 \rangle / \langle \mathbf{u}_z^2 \rangle$  の値を決めるのは平均流の運動エネルギーが3方向の流速変動の運動エネルギーに再分配されて最終的には熱として散逸するという壁乱流の局所的な過程である. もし応力一定層の特性が摩擦速度  $u_*$  だけで決まるのならパラメータ  $\gamma$  の値は普遍的な筈である.

## 6. まとめに代えて

壁乱流の応力一定層において流速変動  $u_z$  の対数則が成立するための必要充分条件 (i)–(iii) を得た. これらの条件は応力一定層では特徴的な流速  $u_*$  は存在するが特徴的な高度が存在しないことに由来する. 流速変動  $u_z$  の対数則の係数  $\alpha_m$  は平均流  $U_z$  の対数則の係数つまり Kármán 定数の逆数  $1/\kappa$  と壁乱流の局所的な構造を通して関連している.

流速変動  $u_z$  の対数則については, 壁近傍の内層における  $\langle u^{2m} \rangle^{1/m}$  の統計則と外層における  $\langle u^{2m} \rangle^{1/m}$  の統計則が中間領域で重複すると仮定して導出する手法も提案されている [12]. しかし統計則の重複とは統計則が壁近傍や外部領域の流速や高度には依存せず特徴的な流速  $u_*$  だけに依存することに他ならない. 統計則の重複を仮定することは対数則の存在自体を仮定することに等価である.

流速変動  $u_z$  の正規性については, 中心極限定理を流速変動  $u_z$  の Fourier 成分 [14–16] あるいは個々の attached eddies の寄与 [3] に適用することで説明されてきた. この定理によれば確率変数の和は確率変数の総数が増大するのに伴って正規分布に漸近する. 中心極限定理を式 (4a) の和に適用することは可能だが, 正規性は極限  $N \rightarrow +\infty$  つまり極限  $z/z_0 \rightarrow 0$  でしか得られない. よって式 (4c) で  $\tilde{m} \geq 3$  における係数  $\beta_{\tilde{m}}$  は正規分布についての値 0 とは異なる. 運動量が壁近傍の方向へ平均的に輸送される過程の中で流速変動  $u_z$  の確率密度分布が漸近的に定まるのなら妥当な議

論であるが、実際には運動量は局所のおよび瞬間的には壁近傍の方向へも外部の方向へも輸送されている。異なる高度  $z$  における流速変動  $u_z$  は相互に作用する筈だから条件 (iii) で仮定したような自己相似な状態に落ち着くものと考えられる。

確率変数の対数則は必要充分条件 (i)–(iii) が充たされるのなら壁乱流に関するもの以外にも期待できる。こうした確率変数について対数則が成立しているかどうか調べることは、今後の重要な課題であろう。

## 謝辞

研究会で有益な議論やコメントをいただいた皆様に感謝いたします。本研究は科研費 25340018 の助成を受けました。

## 参考文献

- [1] M. Hultmark, M. Vallikivi, S. C. C. Bailey, and A. J. Smits, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 094501 (2012).
- [2] I. Marusic, J. P. Monty, M. Hultmark, and A. J. Smits, *J. Fluid Mech.* **716**, R3 (2013).
- [3] C. Meneveau and I. Marusic, *J. Fluid Mech.* **719**, R1 (2013).
- [4] M. Hultmark, M. Vallikivi, S. C. C. Bailey, and A. J. Smits, *J. Fluid Mech.* **728**, 376 (2013).
- [5] R. J. A. M. Stevens, M. Wilczek, and C. Meneveau, *J. Fluid Mech.* **757**, 888 (2014).
- [6] A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1976).
- [7] A. E. Perry and M. S. Chong, *J. Fluid Mech.* **119**, 173 (1982).
- [8] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* (MIT Press, Cambridge, USA, 1971), vol. 1.
- [9] H. Mouri, *Phys. Rev. E* **91**, 033017 (2015).
- [10] K.-I. Satō, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2013).
- [11] I. Marusic, *Phys. Fluids* **13**, 735 (2001).
- [12] M. Hultmark, *J. Fluid Mech.* **707**, 575 (2012).
- [13] C. B. Millikan, in *Proc. 5th Int. Congr. Applied Mechanics*, edited by J. P. den Hartog and H. Peters (Wiley, New York, USA, 1938), p. 386.
- [14] G. K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1953).
- [15] H. Mouri, M. Takaoka, A. Hori, and Y. Kawashima, *Phys. Rev. E* **65**, 056304 (2002).
- [16] H. Mouri, M. Takaoka, A. Hori, and Y. Kawashima, *Phys. Rev. E* **68**, 036311 (2003).