数理解析研究所講究録
第2010巻 2016年 33-44

GROUND STATE OF THE MASSLESS SEMI-RELATIVISTIC PAULI-FIERZ MODEL

九州大学大学院数理学研究院 日高 建
Takeru Hidaka
Faculty of Mathematics Kyushu University *

概要

準相対論的な Pauli-Fierz 模型における基底状態の存在証明を [HHS16] に基づいて解説する．赤外正則条件を仮定せず，結合定数の値の大きさに制限を付けない．また，粒子の静止質量 M はゼロになる場合も含める．

1 はじめに

Pauli-Fierz 模型は粒子と量子輻射場の相互作用を記述する．一体の相対論的なシュレーディンガー作用素は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素

$$\sqrt{p^2+M^2}-M+V \tag{1.1}$$

で与えられる．ここで，$M\geq 0$ は粒子の静止質量，$p=(-i\partial_{x_1},-i\partial_{x_2},-i\partial_{x_3})$ は運動量作用素，$V:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ は外力ポテンシャルである．量子場の状態のヒルベルト空間を $\mathscr{F}$ とし，自由場のハミルトニアンを $\mathrm{H_f}$ とする．系の非結合ハミルトニアンは，$\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathscr{F}$ 上で

$$H_0=(\sqrt{p^2+M^2}-M+V)\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\mathrm{H_f} \tag{1.2}$$

である．H_0 と量子輻射場 A のミニマル結合 $p\to p-\alpha A$ を考えると，$\mathscr{H}$ 上で準相対論的 Pauli-Fierz 模型のハミルトニアン

$$H=\sqrt{(p\otimes\mathbb{1}-\alpha A)^2+M^2\otimes\mathbb{1}}-M\otimes\mathbb{1}+V\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\mathrm{H_f} \tag{1.3}$$

が得られる．ここで，$\alpha\in\mathbb{R}$ を結合定数という．H の自己共役性は [HH15] で示した．スペクトルの下限 $E=\inf\sigma(H)$ が固有値であるとき，対応する固有ベクトルを基底状態という．また，E は基底エネルギーという．非相対論的な Pauli-Fierz 模型のハミルトニアン

$$(p\otimes\mathbb{1}-\alpha A)^2+V\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\mathrm{H_f} \tag{1.4}$$

* email: t-hidaka@math.kyushu-u.ac.jp

が基底状態をもつことは，[BFS99, Ger00, GLL01] 等で証明されている．さらに，準相対論的な Pauli-Fierz 模型における基底状態の存在は，[KMS11, KM13] で証明されているが，$M>0$ のときである．$M=0$ の場合も含めた基底状態の存在証明を紹介するのが目的である．ボソンの質量 m が正の場合は，[HH16] で証明されているから，ボソンの質量がゼロである *massless* な準相対論的 Pauli-Fierz 模型を考察していく．

1.1 ボソンフォック空間

ボース場の状態のヒルベルト空間は，$\mathscr{F} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n(W) = \oplus_{n=0}^{\infty}[\otimes_s^n W]$ である．ここで，$\otimes_s^n$ は n 重対称テンソル積であり，$\otimes_s^0 W = \oplus^{d-1}\mathbb{C}$ とする．$\mathscr{F}$ は $W = \oplus^2 L^2(\mathbb{R}^3)$, $d \geq 3$ 上のボソンフォック空間である．$\mathscr{F}$ のベクトルは $(\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \cdots)$, $\Psi^{(n)} \in \otimes_s^n W$ と表せる．$f \in W$ によって均された生成作用素 $a^\dagger(f)$ と消滅作用素 $a(f)$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&D\left(a^\dagger(f)\right) = \left\{\Psi \in \mathcal{F} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} n \left\|S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)})\right\|^2 < \infty\right\}, \\
&\left(a^\dagger(f)\Psi\right)^{(n)} = \sqrt{n} S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}), n \geq 1, \quad \left(a^\dagger(f)\Psi\right)^{(0)} = 0, \\
&a(f) = (a^\dagger(f))^*.
\end{aligned}
$$

$a(f)$ と $a^\dagger(f)$ は次の正準交換関係を満たす．

$$
[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)_W, \qquad [a(f), a(g)] = 0 = [a^\dagger(f), a^\dagger(g)].
$$

$f = (f_1, 0)$ のとき，$a^\#(f) = a_1^\#(f_1)$, $f = (0, f_2)$ のとき，$a^\#(f) = a_2^\#(f_2)$ と書く．$a^\#(f)$ は $a(f)$ または $a^\dagger(f)$ を表す．形式的に，

$$
a^\#(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(k) a^\#(k) \mathrm{d}k
$$

と書く．W 上の下に有界な自己共役作用素 T の第二量子化作用素 $\mathrm{d}\Gamma(T)$ を

$$
\mathrm{d}\Gamma(T) = \oplus_{n=0}^{\infty}\left[\otimes^n T^{(n)}\right]
$$

によって定義する．ここで，$T^{(n)}$ は

$$
T^{(0)} = 0, \quad T^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1} \otimes \cdots \mathbb{1} \otimes \overset{k-\mathrm{th}}{T} \otimes 1 \cdots \otimes \mathbb{1}
$$

である．$d\Gamma(T)$ も非負自己共役作用素になる．$\Omega = (1, 0, 0, \cdots)$ をボソンフォック真空という．$C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ で張られる有限粒子空間

$$
\mathscr{F}_{\mathrm{fin}} = L.H.\{\Omega, a^\dagger(h_1)\cdots a^\dagger(h_n)\Omega | h_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3), j = 1, \cdots, n, n \geq 1\} \tag{1.5}
$$

は $\mathscr{F}$ の稠密な部分空間である．

1.2 準相対論的な Pauli-Fierz 模型の定義

運動量 $k \in \mathbb{R}^3$ におけるボソン 1 個のエネルギーを表す関数を

$$\omega_m(k) = \sqrt{k^2+m^2} \tag{1.6}$$

とする．m はボソンの質量を表す．自由場のハミルトニアンは，$\oplus^2 L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の掛け算作用素 ω_m の第二量子化

$$\mathrm{H_{f,m}} = \mathrm{d}\Gamma(\omega_m) \tag{1.7}$$

により与えられる．$m=0$ のとき，$\omega(k)=|k|$, $\mathrm{H_f} = \mathrm{d}\Gamma(\omega)$ と書くことにする．$\mathrm{H_{f,m}}$ は非負，自己共役作用素である．スペクトルは $\sigma(\mathrm{H_{f,m}}) = \{0\} \cup [m,\infty)$ であり，点スペクトルは $\sigma_\mathrm{P}(\mathrm{H_{f,m}}) = \{0\}$ である．さらに，$\mathrm{H_{f,m}}$ の基底状態はボソンフォック真空 Ω である．$m=0$ のとき，$\mathrm{H_f}$ の基底状態は埋蔵固有値である．$e^{(1)}, e^{(2)}$ を偏極ベクトルとして，

$$e^{(1)}(k) = \frac{(k_2,-k_1,0)}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, \quad e^{(2)}(k) = \frac{k}{|k|} \times e^{(1)}(k). \tag{1.8}$$

とする．このとき，$k \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して，$e^{(j)}(k)\cdot e^{(j')}(k) = \delta_{jj'}$, $k \cdot e^{(j)}(k) = 0$ $(j,j'=1,2)$ が成り立つ．次に量子輻射場を定義する．各 $x \in \mathbb{R}^3$ に対して，$A(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))$,

$$A_\mu(x) = \sum_{j=1,2}\int e^{(j)}(k)\left(a_j^\dagger(k)\frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega(k)}}e^{-ik\cdot x} + a_j(k)\frac{\hat{\varphi}(-k)}{\sqrt{\omega(k)}}e^{ik\cdot x}\right)\mathrm{d}k, \tag{1.9}$$

と置く．ここで，$\hat{\varphi}$ は紫外切断関数である．$\hat{\varphi}$ に関して，以下の仮定をする．
(A.1)$\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}, \omega\sqrt{\omega}\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ and $\hat{\varphi}(k) = \overline{\hat{\varphi}(-k)}$.
$\mathscr{H}$ と $\int_{\mathbb{R}^3}^\oplus \mathscr{F}\mathrm{d}x$ を同一視する．このとき，$\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素 A_μ が

$$A_\mu = \int_{\mathbb{R}^3}^\oplus A_\mu(x)\mathrm{d}x$$

と定義される．$A = (A_1,\cdots,A_d)$ が量子輻射場の定義である．

ポテンシャルに関するクラス V_rel と V_conf を用意する．

定義 1.1 (V_rel) $V \in V_\mathrm{rel} \Leftrightarrow V$ は $\sqrt{p^2+M^2}$ に対して相対有界で，相対限界が 1 未満である．即ち，$D(\sqrt{p^2+M^2}) \subset D(V)$ であり，$0 \le a < 1$ と $b \ge 0$ が存在して，

$$\|Vf\| \le a\|\sqrt{p^2+M^2}f\| + b\|f\|$$

が任意の $f \in D(\sqrt{p^2+M^2})$ に対して成り立つ．
(V_conf) $V = V_+ - V_- \in V_\mathrm{conf} \Leftrightarrow V_- = 0$ かつ $V_+ \in L^2_\mathrm{loc}(\mathbb{R}^3)$ で $\partial_\mu V_+, \partial_\mu^2 V_+ \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mu = 1,2,3$, さらに，$D(V) \subset D(|x|)$.

定義 1.2 $\hat{\varphi}$ が (A.1) を満たし，$V \in V_{\rm rel} \cup V_{\rm conf}$ とする．このとき，準相対論的 Paui-Fierz ハミルトニアンを

$$H_m = \sqrt{(p \otimes 1\!\!1 - A)^2 + M^2 \otimes 1\!\!1} + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_{f,m}}, \tag{1.10}$$

$$D(H_m) = D(|p| \otimes 1\!\!1) \cap D(V \otimes 1\!\!1) \cap D(1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f}). \tag{1.11}$$

と定義する．
基底状態の存在を議論する際に本質的でないから，(1.3) の運動エネルギーの項，$\sqrt{(p \otimes 1\!\!1 - \alpha A)^2 + M^2 \otimes 1\!\!1} - M \otimes 1\!\!1$，に出てくる $-M \otimes 1\!\!1$ を上の定義に含めなかった．また，結合定数 α は，その値に制限を付けないから切断関数 $\hat{\varphi}$ に含めて考える．H_m は非結合ハミルトニアン (1.2) に摂動を加えた作用素と見ることができる．従って，$|\alpha|$ の値が十分小さいと仮定した方が模型の解析はし易い．従って，定義 1.2 に α は現れない．以下，$T \otimes 1\!\!1$ や $1\!\!1 \otimes S$ といった作用素を単に，T, S と書くことにする．

1.3 ハミルトニアンの自己共役性

$\mathscr{H}$ の稠密な部分空間 $\mathscr{H}_{\rm fin}$ を次のように定義する．

$$\mathscr{H}_{\rm fin} = C_{\rm c}^{\infty}(\mathbb{R}^3) \hat{\otimes} \mathscr{F}_{\rm fin},.$$

ここで，$\hat{\otimes}$ は代数的テンソル積を表す．
定理 1.3 (**[HH15]**)　(A.1) を仮定し，$V \in V_{\rm rel} \cup V_{\rm conf}$ とする．このとき，H は自己共役，$\mathscr{H}_{\rm fin}$ 上で本質的自己共役である．
粒子とボース場が相互作用する系において，$m = 0$ のときにおける基底状態の存在は，$H_m(m > 0)$ の基底状態が存在することを使って証明するのが定石となっている．H_m の基底状態に関して次の仮定を置く．

(A.2)
(1) 任意の $m > 0$ に対して H_m は規格化された基底状態 Φ_m をもつ．
(2) ある $m_0 > 0$ が存在して，

$$\sup_{0<m<m_0} \|(1+|x|^2)\Phi_m(x)\|_{\mathscr{F}} < \infty. \tag{1.12}$$

$m > 0$, $V \in V_{\rm conf}$ のとき，H_m は基底状態を持ち，m に関して一様に指数減衰するから，(A.2) を満たす．
定理 1.4 (**[HH16],[Hir14]**)　(A.1) が成り立つとする．$V \in V_{\rm conf}$，$\lim_{|x| \to \infty} V(x) = \infty, m > 0$ ならば，次の (1), (2) が成り立つ．
(1)

$$\sigma_{\rm ess}(H_m) = [E + m, \infty). \tag{1.13}$$

(2)　m に依存しない定数 c, C が存在して，

$$\|\Phi_m(x)\|_{\mathscr{F}} < Ce^{-c|x|}. \tag{1.14}$$

(1.13) より，おそらく，$m = 0$ における H の基底状態は埋蔵固有値であるだろうから，基底状態の存在を証明するのは"massive"なハミルトニアンの場合より難しい．

1.4 主定理

$m=0$ における基底状態の存在をいうために紫外切断を導入する．
(A.3) $\hat{\varphi}\in C_0^1(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{supp}\,\hat{\varphi}\subset\{k\in\mathbb{R}^3||k|<\Lambda\}$
定理 1.5 (A.1), (A.2), (A.3) が成り立つとする．このとき，H の基底状態が存在する．

1.5 定理 1.5 の証明の概略

Φ_m, E_m をそれぞれ H_m の規格化された基底状態，基底エネルギーとする．このとき，

$$H_m\Phi_m=E_m\Phi_m \tag{1.15}$$

が成り立つ．$\|\Phi_m\|=1$ だから，Banach–Alaogl の定理より，$\{\Phi_{m(l)}\}$ が弱収束するような 0 に収束する数列 $\{m(l)\}$ をとることができる．$\Phi=\text{w–lim}\Phi_{m(l)}$ とおく．このとき，

$$H\Phi=E\Phi \tag{1.16}$$

が成り立つ．ここで，E は H の基底エネルギーである．従って，Φ が H の基底状態であることを示すために，$\Phi\neq 0$ を証明する必要がある．そこで，$\Phi=\text{s–lim}\Phi_{m(l)}$ となることを示す．基底状態の個数評価 $\sup_{0<m<m_0}(\Phi_m,N\Phi_m)<\infty$ (定理 2.3) から，$L^2(R^{3+3n};\mathbb{C}^2)$ 上で各 n に対し，$\{\Phi^{(n)}_{m(l)}\}$ が強収束することを示せばよい．Ω を有界領域，$p\in(1,2)$ とする．$\{\|\Phi^{(n)}_{m(l)}\|_{W^{1,p}(\Omega)}\}_{l=1}^{\infty}$ が有界ならば，$\{\Phi^{(n)}_{m(l)}\}$ は Φ に弱収束する部分列がとれる: $\text{w-}\lim_{l\to\infty}\Phi^{(n)}_{m'(l)}=\tilde{\Phi}^{(n)}$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Rellich-Kondrachov の定理より，$\Phi^{(n)}_{m'(l)}$ は $\Phi^{(n)}$ へ $L^q(B_R)$ で強収束する．但し，$1\leq q<\frac{3p(1+n)}{3(1+n)-p}$. 特に，任意の n に対して $\text{s-}\lim_{l\to\infty}\Phi^{(n)}_{m'(l)}=\Phi^{(n)}$ in $L^2(\Omega)$ となる．$\hat{\varphi}$ に紫外切断があり，(A.3) の (2) の条件から，$L^2(\mathbb{R}^3)$ で $\text{s-}\lim_{l\to\infty}\tilde{\Phi}^{(n)}_{m'(l)}=\Phi^{(n)}$ となることが示せる．従って，$\Phi=\lim_{l\to\infty}\Phi_{m'(l)}\neq 0$.

よって，$\sup_{0<m<m_0}(\Phi_m,N\Phi_m)<\infty$ と $\Phi^{(n)}_{m(l)}\in W^{1,p}(\Omega)$, $\{\|\Phi^{(n)}_{m(l)}\|_{W^{1,p}(\Omega)}\}_{l=1}^{\infty}$ が有界であることを示せば，定理 1.5 の証明ができることが分かる．

2 赤外領域における基底状態の評価

$\mathscr{H}$ 上のユニタリー作用素 $U=\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}U(x)\mathrm{d}x$ を $U(x)=\exp\{ix\cdot A(0)\}$ と定義する．また，$b_j(k,x)=a_j(k)-i\frac{\hat{\varphi}(k)e^{(j)}(k)\cdot x}{\sqrt{\omega(k)}}$,

$$\tilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{f},m}=\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}\left[\sum_{j=1,2}\int_{\mathbb{R}^3}\omega_m(k)b_j^{\dagger}(k,x)b_j(k,x)\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}x, \tag{2.1}$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{f},m}=\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}[\mathrm{H}_{\mathrm{f,m}}+\Phi(x)]\mathrm{d}x,$$

とする．i.e.,

$$\Phi(x) = \sum_{j=1,2} \left\{ \overline{-i\left(a_j^\dagger\left(\frac{\hat{\varphi}e_j \cdot x}{\sqrt{\omega}}\right) + a_j\left(\frac{\hat{\varphi}e_j \cdot x}{\sqrt{\omega}}\right)\right)} + \|\sqrt{\omega_m} g e_j \cdot x\|^2 \right\}.$$

このとき，H_m は次のようにユニタリー変換される．

$$\tilde{H}_m = U^{-1} H_m U = \sqrt{(p - A + A(0))^2 + M^2} + \tilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{f},m} + V. \tag{2.2}$$

準相対論的 Paui-Fierz ハミルトニアンを $\tilde{H}_m$ へユニタリー変換することにより，赤外正則条件 $\int |\hat{\varphi}(k)|^2/\omega(k)^3 \mathrm{d}k < \infty$ を仮定しなくても基底状態の存在が証明できる．基底状態の評価をするために次の Pull-through formula を用いる：

$$a_j(k)\tilde{\Phi}_m = (H_m - E_m + \omega_m(k))^{-1}[\tilde{H}_m, a_j(k)]\tilde{\Phi}_m, \quad j = 1, 2. \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
B &= (p - A + A(0))^2 + M^2, \\
C_j(k) &= [\sqrt{B}, a_j(k)] + \rho_j(k), \\
\rho_j(k) &= -i\omega_m(k) g(k) e^{(j)}(k) \cdot x, \quad g(k) = \frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega(k)}}.
\end{aligned}$$

と置く．

補題 2.1　ほとんど全ての k に対して，$\overline{C_j(k)(1+|x|^2)^{-1}}$ は有界であり，

$$\|\overline{C_j(k)(1+|x|^2)^{-1}}\| \leq C(m + |k| + |k|^2)|g(k)| \tag{2.4}$$

が成り立つ．C は m, k, Λ に依存しない定数である．

証明の概要

$$T_j(k) = e^{(j)}(k) \cdot (p - A(x) + A(0)), \tag{2.5}$$

$$I_j(k,t) = t^2(t^2 + B)^{-1} T_j(k)(e^{-ik\cdot x} - 1)(t^2 + B)^{-1}(1 + |x|^2)^{-1}. \tag{2.6}$$

と置く．$k \cdot e^{(j)}(k) = 0$ より，

$$e^{ik\cdot x} T_j(k) e^{-ik\cdot x} = T_j(k). \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
[\sqrt{B}, a_j(k)] &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}t [B(t^2 + B)^{-1}, a_j(f)] \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^2(t^2 + B)^{-1}[a_j(k), B](t^2 + B)^{-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$[a_j(k), B]$ は,

$$[a_j(k), B] = 2g(k)(e^{-ik\cdot x} - 1)e^{(j)}(k) \cdot (p - A(x) + A(0)) \tag{2.9}$$

と計算できるから，*a.e.* $k \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$[\sqrt{B}, a_j(k)] = \int_0^\infty \mathrm{d}t \, \frac{4}{\pi} I_j(k,t) g(k)(1 + |x|^2) = \frac{4}{\pi} I_j(k) g(k)(1 + |x|^2) \tag{2.10}$$

となる．ここで，$I_j(k)=\int_0^\infty I_j(k,t)\mathrm{d}t$. $I_j(k)$ の積分範囲を $[0,1]$ と $[1,\infty)$ に分けることにより，$\Psi,\Phi\in\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ に対して，

$$I_{1,j}(k,\Psi,\Phi)=\int_0^1|(\Psi,I_j(k,t)\Phi)|\mathrm{d}t,\quad I_{2,j}(k,\Psi,\Phi)=\int_1^\infty|(\Psi,I_j(k,t)\Phi)|\mathrm{d}t, \tag{2.11}$$

を評価すればよい．Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned}
&I_{1,j}(k,\Psi,\Phi)\le\int_0^1 t^2\mathrm{d}t\|T(k)(t^2+B)^{-1}\Psi\|\,\|(e^{-ik\cdot x}-1)(t^2+B)^{-1}(1+|x|^2)^{-1}\Phi\|\\
&\le C|k|\int_0^1 t^2\mathrm{d}t\|B^{1/2}(t^2+B)^{-1}\Psi\|\,\||x|(t^2+B)^{-1}(1+|x|^2)^{-1}\Phi\|^2\\
&\le C|k|\left(\int_0^1 t^2\mathrm{d}t\|B^{1/2}(t^2+B)^{-1}\Psi\|^2\right)^{1/2}\left(\int_0^1 t^3\mathrm{d}t\||x|(t^2+B)^{-1}(1+|x|^2)^{-1}\Phi\|^2\right)^{1/2}\\
&\le C|k|\|\Psi\|\left(\int_0^1 t^3\mathrm{d}t\||x|(t^2+B)^{-1}(1+|x|^2)^{-1}\Phi\|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

反磁性不等式より，

$$\||x|(t^2+B)^{-1}(1+|x|^2)^{-1}\Phi\|\le\||x|(t^2+|p|^2)^{-1}(1+|x|^2)^{-1}|\Phi|\|. \tag{2.13}$$

従って，

$$I_{1,j}(k,\Psi,\Phi)\le C|k|\|\Psi\|\sqrt{(|\Phi|,Z|\Phi|)}, \tag{2.14}$$

$$Z=(1+|x|^2)^{-1}\int_0^1\mathrm{d}tt^3(t^2+|p|^2)^{-1}|x|^2(t^2+|p|^2)^{-1}(1+|x|^2)^{-1}. \tag{2.15}$$

ここで，次の補題が成り立つ．

補題 2.2　Z は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の有界作用素である．

従って，

$$\|I_{1,j}(k,\Psi,\Phi)\|\le C|k|\|\Psi\|\|\Phi\|. \tag{2.16}$$

が得られる．次に $I_2(k,\Psi,\Phi)$ の評価を考える．$\tilde{B}=e^{-ik\cdot x}Be^{ik\cdot x}$ と置く．

$$(e^{-ik\cdot x}-1)(t^2+B)^{-1}=(t^2+\tilde{B})^{-1}(e^{-ik\cdot x}-1)+(t^2+B)^{-1}(B-\tilde{B})(t^2+\tilde{B})^{-1}, \tag{2.17}$$

$$B-\tilde{B}=(p-A+A(0))^2-(p+k-A-A(0))^2=-2Y(k)-|k|^2, \tag{2.18}$$

ここで，$Y(k)=k\cdot(p-A+A(0))$. (2.17) と (2.18) $I_{2,j}(k,\Psi,\Phi)$ は

$$I_{2,j}(k,\Psi,\Phi)\le I_2^{(1)}(k)+I_2^{(2)}(k)+I_2^{(3)}(k), \tag{2.19}$$

となる．ここで，

$$I_2^{(1)}(k)=\int_1^\infty \mathrm{d}tt^2|(\Psi,(t^2+B)^{-1}T(k)(t^2+\tilde{B})^{-1}(e^{-ik\cdot x}-1)(1+|x|^2)^{-1}\Phi)|, \tag{2.20}$$

$$I_2^{(2)}(k)=-2\int_1^\infty \mathrm{d}tt^2 \\ |(\Psi,(t^2+B)^{-1}T(k)(t^2+B)^{-1}Y(k)(t^2+\tilde{B})^{-1}(1+|x|^2)^{-1}\Phi)|, \tag{2.21}$$

$$I_3^{(3)}(k)=-|k|^2\int_1^\infty \mathrm{d}tt^2 \\ |(\Psi,(t^2+B)^{-1}T(k)(t^2+B)^{-1}(t^2+\tilde{B})^{-1}(1+|x|^2)^{-1}\Phi)|. \tag{2.22}$$

この証明の概要では，$I_2^{(1)}(k)$ の評価だけを記す．

$$\||T(k)|^{1/2}\Psi\| \le \|B^{\frac14}\Psi\| \\ \le \||(p+k-A+A(0))^2+M^2|^{\frac14}\Psi\|+\sqrt{|k|}\|\Psi\|. \tag{2.23}$$

であることに注意する．Schwarz の不等式より，

$$\begin{aligned} I_2^{(1)}(k) &\le \left(\int_1^\infty \mathrm{d}tt^2\||T(k)|^{\frac12}(t^2+B)^{-1}\Psi\|^2\right)^{\frac12} \\ &\quad\times\left(\int_1^\infty \mathrm{d}tt^2\||T(k)|^{1/2}(t^2+\tilde{B})^{-1}(e^{-ik\cdot x}-1)(1+|x|^2)^{-1}\Phi\|^2\right)^{\frac12} \\ &\le \left(\int_1^\infty \mathrm{d}tt^2\|B^{\frac14}(t^2+B)^{-1}\Psi\|^2\right)^{\frac12} \\ &\quad\times\left\{\left(\int_1^\infty \mathrm{d}tt^2\|\tilde{B}^{\frac14}(t^2+\tilde{B})^{-1}(e^{-ik\cdot x}-1)(1+|x|^2)^{-1}\Phi\|^2\right)^{\frac12}\right. \\ &\quad\left.+\sqrt{|k|}\left(\int_1^\infty \mathrm{d}tt^2\|(t^2+\tilde{B})^{-1}(e^{-ik\cdot x}-1)(1+|x|^2)^{-1}\Phi\|^2\right)^{\frac12}\right\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

$a>0$ に対して，$\int_0^\infty \frac{t^2}{(t^2+a)^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4\sqrt{a}}$ であることとスペクトル分解定理を用いて計算すると，

$$I_2^{(1)}(k)\le C(1+\sqrt{|k|})\|\Psi\|\|(e^{-ik\cdot x}-1)(1+|x|^2)^{-1}\Phi\|. \tag{2.25}$$

よって，

$$I_2^{(1)}(k)\le C|k|(1+\sqrt{|k|})\|\Psi\|\|\Phi\|. \tag{2.26}$$

$I_2^{(2)}(k)$, $I_2^{(3)}(k)$ も評価することにより，

$$I_{2,j}(k,\Psi,\Phi)\le C(|k|+|k|^2)\|\Psi\|\|\Phi\| \tag{2.27}$$

が得られる. (2.10), (2.16) ,(2.27) より,

$$\|I_j(k)\| \le C(|k| + |k|^2), \tag{2.28}$$

$$\|[\sqrt{B}, a_j(k)](1 + |x|^2)^{-1}\| \le C(|k| + |k|^2)|g(k)| \tag{2.29}$$

であり, 補題 2.1 が成り立つことが分かる. ■

Pull-through formula と補題 2.1 より, 基底状態 $\tilde{\Phi}_m$ の個数評価が得られる.

定理 2.3 ほとんど全ての k に対し,

$$\|a_j(k)\tilde{\Phi}_m\| \le C(1 + |k|)\hat{\varphi}(k)/\sqrt{\omega(k)}. \tag{2.30}$$

特に,

$$\sup_{0<m<m_0} \|N^{1/2}\tilde{\Phi}_m\| < \infty. \tag{2.31}$$

$\tilde{\Phi}_m = \{\tilde{\Phi}_m^{(n)}(x, k_1, \cdots, k_n)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{H}$ と書く. $\tilde{\Phi}_m^{(n)}(x, k_1, ..., k_n)$ は各 $x, k_j \in \mathbb{R}^3$ に関して弱微分可能であること, さらに, $\tilde{\Phi}_m^{(n)}(x, k_1, ..., k_n)$ の弱導関数の $L^p(\Omega)$ $(1 \le p < 2)$ ノルムが $m \in (0, m_0)$ に関して有界であることを述べる. ここで, Ω は有界領域である. h と k を $0 < 2|h_\mu| < |k_\mu|$ となるようにとる. $R(k) = (H_m - E_m + \omega_m(k))^{-1}$ とおく. 以下, C は, m,, k, h に依存しない定数とする. Pull-through formula より,

$$\frac{a_j(k+h) - a_j(k)}{|h|}\tilde{\Phi}_m = R(k+h)\frac{C_j(k+h) - C_j(k)}{|h|}\tilde{\Phi}_m + \frac{R(k+h) - R(k)}{|h|}C_j(k)\tilde{\Phi}_m. \tag{2.32}$$

(2.32) の右辺を評価していく. 補題 2.1 の結果を使って計算すると, (2.32) の第二項の評価が得られる.

補題 2.4 $j = 1, 2$ に対し,

$$\left\| \frac{R(k+h) - R(k)}{|h|}C_j(k)\tilde{\Phi}_m \right\| \le \frac{C|g(k)|}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}. \tag{2.33}$$

(2.32) の第一項の評価は, 次のようになる.

補題 2.5

$$\left\| R(k+h)\frac{C_j(k+h) - C_j(k)}{|h|}\tilde{\Phi}_m \right\| \le \frac{C\chi_\Lambda(k)}{\sqrt{\omega(k)}\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \tag{2.34}$$

ここで, χ_Λ は $\{k \in \mathbb{R}^3 | |k| \le 2\Lambda\}$ の定義関数である.

証明の概要

$$R(k+h)\frac{C_j(k+h) - C_j(k)}{|h|}\tilde{\Phi}_m = R(k+h)\left[\sqrt{B}, \frac{a_j(k+h) - a_j(k)}{|h|}\right]\tilde{\Phi}_m + R(k+h)\frac{\rho_j(k+h) - \rho_j(k)}{|h|}\tilde{\Phi}_m \tag{2.35}$$

と書ける．(2.35) の右辺の第二項は，

$$\left\| R(k+h)\frac{\rho_j(k+h)-\rho_j(k)}{h}\tilde{\Phi}_m \right\| \le \frac{C\chi_\Lambda(k)}{\sqrt{\omega(k)}\sqrt{k_1^2+k_2^2}} \tag{2.36}$$

となる．(2.35) の右辺第一項が次のように評価できることの概略を述べる．

$$\left\| R(k+h)\left[\sqrt{B}, \frac{a_j(k+h)-a_j(k)}{|h|}\right]\tilde{\Phi}_m \right\| \le C\frac{\chi_\Lambda(k)}{\sqrt{\omega(k)}\sqrt{k_1^2+k_2^2}}. \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} & R(k+h)\left[\sqrt{B}, \frac{a_j(k+h)-a_j(k)}{|h|}\right]\tilde{\Phi}_m \\ &= \frac{4}{\pi}R(k+h)\frac{I_j(k+h)-I_j(k)}{|h|}g(k+h)(1+|x|^2)\tilde{\Phi}_m \\ &\quad + \frac{4}{\pi}R(k+h)I_j(k)\frac{g(k+h)-g(k)}{|h|}(1+|x|^2)\tilde{\Phi}_m. \end{aligned} \tag{2.38}$$

(2.28) より， (2.38) の 右辺第二項は次のように評価できる．

$$\|R(k+h)\|\left(\frac{4}{\pi}\left\|I_j(k)\frac{g(k+h)-g(k)}{|h|}(1+|x|^2)\tilde{\Phi}_m\right\|\right) \le C\frac{\chi_\Lambda(k)}{\sqrt{\omega(k)}\sqrt{k_1^2+k_2^2}}. \tag{2.39}$$

(2.38) の右辺第一項を評価するために $I_j(k)$ を次のように分ける．

$$\begin{aligned} I_j(k) &= I_{1,j}(k) + I_{2,j}(k), \\ I_{1,j}(k) &= \int_0^1 \mathrm{d}t t^2(t^2+B)^{-1}T_j(k)(e^{-ik\cdot x}-1)(t^2+B)^{-1}(1+|x|^2)^{-1}, \\ I_{2,j}(k) &= \int_1^\infty \mathrm{d}t t^2(t^2+B)^{-1}T_j(k)(e^{-ik\cdot x}-1)(t^2+B)^{-1}(1+|x|^2)^{-1}. \end{aligned}$$

(2.16) の評価の証明の方法を応用することにより，次の (2.40) が得られ，(2.27) の証明を応用することにより (2.41) が得られる．

$$\left\|\frac{I_{1,j}(k+h)-I_{1,j}(k)}{|h|}\right\| \le \frac{C|k|}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, \tag{2.40}$$

$$\left\|\frac{I_{2,j}(k+h)-I_{2,j}(k)}{|h|}\right\| \le C(1+|k|), \quad j=1,2. \tag{2.41}$$

(2.40) と (2.41) より，

$$\left\|\frac{4}{\pi}R(k+h)\frac{I_j(k+h)-I_j(k)}{|h|}g(k+h)(1+|x|^2)\tilde{\Phi}_m\right\| \le C\frac{\chi_\Lambda(k)}{\sqrt{\omega(k)}\sqrt{k_1^2+k_2^2}}. \tag{2.42}$$

(2.39) と (2.42) から (2.37) が得られる．(2.35)–(2.37) から補題 2.5 が従う． ■

(2.32)，補題 2.4 と 2.5 から，次の補題を得る．

補題 2.6

$$\left\|\frac{a_j(k+h)-a_j(k)}{|h|}\tilde{\Phi}_m\right\| \le \frac{C\chi_\Lambda(k)}{\sqrt{\omega(k)}\sqrt{k_1^2+k_2^2}}. \tag{2.43}$$

$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ とする．補題 2.6 と Banach–Alaogl の定理より，$\lim_{l\to\infty} h_l = 0$, $v_\mu := \text{w–lim}\frac{a(k+|h_l|e_\mu)-a(k)}{|h_l|}\tilde{\Phi}_m$ が存在するような点列 $\{h_l\}$ がとれる．次の定理が成り立つ．証明は省略する．

定理 2.7 任意の $n \geq 1$ に対して，$\tilde{\Phi}_m^{(n)} = \tilde{\Phi}_m^{(n)}(x, k_1, \cdots, k_n) \in L^2(\mathbb{R}^{3+3n}; \mathbb{C}^2)$ は弱微分可能であり，

$$D_{k_{i,\mu}}\tilde{\Phi}_m^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} v_\mu^{(n-1)}(k_i)(x, k_1, \cdots, \widehat{k_i}, \cdots, k_n). \tag{2.44}$$

ここで，$D_{k_{i,\mu}}$ は $k_{i,\mu}$, $(i = 1, \cdots n,\ \mu = 1,2,3)$ に関する弱微分を表し，$\widehat{k_i}$ は k_i の除外を表す．さらに，$1 \leq p < 2$ であり，Ω が $\mathbb{R}^{3+3n}$ の有界領域ならば，

$$\sup_{0<m<m_0} \|D_{k_{i,\mu}}\tilde{\Phi}_m^{(n)}\|_{L^p(\Omega)} < \infty. \tag{2.45}$$

x に関する $\tilde{\Phi}_m^{(n)}(x, k_1, ..., k_n)$ の弱微分の評価は次の補題から得られる．

補題 2.8 $0 < m_0$ とする．このとき，$\sup_{0<m<m_0} \||p|\tilde{\Phi}_m\| < \infty$.

定理 2.7 と補題 2.8 より，つぎの系を得る．

系 2.9 $1 \leq p < 2$ とし，Ω を有界領域とする．このとき，$\tilde{\Phi}_m \in W^{1,p}(\Omega)$ であり，$\sup_{0<m<m_0} \|\tilde{\Phi}_m\|_W^{1,p}(\Omega) < \infty$.

3 問題

$V(x)$ がクーロンポテンシャル $-C/|x|$ で $M = 0$ の場合や調和振動子 $|x|^2$ の場合の準相対論的 Pauli-Fierz 模型の基底状態の存在は，私の知る限り，未だ証明されていないと思われる．

参考文献

[BFS99] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation fields, *Commun. Math. Phys.* **207** (1999), 249–290.

[Ger00] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians. *Ann. H. Poincaré* **1** (2000), 443–459.

[GLL01] M. Griesemer, E. H. Lieb and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145** (2001), 557–595.

[HH15] T. Hidaka and F. Hiroshima, Self-adjointness of the semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonian, *Rev. Math. Phys.* **27** (2015), 1550015–1–1550015–18.

[HH16] T. Hidaka and F. Hiroshima, Spectral analysis of semi-relativistic Pauli-Fierz models, *J. Math. Anal. Apple.* **437** (2016), 330–349.

[HHS16] T. Hidaka, F. Hiroshima and I. Sasaki, Spectrum of the semi-relativistic Pauli-Fierz model II, preprint (2016).

[Hir14] F. Hiroshima, Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz model, *Adv. in Math.* **259** (2014) 784–840.

[KMS11] M. Könenberg, O. Matte and E. Stockmeyer, Existence of ground states of hydorgen-like atoms in relativistic QED I: the semi-relativistic Pauli-Fierz operator, *Rev. Math. Phys* **23** (2011), 375–407.

[KM13] M. Könenberg and O. Matte, Ground states of semi-relativistic Pauli-Fierz and no-pair Hamiltonians in QED at critical Coulomb coupling, *J. Operator Theory* **70** (2013), 211–237.