数理解析研究所講究録
第2010巻 2016年 61-68

ネルソン模型の基底状態エネルギーと紫外切断のくりこみ項の関係について ——汎関数積分による——

廣島 文生
九大・数理

1 はじめに

このノートでは場の量子論の模型であるネルソン模型の基底状態エネルギーと紫外切断のくりこみ理論の関係を汎関数積分によって明らかにする．これは [Hir15] に論文としてまとめてある．ネルソン模型とはスカラー場とシュレディンガー作用素に支配されている粒子との線型相互作用を表す簡単な模型である．ネルソン模型を厳密に定義するためには，とりあえず紫外切断が必要になる．その紫外切断を除去して，紫外切断のないネルソン模型が定義できる．しかし，そのためにはハミルトニアンをくりこむ必要がある．ただし，ここで云う“くりこみ”は非常に単純で $+\infty$ を加える ($-\infty$ を引去る) というものである．ハミルトニアンの基底状態エネルギーが $-\infty$ に発散するので，くりこみの $+\infty$ と相殺して紫外切断のないハミルトニアンが定義できるのだが，くりこみの $+\infty$ は基底状態の $-\infty$ と完全に一致しているわけではない．1964 年に E・ネルソンはくりこむべき $+\infty$ をある種の作用素の交換関係から導き出した．ネルソンは同様の結果を当初は汎関数積分を用いて測度論的に証明しようと試みたが成功しなかった．それから約 50 年後の 2014 年に Gubinelli-Hiroshima-Lörinczi[GHL14] はネルソンが出来なかった測度論的証明に成功した．その結果の延長にあるのがこの論文である．

[GHL14] では，くりこむべき $+\infty$ がある種の 2 重積分の対角成分から導くことができた．一方でくりこむべき $+\infty$ の正体は，外場ポテンシャルがないときの基底状態エネルギーを結合定数 g^2 で展開したときの g^2 の係数であることが簡単な摂動計算からわかる．この論文では，この事実を汎関数積分を用いて証明する．

2　ネルソン模型の定義

ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のボゾンフォック空間 $\mathscr{F}$ を $\mathscr{F}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}[\otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^3)]$ で定義する．ここで $\otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^3)$ は n 重対称テンソル積を表し，特に $\otimes_s^0 L^2(\mathbb{R}^3)=\mathbb{C}$ である．生成・消滅作用素を $a^*(f), a(f)$ で表す．これらは正準交換関係

$$[a(f),a^*(g)]=(\bar{f},g)\mathbb{1},\quad [a(f),a(g)]=0=[a^*(f),a^*(g)].$$

を満たす．分散関係 $\omega(k)=|k|$ の第２量子化を

$$H_{\mathrm{f}}=d\Gamma(\omega) \tag{2.1}$$

と表す．これは場の自由ハミルトニアンといわれる．形式的に $H_f=\int\omega(k)a^*(k)a(k)dk$ とも表される．一方，粒子のハミルトニアンは，シュレディンガー作用素

$$H_p=-\frac{1}{2}\Delta+V \tag{2.2}$$

で与えられる．(2.1) と (2.2) から非結合ハミルトニアンは $L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathscr{F}\cong L^2(\mathbb{R}^3,\mathscr{F})$ 上の作用素

$$H_p\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_f$$

で与えられる．さて，線型な相互作用を導入しよう．それは場の作用素で与えられる．$x\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^*(e^{ik\cdot x}\hat{\varphi}/\sqrt{\omega})+a(e^{-ik\cdot x}\hat{\varphi}/\sqrt{\omega})\right)$$

とする．ここで $\widetilde{\varphi}(k)=\hat{\varphi}(-k)$ である．$L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathscr{F}\cong\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}\mathscr{F}dx$ の同一視の下で ϕ を

$$\phi=\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}\phi(x)dx$$

と定義する．このときネルソンハミルトニアンは

$$H=H_p\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_f+g\phi$$

と定義される．ここで，$g\in\mathbb{R}$ は結合定数を表す．この論文を通して

$$\hat{\varphi}/\sqrt{\omega},\hat{\varphi}/\omega\in L^2(\mathbb{R}^3),\quad \hat{\varphi}(-k)=\overline{\hat{\varphi}(k)} \tag{2.3}$$

を仮定する．(2.3) の仮定の下で，H は $D(H_p\otimes\mathbb{1})\cap D(\mathbb{1}\otimes H_f)$ 上で自己共役作用素になる．しかも下から有界である．

3 紫外切断のくりこみ理論

このノートの目的は $\hat{\varphi} \to \mathbb{1}$ の極限を考えることである．ただし，このとき

$$1/\sqrt{\omega} \notin L^2(\mathbb{R}^3)$$

なので，$\phi(x)$ は定義されない．そのためにくりこみが必要になる．いま，特別な紫外切断関数を考える：

$$\hat{\varphi}(k) = \hat{\varphi}_\varepsilon(k) = e^{-\varepsilon|k|^2/2}\mathbb{1}_{|k|\geq\lambda}, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.1}$$

ここで，$\lambda > 0$ は赤外切断であり，論文中 λ を固定しておくことにする．我々の考察するハミルトニアンは

$$H_\varepsilon = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + g\phi_\varepsilon \tag{3.2}$$

になる．ここで，ϕ_ε は ϕ で $\hat{\varphi} \to \hat{\varphi}_\varepsilon$ と置き換えたものである．さて，

$$E_\varepsilon = -g^2 \int_{|k|>\lambda} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{2\omega(k)}\beta(k)dk \tag{3.3}$$

とする．ここで，

$$\beta(k) = \frac{1}{\omega(k) + |k|^2/2}$$

であり，全運動量ゼロで運動量 k のボゾンの伝播関数を表す．$E_\varepsilon \to -\infty (\varepsilon \downarrow 0)$ に注意しよう．ネルソンは次を証明した．

命題 3.1 $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathscr{F}$ 上の自己共役作用素 H_{ren} で

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-T(H_\varepsilon - g^2 E_\varepsilon)} = e^{-TH_{ren}}.$$

となるものが存在する．

証明 [Nel64a][Nel64b][GHL14] を見よ． **証明終わり**

E_ε の正体を考えてみよう．全運動量作用素を

$$P_{tot} = -i\nabla \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \int k a^*(k)a(k)dk$$

と定義すれば，$[H_\varepsilon, P_{tot}] = 0$ がわかるから H_ε を P_{tot} のスペクトルで分解することができる：

$$H_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_\varepsilon(P)dP.$$

ここで, $\mathbb{R}^3$ は P_{tot} の結合スペクトルである．実は

$$H_\varepsilon(P)=\frac{1}{2}(P-P_{\rm f})^2+H_{\rm f}+g\phi_\varepsilon(0)$$

となることがわかる．ここで, $P_f=\int ka^*(k)a(k)dk$. $P=0$ のときの $H_\varepsilon(P=0)$ の基底状態エネルギーを $E(g^2)$ とおく. *i.e.*, $\inf\sigma(H_\varepsilon(0))=E(g^2)$. そして $E(g^2)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ng^{2n}$ と展開する．基底状態 $\varphi_{\rm g}$ を $\varphi_{\rm g}=\mathbb{1}+g\phi_1+g^2\phi_2+\cdots$ と展開すれば

$$\begin{aligned}\phi_1&=-(\frac{1}{2}{P_{\rm f}}^2+H_{\rm f})^{-1}\phi_\varepsilon(0)\mathbb{1}\\ a_2&=-(\mathbb{1},\phi_\varepsilon(0)\phi_1)=-(\phi_\varepsilon(0)\mathbb{1},(\frac{1}{2}{P_{\rm f}}^2+H_{\rm f})^{-1}\phi_\varepsilon(0)\mathbb{1})\end{aligned}$$

となり, $a_2=E_\varepsilon$ がわかる．この事実を汎関数積分から導きたい．$(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は 3 次元ブラウン運動とする．ただし時間 t は $\mathbb{R}$ 全体を動く．その期待値を $\mathbb{E}[\cdots]$ と表す．

補題 3.2 $\mathrm{P}\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$(\mathbb{1},e^{-2TH_\varepsilon(P)}\mathbb{1})=\mathbb{E}\left[e^{iP\cdot(B_T-B_{-T})}e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon}\right]$$

と表せる．ここで

$$\begin{aligned}S_\varepsilon&=\int_{-T}^{T}ds\int_{-T}^{T}dtW_\varepsilon(B_t-B_s,t-s),\\ W_\varepsilon(x,t)&=\int_{|k|\geq\lambda}\frac{e^{-\varepsilon|k|^2}e^{-ik\cdot x}e^{-\omega(k)|t|}}{2\omega(k)}dk.\end{aligned}$$

証明 [GHL14] を見よ． **証明終わり**

補題 3.2 で $P=0$ とおくと,

$$(\mathbb{1},e^{-2TH_\varepsilon(0)}\mathbb{1})=\mathbb{E}\left[e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon}\right].$$

$\inf\sigma(H_\varepsilon(0))=E_\varepsilon(g^2)$ だから

$$E_\varepsilon(g^2)=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\log(\mathbb{1},e^{-2TH_\varepsilon(0)}\mathbb{1})=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\log\mathbb{E}\left[e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon}\right]\qquad(3.4)$$

となる．形式的にみると, S_ε の 2 重積分で $t=s$ とした対角成分の被積分関数は

$$W_\varepsilon(0,0)=\int_{|k|\geq\lambda}\frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{2\omega(k)}dk\to+\infty\qquad(\varepsilon\downarrow 0)$$

のように発散するので, この対角成分を除去することを考える.

$$\varrho_\varepsilon(x,t)=\int_{|k|\geq\lambda}\frac{e^{-\varepsilon|k|^2}e^{-ik\cdot x}e^{-\omega(k)|t|}}{2\omega(k)}\beta(k)dk$$

とおけば, 伊藤の公式から次の補題が示せる.

補題 3.3 $S_\varepsilon=S_\varepsilon^{ren}+4T\varrho_\varepsilon(0,0)$.

ここで

$$\begin{aligned}S_\varepsilon^{ren}=&2\int_{-T}^{T}ds\int_{[s+\tau]}^{T}W_\varepsilon(B_t-B_s,t-s)dt\\&+2\int_{-T}^{T}\left(\int_s^{[s+\tau]}\nabla\varrho_\varepsilon(B_t-B_s,t-s)\cdot dB_t\right)ds\\&-2\int_{-T}^{T}\varrho_\varepsilon(B_{[s+\tau]}-B_s,[s+\tau]-s)ds.\end{aligned}$$

ここで, $0<\tau<T$ であり, $[t]=-T\vee t\wedge T$. また, 右辺第一項は S_{OD} と表すことにする. S_{OD} は積分範囲が対角成分から離れているので $\varepsilon\downarrow 0$ の極限で問題がおきない. また, 第三項も困難はない. 第二項が評価の困難な部分であるが, [GHL14] でいろいろ調べられている. $4T\varrho_\varepsilon(0,0)$ がまさに対角成分にあたり, くりこみ項になる部分である. つまり

$$E_\varepsilon=-\varrho_\varepsilon(0,0).$$

次の補題がキーになる補題である.

補題 3.4 結合定数 g に依らない定数 $b,c>0$ が存在して, すべての $\varepsilon>0$ で

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{ren}}\right]\leq e^{b(c+g^4T)+c(\tau)\frac{g^2}{2}T}.$$

ここで,

$$c(\tau)=8\pi\int_\lambda^\infty e^{-\varepsilon r^2}e^{-\tau r}dr.$$

証明 $S_\varepsilon^{ren}=S_{OD}+Y+Z$ とおく. [GHL14] で

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha Y}\right]\leq e^{\alpha^2Tb_1}$$

が証明されている. ここで $b_1>0$ は定数, また

$$|\varrho_\varepsilon(B_T-B_s,T-s)|\leq|\varrho_\varepsilon(0,T-s)|<M$$

となる定数 M が存在し, かつ $|\varrho_\varepsilon(0,T-s)| \le \frac{1}{2}e^{-\lambda|T-s|}$ となるから

$$|Z| \le 2\int_0^{2T} \varrho_\varepsilon(0,u)du \le 2\left(\int_0^1 + \int_1^{2T}\right)\varrho_\varepsilon(0,u)du \le 2M + \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda 2T}) \le c.$$

最後に

$$|S_\varepsilon^{OD}| \le 2\int_{-T}^{T-\tau} ds \int_{S+\tau}^{T} dt \int_{|k|\ge\lambda} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-\omega(k)|t-s|}dk \le c(\tau)T$$

だから補題が従う. **証明終わり**

補題 3.5 b と $c(\tau)$ は補題 *4.3* で与えた定数とする. このとき,

$$\left|\frac{E_\varepsilon(g^2)}{g^2} + \varrho_\varepsilon(0,0)\right| \le \frac{1}{2}\left(g^2 b + \frac{1}{2}c(\tau)\right).$$

証明

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(g^2) &= -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\log\mathbb{E}\left[e^{\frac{g^2}{2}(S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}+4T\varrho_\varepsilon(0,0))}\right] \\ &= -g^2\varrho_\varepsilon(0,0) - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\log\mathbb{E}\left[e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}\right] \end{aligned}$$

だから

$$\left|E_\varepsilon(g^2) + g^2\varrho_\varepsilon(0,0)\right| \le \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|\log\mathbb{E}\left[e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon}\right]\right|. \tag{3.5}$$

以上より補題が示された. **証明終わり**

主定理を述べる.

定理 3.6 次が成立する.

$$\lim_{g\to 0}\frac{E_\varepsilon(g^2)}{g^2} = E_\varepsilon, \tag{3.6}$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}|E_\varepsilon(g^2) - g^2 E_\varepsilon| < \infty. \tag{3.7}$$

証明 直接, 補題 3.5 から

$$\lim_{g\to 0}\left|\frac{E_\varepsilon(g^2)}{g^2} - E_\varepsilon\right| \le \frac{1}{4}c(\tau).$$

ここで, τ は任意かつ $c(\tau) \to 0 \ \ (\tau\to\infty)$ だから (3.4) が従う. また, $c(\tau) < \infty$ なので (3.5) が従う. **証明終わり**

4 結語

$E_\varepsilon(0)=0$ なので定理 3.6 から

$$\lim_{g\to 0}\frac{E_\varepsilon(g^2)-E_\varepsilon(0)}{g^2}=E_\varepsilon$$

が分かるから

$$E_\varepsilon=\frac{E_\varepsilon(g^2)}{dg^2}\lceil_{g^2=0}$$

となる．この定理から形式的な摂動展開をせずに E_ε が $E_\varepsilon(g^2)$ を Taylor 展開したときの g^2 の係数になることが示せたことになる．つまり，くりこみ項が $E_\varepsilon(g^2)$ を g^2 で展開したときの g^2 の係数に等しいことを示した．そのキーになる等式は

$$E_\varepsilon(g^2)+g^2\varrho_\varepsilon(0,0)=-\frac{1}{g^2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\log\mathbb{E}\left[e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{T\mathrm{ren}}}\right] \tag{4.1}$$

だった．直感的には，$e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{T\mathrm{ren}}}$ の期待値の対数 $/g^2$ の極限なので右辺が $g^2\to 0$ の極限でゼロに収束するようにはみえないが，確率積分の項から g^4 が現れて，結局 (4.1) の右辺は

$$e^{b(c+g^4T)}\cdot e^{\frac{c(\tau)}{2}g^2T}$$

で上から抑えられることがわかった．$\frac{1}{g^2}\frac{1}{2T}\log e^{b(c+g^4T)}$ の項はゼロに収束することは直ぐに分かり，$\frac{1}{g^2}\frac{1}{2T}\log e^{\frac{c(\tau)}{2}g^2T}$ は $c(\tau)$ に収束する．幸いなことに g^2 の係数 $c(\tau)$ は $\tau\to 0$ でゼロに収束し，τ は任意であったので定理 3.6 を証明することができたが，非常にミラクルな感じがする．また，$E_\varepsilon(g^2)$ の高次の各項は形式的には発散するので $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}|E_\varepsilon(g^2)-g^2E_\varepsilon|$ が有界となることを摂動論的に示すことは容易ではない．以上見たように，確率積分を通してネルソンのくりこみ項と基底状態エネルギーを関連づけることが出来た．このような状況で確率積分が現れることに深いものを感じる．

[GHPS12] ではローレンツ多様体上に定義されたネルソン模型のくりこみ理論が展開されている．この模型に対する測度論的手法によるくりこみ理論も興味がそそられる．しかしながら，他の重要な場の量子論の模型では，この手のくりこみはうまくいっていない．これらは今後の研究課題であろう．

参考文献

[GHL14] M. Gubinelli, F. Hiroshima and J. Lorinczi, Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration, *J.Funct.Anal.* **267** (2014), 3125-3153.

[GHPS12] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Removal of the UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients, *Lett. Math. Phys.* **101** (2012), 305–322.

[Hir15] F. Hiroshima, Note on ultraviolet renormalization and ground state energy of the Nelson model, preprint 2015.

[Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1190–1197.

[Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, in: *Proc. Conference on Analysis in Function Space*, W. T. Martin and I. Segal (eds.), p. 87, MIT Press, 1964.