数理解析研究所講究録
第2011巻 2016年 134-140

On set equilibrium problems as a unified approach (集合均衡点問題についての統一的なアプローチ)

千葉工業大学 学習支援センター　荒谷　洋輔 (ARAYA, Yousuke)*
(Chiba Institute of Technology)

1　はじめに

ベクトル最適化問題の拡張である集合最適化問題は、1997年に黒岩-田中-Ha[15] によって提唱された。この問題は、集合値写像の像空間の元（集合）における大小の比較について6種類の順序を導入し、その順序による最適化問題を考えるというものである。その後、2011年のJahn-Ha[12] による新たな集合の順序の導入などがあり、近年における集合最適化の研究は、いろんな方面で盛んになってきている。

本稿では、まずいくつかの集合の順序を導入し、その性質を振り返る。次に集合のスカラー化の歴史について大雑把に振り返る。さらに、（本稿の主題である）ベクトル均衡点を拡張した集合均衡点問題を導入する。そこで、集合均衡点の存在性に関することなど今後の集合均衡点問題についての展望について述べたいと思う。

2　準備

2.1　ベクトル最適化からの準備

本稿では、(X, d) を完備距離空間、Y を線形位相空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A \subset Y$ に対し、A の代数的内部、位相的内部、位相的閉包をそれぞれ $\mathrm{cor}A$、$\mathrm{int}A$、$\mathrm{cl}A$ と表す。また、この論文で、$C \subset Y$ は閉凸錐を表すものとする。つまり、以下の条件を満たす。

(a) $\mathrm{cl}C = C$、
(b) $C + C \subseteq C$、
(c) $\lambda C \subseteq C \quad \forall \lambda \in [0, \infty)$。

尚、錐 $C \subset Y$ がsolidとは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointedであるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。凸錐 $C \subset Y$ によって以下のようなベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_2 - y_1 \in C$$

もし、C がpointedならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の（実）順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる。

*E-mail: yousuke.araya@p.chibakoudai.jp

2.2 集合最適化からの準備

$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$、$\alpha \in \mathbb{R}$、$V \in \mathcal{V}$ に対して、2つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \qquad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

そのとき $\mathcal{V}$ は、$\{\mathbf{0}_Y\}$ を零ベクトルとするベクトル空間であることが確かめられる。

定義 2.1 (Kuroiwa-Tanaka-Ha [15]). $A,\ B \in \mathcal{V}$ と凸錐 $C \subset Y$ に対して、

$$A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \qquad A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C。$$

命題 2.2 (Araya [3]). $A, B \in \mathcal{V}$ と $y \in Y$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l[u]} B \implies (A+y) \leq_C^{l[u]} (B+y)$、

(ii) $A \leq_C^{l[u]} B \implies \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B \ (\alpha \geq 0)$、

(iii) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

2011 年に、Jahn-Ha [12] は上記の順序とは異なる新たな順序を導入した。

定義 2.3 (Jahn-Ha [12]). $A,\ B \in \mathcal{V}$ と凸錐 $C \subset Y$ に対して、

$$A \leq_C B \quad \text{by} \quad A = B \quad \text{or} \quad A \neq B,\ B - A \subset C。$$

命題 2.4 ([12]). $A, B \in \mathcal{V}$ と $y \in Y$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C B \implies (A+y) \leq_C (B+y)$、

(ii) $A \leq_C B \implies \alpha A \leq_C \alpha B \ (\alpha \geq 0)$、

(iii) $\leq_C$ は、反射律と推移律が成り立つ。さらに、もし C が *pointed* ならば、$\leq_C$ は反対称律が成り立ち、したがって $(\mathcal{V}, \leq_C)$ は順序空間となる。

注意 1. 上記のことから、Jahn-Ha 型の集合の順序は、ほとんどベクトルと同じ扱いができるということが分かる。

命題 2.5 ([3, 16]). $A,\ B \in \mathcal{V}$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C B \implies A \leq_C^l B$、

(ii) $A \leq_C B \implies A \leq_C^u B$。

注意 2. ベクトル順序と集合順序はさまざまな違いがある。ベクトル順序の場合、$x, y \in Y$ と $C \subset Y$ に対して

$$y - x \in C \ (x \leq_C y) \iff y \in x + C \iff x \in y - C$$

である。一方、集合順序の場合、$A, B \in \mathcal{V}$ と $C \subset Y$ に対して、上記の真ん中と右の順序に対応する $B \subset A + C$ $(A \leq_C^l B)$ と $A \subset B - C$ $(A \leq_C^u B)$ は一般に異なる（[3] を参照のこと）。

次の定義は、集合順序特有のものである。

定義 2.6. $\mathcal{V}$ に次のような同値関係を導入する。

$$V_1 \sim_l V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^l V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^l V_1$$

$$V_1 \sim_u V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^u V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^u V_1$$

$$V_1 \sim V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C V_1$$

同値類の集合をそれぞれ $[\cdot]^l$、$[\cdot]^u$、$[\cdot]$ と書く。同値関係の定義より次が分かる。

$$A \in [B]^l \Leftrightarrow A + C = B + C$$

$$A \in [B]^u \Leftrightarrow A - C = B - C$$

$$A \in [B] \Leftrightarrow (A = B) \text{ or } (B - A \subset C,\ A - B \subset C)$$

さらに、もし C が pointed ならば、$A \in [B] \Leftrightarrow A = B$ も分かる（[3, 4] を参照のこと）。

3 集合のスカラー化について（これまでの成果の概要）

3.1 ベクトルのスカラー化について

ベクトルのスカラー化で最も多く使われる手法は、関数の値域空間 Y（主に Banach 空間など）に対し、双対空間 Y^* の元である線型汎関数を用いてスカラー化する方法である。それに対し、1960 年過ぎから Minkowski 汎関数から派生した劣線形スカラー化関数のアイディアが、Krasnosel'skij[14] や Rubinov[21] によって現れ始めた。さらに、1990 年頃 Tammer-Weidner[8] と Luc[17] により、劣線形スカラー化関数は完成された形になった（以下「**T-W のスカラー化手法**」と省略）。T-W のスカラー化手法の系として導かれる分離定理は、凸性の仮定が必要ないという利点がある。

3.2 集合のスカラー化について（G-T の集合スカラー化手法）

集合のスカラー化の研究は、2000 年前後に Georgiev-田中 [9] により始まった。これは、集合値写像の像（集合）をベクトルの和集合としてとらえ、それぞれのベクトルを（2 種類の）T-W のスカラー化手法を用いて計算する。そして、ベクトルをスカラー化した値の集合の上限・下限を取ることにより、合計 4 種類の値で評価するものである（以下「**G-T の集合スカラー化手法**」と省略）。その後、Georgiev-西澤-清水-田中などによって、主に以下の成果があった。

- 集合値写像の凸性や連続性の G-T の集合スカラー化手法による遺伝性の研究 [19]。
- G-T の集合スカラー化手法を用いた、二者択一の定理の導出 [18]。
- 集合最適化問題の最適解を、G-T の集合スカラー化手法を用いての特徴づけ [22]。

3.3 集合のスカラー化について（T-W のスカラー化手法の拡張という観点から）

また、別のアプローチとして、T-W のスカラー化手法の集合への拡張という課題もある。上記の研究は 2005 年過ぎから始まり、Hamel-Lohne[10] が l 型・u 型順序について答を得た。Hernández-Rodríguez-Marín[11] は l 型の順序についての拡張だけでなく、その拡張が G-T の集合スカラー化手法の 4 種類の値の 1 つになっていることを示した。さらに、桑野-山田-田中 [16] は、[10, 11] の先行研究からヒントを得て、前述の 6 種類の順序について T-W のスカラー化手法を集合の場合へ拡張した。

3.4　集合のスカラー化について（２０１０年以降）

その後 2010 年前後あたりから、集合のスカラー化の研究は盛んになってきている。荒谷 [3, 4] は、l 型・u 型・Jahn-Ha 型の順序のスカラー化関数に関して、その性質をより詳しく調べた他、スカラー関数同士の関係性も調べた。さらに、集合最適化問題の最適解を拡張 T-W のスカラー化手法を用いて特徴づけした。

4　集合均衡点問題について

X を空でない集合とする。まず最初に（実数値の）均衡点問題を定義する。

$$\text{(EP)} \quad \text{Find} \quad x_0 \in X \quad \text{satisying} \quad f(x_0, y) \geq 0 \quad \text{for all} \quad y \in X$$

ここで、$f : X \times X \to \mathbb{R}$ は、実数値の 2 変数関数である。次に、（実数値の）均衡点問題の拡張であるベクトル均衡点問題を定義する。この問題は、以下の形で [5, 20] によって初めて導入された。

$$\text{(VEP)} \quad \text{Find} \quad x_0 \in X \quad \text{satisying} \quad F(x_0, y) \not\leq_{\text{int}C} 0_Y \quad \text{for all} \quad y \in X$$

ここで、$F : X \times X \to Y$ は、ベクトル値の 2 変数関数である。(VEP) の解 $x_0 \in X$ は、ベクトル均衡点と呼ばれ、上記の式は以下の形で書き換えられる。

$$f(x_0, X) \notin -\text{int}C \qquad \text{and} \qquad f(x_0, X) \cap (-\text{int}C) = \emptyset$$

ベクトル均衡点の存在性に関する研究は、これまでたくさんの先行研究がある。([1, 2, 5, 13, 20] やその参考文献を参照のこと)。ベクトル均衡点問題に関しては、次のような強い順序の問題も考えることができる。

$$(\text{s} - \text{VEP}) \quad \text{Find} \quad x_0 \in X \quad \text{satisying} \quad F(x_0, y) \geq_C 0_Y \quad \text{for all} \quad y \in X$$

しかし、本稿では弱い順序の問題 (VEP) を主に取り扱う。

その後、さまざまな型（上記の問題の拡張された形として）のベクトル均衡点問題が研究された。

(a)　$\phi(x_0, y) \subset C(x_0)$

(b)　$\phi(x_0, y) \cap C(x_0) \neq \emptyset$

(c)　$\phi(x_0, y) \cap \{-(C(x_0) \setminus \{0_Y\})\} = \emptyset$

(d)　$\phi(x_0, y) \not\subset -(C(x_0) \setminus \{0_Y\})$

(e)　$\phi(x_0, y) \cap \{-\text{int}C(x_0)\} = \emptyset$

(f)　$\phi(x_0, y) \not\subset -\text{int}C(x_0)$

ここで、$\phi : X \times X \to \mathcal{V}$ は、集合値の 2 変数関数、$C : X \to \mathcal{V}$ は凸錐の値をとる関数である。([13] とその参考文献を参照のこと)。

ここで、本稿の主題である 3 つの型の集合均衡点問題を定義する。この問題は、ベクトル均衡点問題 (VEP) の拡張である。

$$(l\text{−SEP}) \quad \text{Find} \quad x_0 \in X \quad \text{satisying} \quad F(x_0, y) \not\leq^{l}_{\text{int}C} \{0_Y\} \quad \text{for all} \quad y \in X$$

$$(u\text{−SEP}) \quad \text{Find} \quad x_0 \in X \quad \text{satisying} \quad F(x_0, y) \not\leq^{u}_{\text{int}C} \{0_Y\} \quad \text{for all} \quad y \in X$$

$$\text{(SEP)} \quad \text{Find} \quad x_0 \in X \quad \text{satisying} \quad F(x_0, y) \not\leq_{\text{int}C} \{0_Y\} \quad \text{for all} \quad y \in X$$

ここで、$F : X \times X \to \mathcal{V}$ は集合値の２変数関数である。(l-SEP)[(u-SEP)、(SEP)] の解 $x_0 \in X$ は、l-集合均衡点 [u-集合均衡点、集合均衡点] と呼ばれる。同じように、強い順序のベクトル均衡点問題 (s-VEP) の拡張である、３つの型の強い順序による集合均衡点問題を定義する。

$$(l\text{-s}-\text{SEP}) \quad \text{Find} \quad x_0 \in X \quad \text{satisying} \quad F(x_0, y) \geq^l_C \{0_Y\} \quad \text{for all} \quad y \in X$$

$$(u\text{-s}-\text{SEP}) \quad \text{Find} \quad x_0 \in X \quad \text{satisying} \quad F(x_0, y) \geq^u_C \{0_Y\} \quad \text{for all} \quad y \in X$$

$$(\text{s}-\text{SEP}) \quad \text{Find} \quad x_0 \in X \quad \text{satisying} \quad F(x_0, y) \geq_C \{0_Y\} \quad \text{for all} \quad y \in X$$

ここで、上記の分類 **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(d)**, **(e)**, **(f)** と集合均衡点問題 (l-SEP), (u-SEP), (SEP), (l-s-SEP), (u-s-SEP), (s-SEP) を比較してみよう。すると、次の事が分かる。

$$F(x_0, y) \not\leq^l_{\text{int}C} \{0_Y\} \iff 0_Y \notin F(x_0, y) + \text{int}C \iff F(x_0, y) \cap (-\text{int}C) = \emptyset \quad \textbf{(e)}$$

$$F(x_0, y) \not\leq^u_{\text{int}C} \{0_Y\} \; (= F(x_0, y) \not\leq_{\text{int}C} \{0_Y\}) \iff F(x_0, y) \not\subset -\text{int}C \quad \textbf{(f)}$$

$$F(x_0, y) \geq^l_C \{0_Y\} \; (= F(x_0, y) \geq_C \{0_Y\}) \iff F(x_0, y) \subset C \quad \textbf{(a)}$$

$$F(x_0, y) \geq^u_C \{0_Y\} \iff 0_Y \in F(x_0, y) - C \iff F(x_0, y) \cap C \neq \emptyset \quad \textbf{(b)}$$

つまり、下記の関係がある（[13] も参照のこと)。

$$(l-\text{SEP}) = \textbf{(e)} \subset (u-\text{SEP}) = (\text{SEP}) = \textbf{(f)}$$

$$(l-\text{s}-\text{SEP}) = (\text{s}-\text{SEP}) = \textbf{(a)} \subset (u-\text{s}-\text{SEP}) = \textbf{(b)}$$

一般に l 型と u 型は比較できないが、集合均衡点問題に限ると、常に l 型 $\subset u$ 型となる ことが分かる。本稿では、順序錐 $C \subset Y$ は Y の原点を含むと仮定しているので、**(c)** と **(d)** は取り扱わない。

4.1 集合均衡点の存在性について（Fan の不等式から）

ベクトル均衡点の存在性に関する研究は、Ansari-Yao [1] あたりから始まり、その後 [9] などが [1] を拡張した。これらは Fan の不等式の拡張にもなっている。これらの結果を集合均衡点問題へ拡張するとき、ベクトルの場合と比べてどのような差異が生まれるのか、これからの研究課題である。

4.2 集合均衡点の存在性について（Ekeland の変分原理から）

最適化問題で幅広い応用がある Ekeland の変分原理 [7] について、2008 年に荒谷-木村-田中 [2] はベクトル均衡点問題へ拡張した。

定理 4.1 ([2]). $f : X \times X \to Y$ を２変数ベクトル値関数とし、次の４つの条件を満たすとする。

(i) 任意の $x \in X$ に対し、$f(x, X) \cap (\tilde{y} - \text{int}C) = \emptyset$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$ が存在する。

(ii) $\{y \in X | f(x, y) + d(x, y)k^0 \in -C\}$ が任意の $x \in X$ に対して閉集合となる。

(iii) 任意の $x \in X$ に対して $f(x, x) = 0_Y$ となる。

(iv) 任意の $x, y, z \in X$ に対し $f(x, z) \leq_C f(x, y) + f(y, z)$ が成立する。

その時、任意の $x_0 \in X$ に対し、次の 2 条件を満たす $\bar{x} \in X$ が存在する。

(1) $f(x_0, \bar{x}) + d(x_0, \bar{x})k^0 \in -C$、

(2) 任意の $x \neq \bar{x}$ について $f(\bar{x}, x) + d(\bar{x}, x)k^0 \notin -C$。

ここで、[2] の集合均衡点問題への拡張を考える。Ekeland の変分原理を抽象化した Brezis-Browder の定理 [6] を適用するため、集合 $X \times X \times \mathcal{V}$ 上に順序関係を導入する。

$$x_2 \precsim^l_{k^0} x_1 \Longleftrightarrow F(x_1, x_2) + d(x_1, x_2)k^0 \leq^l_C \{0_Y\}$$

$$x_2 \precsim^u_{k^0} x_1 \Longleftrightarrow F(x_1, x_2) + d(x_1, x_2)k^0 \leq^u_C \{0_Y\}$$

$$x_2 \precsim_{k^0} x_1 \Longleftrightarrow F(x_1, x_2) + d(x_1, x_2)k^0 \leq_C \{0_Y\}.$$

順序 $\precsim^u_{k^0}$ と $\precsim_{k^0}$ は同値であることが、定義から直ちに分かる。上記の [2] の定理を集合値写像へ拡張するとき、ベクトルの場合と比べてどのような差異が生まれるのか、これからの研究課題である。

参考文献

[1] Q. H. Ansari, J. C. Yao, *An existence result for the generalized vector equilibrium problem*, Appl. Math. Lett. **12** (1999), 53–56.

[2] Y. Araya, K. Kimura, T. Tanaka, *Existence of vector equilibria via Ekeland's variational principle*, Taiwanese J. Math. 12 (2008) 1991–2000.

[3] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, Nonlinear Anal. 75, (2012) 3821–3835.

[4] Y. Araya, *New types of nonlinear scalarizations in set optimization*, Nonlinear Analysis and Optimization, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 7–21. Yokohama Publishers, Yokohama (2014).

[5] M. Bianchi, N. Hadjisavvas, S. Schaible, *Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions*, J. Optim. Theory Appl. 92 (1997), 527–542.

[6] H. Brezis, F. E. Browder, *A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis*, Advances in Math. 21 (1976) 355–364.

[7] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974) 324–354.

[8] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu, *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York (2003).

[9] P. G. Georgiev, T. Tanaka, *Fan's inequality for set-valued maps*, Nonlinear Anal. 47. (2001) 607–618.

[10] A. Hamel and A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear and Convex Anal. 7, (2006) 19–37.

[11] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set-optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 325, (2007) 1–18.

[12] J. Jahn and T.X.D. Ha, *New order relations in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. 148, (2011) 209–236.

[13] E. M. Kalmoun, *Vector equilibrium problems as a unified approach*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 137–148. Yokohama Publishers, Yokohama (2003).

[14] M. A. Krasnosel'skij, Positive solutions of operator equations, (Russian) Fizmatgiz, Moskow, 1962.

[15] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30, (1997) 1487–1496.

[16] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, Nonlinear Analysis and Optimization, S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 193–204. Yokohama Publishers, Yokohama (2009).

[17] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[18] S. Nishizawa, M. Onodsuka and T. Tanaka, *Alternative theorems for set-valued maps based on a nonlinear scalarization*, Pac. J. Optim. 1, (2005) 147–159.

[19] S. Nishizawa, T. Tanaka, and P. Gr. Georgiev, *On inherited properties of set-valued maps*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 341–350. Yokohama Publishers, Yokohama (2003).

[20] W. Oettli, *A remark on vector-valued equilibria and generalized monotonicity*, Acta Math. Vietnam. 22 (1997) 213–221.

[21] A. M. Rubinov, Sublinear operators and their applications. (Russian) Russian Math. Surveys, 32(4) (1977) 115–175.

[22] A. Shimizu, S Nishizawa and T. Tanaka, *Optimality conditions in set-valued optimization using nonlinear scalarization methods*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), pp. 565–574. Yokohama Publishers, Yokohama (2007).