数理解析研究所講究録
第2012巻 2016年 31-40

Maass waveform の数値計算

木村巌 *(富山大学理工学研究部 (理学))
Iwao KIMURA,
The Graduate School of Science and Engineering for Research,
University of Toyama.

本稿では，Maass waveform の数値計算の試みについて論ずる．

1 Maass waveform の基本事項

この節では，Maass waveform の基本事項を，本橋 [本 99, II 部 §17-18] により概説する．

Maass waveform は，上半平面上の「実解析的」関数で，算術部分群 ($\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ の離散部分群で余体積有限なもの) について不変性をもつものである (正確な定義は後述する)．これは正則モジュラー形式の「実解析的」類似である．

1.1 上半平面の微分幾何

上半平面を $H=\{z\in\mathbf{C}|\ \mathrm{Im}(z)>0\}$ とする．上半平面の通常の正則構造から，Riemann 計量 $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$ が定まる．2 次の実特殊線形群 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ は一次分数変換で H に作用し，$\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ が (正確には $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ が) H の等長変換群である．また面積要素は $d\mu(z)=\frac{dxdy}{y^2}$ で，これは $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ 不変である．

全モジュラー群 $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ による H の商を考え，通常の基本領域を $\mathcal{F}$ と書く．また，$\mathcal{F}$ に 1 点を付け加えて得られる実 2 次元曲面を $\mathcal{F}^*$ と書く．

上の Riemann 計量に対する Laplace-Beltrami 作用素から，双曲的 Laplacian Δ が定まる：

$$\Delta=-y^2\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right).$$

1.2 Maass waveform

■Γ-保型関数

定義 1.1. 上半平面 H 上の関数 f が Γ-保型であるとは，$f(\gamma(z))=f(z)$ が任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して成立すること，つまり，f が曲面 $\mathcal{F}$ 上の関数であることと定義する．

---

email:iwao@sci.u-toyama.ac.jp
本研究は JSPS 科研費 26400008 の助成を受けたものです．

特に $f \in C^2(\mathcal{F})$ が Γ-保型なら，Δf も Γ-保型である．

例 1.2 (Poincaré 級数・Eisenstein 級数). Γ-保型関数の例として次の Poincaré 級数，Eisenstein 級数がある．Γ_∞ をカスプ ∞ の（$\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ の作用に関する）固定部分群とする．

$$P_m(z,s) = \sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma} (\mathrm{Im}(\gamma(s)))^s e(m\gamma(z)), \quad (e(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)),$$
$$E(z,s) = P_0(z,s) = \sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma} (\mathrm{Im}(\gamma(z)))^s,$$

とおいて，前者を Poincaré 級数，後者を Eisenstein 級数という．

Poincaré 級数は，$m > 0$, $z \in \mathcal{F}$ のとき，$\sigma = \mathrm{Re}(s) > \frac{3}{4}$ で s について正則かつ $P_m(z,s) \gg y^{1-\sigma}$. Eisenstein 級数は任意の $z \in H$ について s の関数として有理型である．

Eisenstein 級数は，次のような具体的な表示を持つ．

命題 1.3. Eisenstein 級数は，任意の $z \in H$ について s の関数として有理型で，次の Fourier 展開を持つ：

$$E(z,s) = y^s + \phi_\Gamma(s)y^{1-s} + \tag{1}$$
$$\frac{2\pi^s}{\Gamma(s)\zeta(2s)}\sqrt{y}\sum_{n\neq 0}|n|^{s-\frac{1}{2}}\sigma_{1-2s}(|n|)K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)e(nx), \tag{2}$$
$$\phi_\Gamma(s) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)},$$

$K_s(z)$ は Bessel 関数で，$\phi_\Gamma(s)$ については本橋上掲書補題 17.2 をみよ．また $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$, $s \neq 1$ で正則，$s = 1$ で一意の極を持ち留数は $\frac{3}{\pi}$ である．更に，関数等式と微分方程式を満たす：

$$E(z,s) = \phi_\Gamma(s)E(z,1-s), \tag{3}$$
$$\Delta E(z,s) = s(1-s)E(z,s). \tag{4}$$

1.3 スペクトル理論

基本領域 $\mathcal{F}$ 上の関数 f に対して $\|f\|^2 = \int_{\mathcal{F}} |f(z)|^2 d\mu(z)$ と定義する．

$$L^2(\mathcal{F}, d\mu) := \{f;\ f \text{ は } \Gamma\text{-保型関数で}, \|f\| < +\infty\}, \tag{5}$$
$$\mathcal{B}^\infty(\mathcal{F}) := \{f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu); f \text{ の任意階の偏導関数が急減少 }\}. \tag{6}$$

g が急減少とは，任意に固定した $M > 0$ に対して $g(z) = O(y^{-M})$, $z \in \mathcal{F}$ と定義する．

Δ はアプリオリには $C^2(\mathcal{F}) \cap L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ 上の作用素だが，$L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ 上に自己共役作用素に拡張でき，スペクトル分解が可能である．

また，$f \in C^2(\mathcal{F}) \cap L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ が $\Delta f = (R^2 + \frac{1}{4})f$ を満たすとき，

- $R = \frac{1}{2}i$ なら f は定数関数，

- $R \neq \frac{1}{2}i$ なら次の Fourier 展開を持ち，よって $f \in \mathcal{B}^\infty(\mathcal{F})$. :

$$f(z) = \sqrt{y}\sum_{n\neq 0} c(n)K_{iR}(2\pi|n|y)e(nx), \quad z \in H.$$

■Δ のスペクトル分解

定理 1.4 (*cf.* 本橋，定理 18.1). • Δ を $\mathcal{B}^\infty(\mathcal{F})$ に制限すると，固有値は離散集合．これらを $\lambda_j = R_j^2 + \frac{1}{4}$, $j = 1, 2, \ldots, ; R_{j+1} > R_j > 0$, とする．

- 各 λ_j に対応する固有関数 ψ_j は正規直交系をなすものとする．このとき

$$L^2(\mathcal{F}, d\mu) = \mathbf{C} \oplus \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{C},$$

ただし，$\mathfrak{D}$ は $\{\psi_j\}$ で張られる空間，$\mathfrak{C}$ は省略.

- つまり，$f \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ は次のように展開できる（ノルム収束の意味で）:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\langle f, \psi_j\rangle + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}(t, f)E(z, \frac{1}{2} + it)dt.$$

$\psi_j(z)$ を Maass wave cuspform ということにする．

1.4 Hecke 作用素

定義 1.5 (Hecke 作用素). ϕ を Γ-保型, $z \in H$ とする．正整数 n に対して，次のように $T_n[\phi](z)$ を定義する：

$$T_n[\phi](z) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{ad=n, d>0}\sum_{0\leq b<d}\phi\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

このとき $T_n[\phi](z)$ も再び Γ-保型であることが示せる．$\phi \mapsto T_n[\phi]$ により，n 番目の Hecke 作用素 T_n を定義すし，n 番目の Hecke 作用素という．

特に $n = p$, 素数の時は $(a, d) = (1, p)$ または $(a, d) = (p, 1)$ だから

$$T_p[\phi](z) = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\sum_{0\leq b<p}\phi\left(\frac{z+b}{p}\right) + \phi(pz)\right). \tag{7}$$

補題 1.6 (Hecke 作用素の間の関係).

$$T_mT_n = \sum_{d|(m,n)} T(\frac{mn}{d^2}).$$

特に，Hecke 作用素たちは可換である：$T_mT_n = T_nT_m$. また，$\gcd(m, n) = 1$ なら $T_{mn} = T_mT_n$.

系 1.7. 次の再帰式が成立．特に T_{p^μ} は T_p の μ 次整数係数多項式である：

$$T_{p^{\mu+1}} = T_{p^\mu}T_p - T_{p^{\mu-1}}.$$

補題 1.8. Hecke 作用素は $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ 内の Δ の固有空間それぞれで Hermite 作用素である．

系 1.9. 定理 1.4 の $\{\psi_j\}_{j=1,2,\ldots}$ の元は，それぞれ Hecke 作用素の同時固有関数と仮定して良い：$T_n[\psi_j](z) = \lambda_j(n)\psi_j(z)$, $\lambda_j(n)$ を Hecke 固有値という．

Hecke 作用素の関係式から，Hecke 固有値の間にも次の関係式が成立：

$$\lambda_j(m)\lambda_j(n) = \sum_{d|(m,n)} \lambda_j(\frac{mn}{d^2}), \tag{8}$$

$$\lambda(p^{\mu+1}) = \lambda(p^{\mu})\lambda(p) - \lambda(p^{\mu-1}). \tag{9}$$

■Hecke 作用素の明示式　Maass waveform

$$\phi(z) = \sqrt{y}\sum_{n\neq 0} c(n)K_{iR}(2\pi|n|y)e(nx), \quad z \in H$$

への T_p（p は素数）の作用 (7) を係数で書き下すと，

$$T_p[\phi](z) = \sqrt{y}\sum_{n\neq 0} b(n)K_{iR}(2\pi|n|y)e(nx)$$

としたとき，

$$b(n) = c(pn) + \frac{1}{\sqrt{p}}c(\frac{n}{p}), \tag{10}$$

ただし $p \nmid n$ なら $c(\frac{n}{p}) = 0$ とする．

1.5 Maass waveform を計算する動機

$\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ についての，Hecke 固有 Maass wave cuspform（Hecke 作用素の同時固有関数となっている Maass wave cuspform）を計算することを目標とする．動機としては，次のような問についての例の構成・数値的な検証が挙げられる：

- Poincaré 級数，Eisenstein 級数，Maass による，実 2 次体の指標に伴うもの以外は具体例に乏しい．例えば H. Maass [Maa49], H. Cohen, [Coh88], [Coh95].
- Laplacian の最小固有値の評価に関する Selberg の予想 [Sel65],
- Maass waveform についての Ramanujan 型予想（$|c_p|) < 2$）Hejhal-Arno [HA93],
- Maass waveform についての Sato-Tate 型予想，同上，
- 固有値 $\frac{1}{4}$ の Hecke 固有 Maass waveform と 2 次元偶 Artin 表現の対応（ただしレベル $N > 1$）.

2 Maass waveform の計算法（Stark による反復法）

■Maass waveform の数値計算法　$\phi(z)$ を Hecke 固有 Maass wave cuspform とする．

$$\phi(z) = \sqrt{y}\sum_{n=1}^{\infty} c(n)K_{iR}(2\pi|n|y)e(nx) \tag{11}$$

の $c(n)$ を計算することを目標とする．今回は，Stark [Sta84] 他による先行計算例がある反復法を pari-gp で実装した結果について報告した．

■反復法のアイディア（Stark） $\phi(z)$ が正規化された（すなわち式 (11) で $c(1)=1$ である）Hecke 固有 Maass waveform と仮定する．するとすべての n について，

$$T_n[\phi](z) = c(n)\phi(z).$$

ここでポイントは，

$$\phi(z) = \sqrt{y}\sum_{n=1}^{\infty} c(n)K_{iR}(2\pi|n|y)e(nx)$$

の Bessel-K 関数が，y が大きいと非常に早く減衰することから，数値計算の際には上の和を N までで打ち切って良い，という点である．

■反復法 これらを組み合わせて，アルゴリズム 1 のような「反復法」による数値計算ができる．

アルゴリズム 1 反復法による Maass waveform の計算

Require: Laplacian の固有値 $\lambda = \frac{1}{4} + R^2$ の近似値．

$c_0 = (c_0(1), c_0(2), \ldots, c_0(N)) = (1.0, \ldots)$; 初期値を設定する．

$z = z_0$ を適切に選ぶ．

$\phi^{(N)}(z) = \sqrt{y}\sum_{n=1}^{N} c(n)K_{iR}(2\pi ny)\cos(nx)$ と書く（有限和）．

while c_n が安定するまで繰り返す： **do**

$c_{n+1} = (c_{n+1}(1), c_{n+1}(2), \ldots, c_{n+1}(N))$ を

$$c_{n+1}(m) = \frac{T_m[\phi]^{(N)}(z_0)}{\phi^{(N)}(z_0)}$$

で計算する．

end while

■反復法の改良 Hecke 作用素と Hecke 固有値の関係式（下記補題 2.1）から，僅かに改良したアルゴリズム 2 が考えられる．

補題 2.1 (係数の関係式)．

- $c(p^2) = c(p)^2 - 1$,
- $c(p^3) = c(p)^3 - 2c(p)$,
- $c(p^4) = c(p)^4 - 3c(p)^2 + 1$,
- $c(p^5) = c(p)^5 - 4c(p)^3 + 3c(p)$. （式 (9) から）．

命題 2.2. $T_p[\phi](z)$ の係数 $b(n)$ を計算するのに，

- $p \nmid n$ なら $b(n) = c(np) = c(n)c(p)$,
- $p \,||\, n$ なら $n = pn'$, $p \nmid n'$ として $b(n) = c(p^2n') + \frac{1}{\sqrt{p}}c_{n'} = (c(p^2) + \frac{1}{\sqrt{p}})c(n') = (c(p)^2 - 1 + \frac{1}{\sqrt{p}})c(n')$.
- $p^2 \,||\, n$ なら $n = p^2n'$, $p \nmid n'$ として $b(n) = c(pn) + \frac{1}{\sqrt{p}}c(pn') = (c(p)^3 + (\frac{1}{\sqrt{p}} - 2)c(p) + \frac{1}{\sqrt{p}})c(n')$.

アルゴリズム 2 反復法による Maass waveform の計算（Hecke 固有値の関係式を使う）

Require: Laplacian の固有値 $\lambda = \frac{1}{4} + R^2$ の近似値.

$c_0 = (c_0(1), c_0(2), \ldots, c_0(N)) = (1.0, \ldots)$; 初期値を設定する.

$z = z_0$ を適切に選ぶ.

$\phi^{(N)}(z) = \sqrt{y}\sum_{n=1}^{N} c(n)K_{iR}(2\pi ny)\cos(nx)$ と書く（有限和).

while c_n が安定するまで繰り返す： **do**

$c_{n+1} = (c_{n+1}(1), c_{n+1}(2), \ldots, c_{n+1}(N))$ の素数番目を

$$c_{n+1}(p) = \frac{T_p[\phi]^{(N)}(z_0)}{\phi^{(N)}(z_0)}$$

で計算する.

$c_{n+1}(p^r)$, $c_{n+1}(m)$ を Hecke 固有値の漸化式，関係式で計算する.

end while

■**今回の数値計算例** Stark の論文 [Sta84] にある，$R = 13.7797513519 * I$ の場合を，$N = 19$ として計算した．この場合に，$T_p[\phi](z)$ の各係数 $b(n)$, $1 \le n \le 19$ を $p = 2,3,5,7,11,13,17,19$ について $c(n)$, $1 \le n \le 19$ の式で表し，

$$c_p\text{の近似値} = \frac{T_p[\phi]^{(19)}(z)}{\phi^{(19)}(z)} = \frac{\sqrt{y}\sum_{n=1}^{19} b(n)K_{iR}(2\pi ny)\cos(2\pi nx)}{\sqrt{y}\sum_{n=1}^{19} c(n)K_{iR}(2\pi ny)\cos(2\pi nx)}$$

を $p = 2,3,\ldots,19$ について計算し，アルゴリズム 2 に従い c_n を計算した．

この Hecke 固有 Maass waveform は，LMFDB[*1]だと `http://www.lmfdb.org/ModularForm/GL2/Q/Maass/4cb8503a58bca91458000000` に相当するものと思われる．

実装に際しては，Hecke 固有 Maass waveform を係数を並べたベクトルとし，Hecke 作用素 T_p を作用させた Maass waveform の係数の計算を，補題 2.1 により実装する．例えば T_2 の作用はリスト 1 のようになる．考えている Maass waveform と，Hecke 作用素を作用させたものとそれぞれの関数値を計算し（リスト 2)，その比を計算する．

リスト 1　pari-gp で実装した T_2 の作用

```
T2(cs) =
{
  my(bs, rpinv);
  rpinv = 1/sqrt(2);
  bs = vector(#cs);
  bs[1] = 1.0;
  bs[2] = cs[2]^2-1 + rpinv;
  bs[3] = cs[2]*cs[3];
  bs[4] = cs[2]^3+rpinv*cs[2]^2-2*cs[2]-rpinv;
  bs[5] = cs[2]*cs[5];
```

*1 L-functions and Modular Forms Data Base

```
  bs[6] = (cs[2]^2-1+rpinv)*cs[3];
  bs[7] = cs[2]*cs[7];
  bs[8] = cs[2]^4 +(rpinv-3)*cs[2]^2 -rpinv+1;
  bs[9] = cs[2]*(cs[3]^2-1);
  bs[10]= (cs[2]^2-1+rpinv)*cs[5];
  bs[11]= cs[2]*cs[11];
  bs[12]= (cs[2]^3-2*cs[2]+rpinv)*cs[2]*cs[3];
  bs[13]= cs[2]*cs[13];
  bs[14]= (cs[2]^2-1+rpinv)*cs[7];
  bs[15]= cs[3]*cs[5];
  bs[16]= cs[2]^5-(4-rpinv)*cs[2]^3+(3-sqrt(2))*cs[2];
  bs[17]= cs[2]*cs[17];
  bs[18]= (cs[2]^2-1+rpinv)*(cs[3]^2-1);
  bs[19]= cs[2]*cs[19];
  return(bs);
}
```

リスト 2 Maass waveform の値

```
maassform(R, z, cs) =
{
  /*
   * cs are coeff's of the Maass form (cs[1]=1, ..., cs[19]).
   * R is the spectral parameter, z is the point at which the form is evaluated.
   */
  my(x, y);
  z = pingpong(z);
  x = real(z); y = imag(z);
  return(2*sqrt(y)*sum(n=1, #cs, exp((Pi/2)*(R/I))*cs[n]*besselk(R, 2*Pi*n*y)*cos(2*Pi*n*x)));
}
```

リスト 3 デモ用のドライバ関数

```
demo_generic(niter=10, R, z, cs) =
{
  my(cs1, cs2, cs3, cs4, cs5, cs6, cs7, cs8, cs9, cs10, cs11,
   cs12, cs13, cs14, cs15, cs16, cs17, cs18, cs19, cs20, cs21, cs22,
     cs23, cs24, cs25, cs26, cs27, cs28, cs29, cs30, cs31, maasval, csnew);

  csnew=vector(19); csnew[1]=1.0;
  csnew=cs;
  print("initial cs = ", cs);
  for(n=1, niter,
      /* update p-th coefficients */
      maasval = maassform(R, z, cs);
      /* csnew[2] = maassform(R, z, T2(cs))/maasval;*/
      csnew[2] = maassform(R, z, T6(cs))/maassform(R, z, T3(cs));
      /* csnew[3] = maassform(R, z, T3(cs))/maasval; */
```

```
        csnew[3] = maassform(R, z, T6(cs))/maassform(R, z, T2(cs));
        csnew[5] = maassform(R, z, T5(cs))/maasval;
        csnew[7] = maassform(R, z, T7(cs))/maasval;
        csnew[11] = maassform(R, z,T11(cs))/maasval;
        csnew[13] = maassform(R, z,T13(cs))/maasval;
        csnew[17] = maassform(R, z,T17(cs))/maasval;
        csnew[19] = maassform(R, z,T19(cs))/maasval;
   /* update coefficients */
       csnew[4]=csnew[2]^2-1;
       csnew[6]=csnew[2]*csnew[3];
       csnew[8]=csnew[2]^3-2*csnew[2];
       csnew[9]=csnew[3]^2-1;
       csnew[10]=csnew[2]*csnew[5];
       csnew[12]=csnew[4]*csnew[3];
       csnew[14]=csnew[2]*csnew[7];
       csnew[15]=csnew[3]*csnew[5];
       csnew[16]=csnew[2]^4-3*csnew[2]^2+1;
       csnew[18]=csnew[2]*csnew[9];

       cs=csnew;
       print(n, "-th iteration:");
       print("cs( 2) = ", cs[2]);
       print("cs( 3) = ", cs[3]);
       print("cs( 5) = ", cs[5]);
       print("");
   );
   return(cs);
}
```

リスト 4　Stark の例

```
demo_stark(niter=10, R=13.7797513518907*I, z = 0.1+1.005*I) =
{
  my(cs, cs1, cs2, cs3, cs4, cs5, cs6, cs7, cs8, cs9, cs10, cs11,
  cs12, cs13, cs14, cs15, cs16, cs17, cs18, cs19, cs20, cs21, cs22,
  cs23, cs24, cs25, cs26, cs27, cs28, cs29, cs30, cs31, csnew);

   /* initial values at prime-th coeff's. */
   cs1=1.0; cs2=1.549304; cs3=0.246899; cs5=0.737060;cs7=-0.261420;
   cs11=-0.953564; cs13=0.278827; cs17=1.307341; cs19=0.092558;

   /* initial values at composite-th coeff's. */
   cs4=cs2^2-1;
   cs6=cs2*cs3; cs8=cs2^3-2*cs2;
   cs9=cs3^2-1; cs10=cs2*cs5; cs12=cs4*cs3;
   cs14=cs2*cs7; cs15=cs3*cs5; cs16=cs2^4-3*cs2^2+1;
   cs18=cs2*cs9;
```

```
    cs = [cs1, cs2, cs3, cs4, cs5, cs6, cs7, cs8, cs9, cs10, cs11, cs12,
          cs13, cs14, cs15, cs16, cs17, cs18, cs19];

    csnew = demo_generic(niter, R, z, cs);
    print(" *** final output ***");
    printf("iteration = %d, R = %f*I, z = %f + %f*I\n", niter, imag(R), real(z), imag(z));
    print(csnew);
    return(csnew);
}
```

■demonstration　上の demo_stark() を，例えば niter= 30 等として呼び出せば，30 回の反復により Maass waveform の計算を近似計算する．結果は

リスト 5　計算例

```
(15:01) gp > demo_stark(30)
initial cs = [1.00000000000, 1.54930400000, 0.246899000000, 1.40034288442, 0.737
060000000, 0.382521608296, -0.261420000000, 0.620252832197, -0.939040883799, 1.1
4193000624, -0.953564000000, 0.345743257819, 0.278827000000, -0.405019051680, 0.
181979376940, -0.439382690481, 1.30734100000, -1.45485979743, 0.0925580000000]
1-th iteration:
cs( 2) = 1.05549447938 + 0.E-68*I
cs( 3) = 0.637292490241 + 0.E-68*I
cs( 5) = 0.891667093955 + 0.E-68*I

2-th iteration:
cs( 2) = 0.948054159276 + 0.E-68*I
cs( 3) = 0.907686201484 + 0.E-68*I
cs( 5) = 0.965314012332 + 0.E-68*I

3-th iteration:
cs( 2) = 0.898344007504 + 0.E-68*I
cs( 3) = 0.985058403260 + 0.E-68*I
cs( 5) = 0.989768800366 + 0.E-68*I
...(snip)...
 *** final output ***
iteration = 30, R = 13.7797513518907000000000000000000000*I, z = 0.10000000000
000000000000000000000000000 + 1.00500000000000000000000000000000000000*I
[1.00000000000000000000000000000000000, 0.86621859602545553736067221237010300 6
91 + 0.E-86*I, 1.00495164364058237620520360872611917 19 + 0.E-86*I, -0.2496653438
99688664333377956786790503 14 + 0.E-86*I, 1.00000052090803038280893355806298429 02
 + 0.E-86*I, 0.870507801827819178649177069860731981 36 + 0.E-86*I, 1.000000000001
1932466986212781046558902 + 0.E-86*I, -1.08248335969445638250594974305516754 20 +
 0.E-86*I, 0.00992780605590807229887272418239020414 24 + 0.E-86*I, 0.866219047245
6782739427630041764744700 0 + 0.E-86*I, 0.99999999999999999406987033174528909 5298
 + 0.E-86*I, -0.25090159771208336966165557721387352125 + 0.E-86*I, 0.999999999999
```

```
99997810849975064417281477 + 0.E−86∗I, 0.86621859602648914984066394576156082587
+ 0.E−86∗I, 1.0049521671279636949874642299714949935 + 0.E−86∗I, −0.6880018721557
6152790917300262360540599 + 0.E−86∗I, 1.0000000000000000093294612778997859927 +
0.E−86∗I, 0.0085996502233617055297616993011335912230 + 0.E−86∗I, 0.9999999999999
9997245422836217771920834 + 0.E−86∗I]
```

のようになる．計算結果が収束してはいるが，先行する計算例 Stark [Sta84][Table 1], Hejhal-Arno [HA93][Example 3] の $c(2) = 1.5493...$, $c(3) = 0.2468...$, $c(5) = 0.7370...$ と一致していない．

データは省くが，上のルーチンで計算してみると，Hecke 作用素の可換性が数値的に成立していないことが観察され，それが一つの原因であるかもしれない．

また，$c_2 = T_2[\phi](z)/\phi(z) = T_6[\phi](z)/T_3[\phi](z)$ が数値的に成立しないので，上掲の Hejhal-Arno 論文では，これらのうち最小のものをとる，といった戦略も検討している（同論文 §5 参照）．

3 まとめ

本稿では，Stark, Hejhal-Arno らの提案による，反復法による，全モジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ についての Hecke 固有 Maass waveform の展開係数の数値計算を試みたが，残念ながら先行する計算結果を再現できなかったことを報告した．更に全体的な再検討，実装の改良を試み，先行する計算結果の再現，更には計算範囲を広げることなどを目指したい．

参考文献

[Coh88] H. Cohen, *q-identities for Maass waveforms*, Invent. Math. **91** (1988), no. 3, 409–422. MR 928490 (89f:11072)

[Coh95] ———, *Corrigendum: "q-identities for Maass waveforms" [Invent. Math.* **91** *(1988), no. 3, 409–422; MR0928490 (89f:11072)]*, Invent. Math. **120** (1995), no. 3, 579–580. MR 1334485

[HA93] D. A. Hejhal and S. Arno, *On Fourier coefficients of Maass waveforms for* $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$, Math. Comp. **61** (1993), no. 203, 245–267, S11–S16. MR 1199991 (94a:11062)

[Maa49] Hans Maass, *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*, Math. Ann. **121** (1949), 141–183. MR 0031519 (11,163c)

[Sel65] Atle Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965, pp. 1–15. MR 0182610 (32 #93)

[Sta84] H. M. Stark, *Fourier coefficients of Maass waveforms*, Modular forms (Durham, 1983), Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., Horwood, Chichester, 1984, pp. 263–269. MR 803370 (87h:11128)

[本 99] 本橋洋一, リーマンゼータ函数と保型波動, 共立講座 21 世紀の数学, no. 21, 共立出版, 1999.