数理解析研究所講究録
第2013巻 2016年 152-156



# 軌道上の単数の一様有界性

日本大学理工学部　安福 悠

Yu Yasufuku[1]

Department of Mathematics, College of Science and Technology, Nihon University

**概要**

ある有理数 $P$ と有理関数 $\phi(z)\in\mathbb{Q}(z)$ が与えられたときに，軌道を $\{P,\phi(P),\phi(\phi(P)),\phi(\phi(\phi(P))),\ldots\}$ と定義する．本稿は，軌道上の単数点の一様有界性について調べた Krieger 氏らとの共同研究 [4] についての概説である．また，この問題の背景や今後の課題についても述べる．

力学系とは，ある関数 $\phi$ の反復合成について，解析的あるいは幾何学的に調べる分野である．重要な研究対象は，点 $P$ の $\phi$ による軌道

$$\mathcal{O}_\phi(P)=\{P,\phi(P),\phi(\phi(P)),\phi(\phi(\phi(P))),\ldots\}$$

である．数論的力学系という分野が始まったきっかけともなったのは，軌道上の整数点に関する次の Silverman の定理 [6] である．

**定理 1** (Silverman). $k$ を代数体，$S$ を素イデアルの有限集合とし，$R_S$ を $S$ 整数集合とする．また，$\phi\in k(z)$ を次数 $d\geq 2$ の有理関数とする．このとき，$\phi\circ\phi$ が多項式 (つまり $k[z]$ の元) でないならば，任意の $P\in k$ に対し $\mathcal{O}_\phi(P)\cap R_S$ は有限集合である．

有限だと分かると，次の自然な疑問は，「一様有界なのか」だと思うが，非常にくだらない事情により，次数 $d$ や $S$ を止めたままでも，$\mathcal{O}_\phi(P)\cap R_S$ に含まれる個数を任意に大きくすることができる．具体的には，0 の軌道が無限集合となるような，多項式ではない有理関数 $\psi(z)\in\mathbb{Q}(z)$ をまず一つ選ぶ．例えば，$\psi(z)=\frac{2z^d+100}{z+1}$ とでもしておけば，$0,\psi(0),\psi(\psi(0)),\ldots$ とどんどん大きい実数が出てくるので，軌道は無限集合となる．$\psi$ の $i$ 重合成を $\psi^{\circ i}$ と書くことにし，$\psi^{\circ i}(0)=\frac{a_i}{b_i}$ を既約分数表示とする．ここで，$n$ を任意の自然数として，$B_n=b_1\cdot b_2\cdots b_n$ とし，$\sigma_n(z)=B_nz$ とすれば，

$$\left(\sigma_n\circ\psi\circ\sigma_n^{-1}\right)^{\circ i}(0)=\sigma_n\circ\psi^{\circ i}\circ\sigma_n^{-1}(0)=B_n\psi^{\circ i}(0)\in\mathbb{Z},\quad i=1,\ldots,n$$

となり，$\mathcal{O}_{\sigma_n\circ\psi\circ\sigma_n^{-1}}(0)$ の最初の $n+1$ 点は全て整数となる．$\sigma_n\circ\psi\circ\sigma_n^{-1}$ は，次のように考えると，元々の有理関数 $\psi$ を $\mathbb{P}^1$ 上の別の座標で見ただけであり，本質的には同じ写像である：

$$\begin{tikzcd}\mathbb{P}^1 \arrow[r, shift left, "\sigma_n^{-1}"] & \mathbb{P}^1 \arrow[l, shift left, "\sigma_n"] \arrow[loop right, "\psi"]\end{tikzcd}$$

---

[1]e-mail: yasufuku@math.cst.nihon-u.ac.jp

本研究は科学研究費 (若手 (B) 23740033 ・ 15K17522) の助成を受けたものである．

つまり，1つの写像を違う座標で見るだけで，軌道上の整数点の個数を任意に増やすことができてしまう．

このような操作はしかし，「ズルい」わけで，$\sigma_n \circ \psi \circ \sigma_n^{-1}$ の分母と分子の終結式を計算すると，無駄に多くの数で割り切れるような整数が出てくる．具体例で見てみると分かりやすい．$p$ を素数とし，$\psi(z) = \frac{z^2+1}{z+p}$ を考える．この分母と分子の終結式は，$1+p^2$ である．$\psi(0) = \frac{1}{p}$ であるから，上の操作に従うと，$\sigma_1(z) = pz$ となる．すると，

$$\sigma_1 \circ \psi \circ \sigma_1^{-1} = p \cdot \frac{(\frac{1}{p}z)^2+1}{\frac{1}{p}z+p} = \frac{z^2+p^2}{z+p^2}$$

となり，この分母・分子の終結式は $p^2(1+p^2)$ となる．というわけで，終結式に「無駄がない」状態のときにどうなっているのかを考えるのが自然となる．今は $\infty$ に対しての整数点を考えているので，$\infty$ を固定するメビウス変換，つまり $\sigma(z) = az + b$ 型の座標変換を考えて，そのなかで一番終結式が小さくなるものを考慮することとなる．これは，「楕円曲線を minimal Weierstraß型で記述した時の整数点の個数に一様有界性があるのか」という Lang の問い [5, 140 ページ] の力学系版ととらえることもできる．記号の簡略化のため，次の予想の紹介は有理数上だけとする．有理関数 $\phi(z) \in \mathbb{Q}(z)$ の**既約表記**とは，$\phi$ の分母と分子を整数係数多項式で書き，また全ての係数たちを割り切るような素数がない状態のことを言うとする．また，$\phi$ の**終結式** $\mathrm{Res}(\phi)$ とは，$\phi$ を既約表記したときの分母と分子の終結式 $(\in \mathbb{Z})$ と定義する．最後に，$\phi$ が **minimal** であるとは，

$$|\mathrm{Res}(\phi)| = \min_{\substack{\sigma(z)=az+b \\ a\in\mathbb{Q}^*, b\in\mathbb{Q}}} |\mathrm{Res}(\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1})|$$

を満たすことと定義する．ここまでの準備で，次の予想を紹介できる．

**予想** (Silverman). 任意の自然数 $d \geq 2$ に対して，ある定数 $C(d)$ が存在し，任意の minimal な $d$ 次有理関数 $\phi \in \mathbb{Q}(z)$ と任意の点 $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ に対して，

$$|\mathcal{O}_\phi(P) \cap \mathbb{Z}| \leq C(d).$$

この問題に関しては，まだ何も知られていることがない．楕円曲線の場合も，部分的結果はあるものの未解決である．楕円曲線の場合と違って，有理関数の共役類に関しては，minimal 性の判定条件すら見つかっていないことも，問題を難しくしていると思われる．

次に，定理1の一様有界化を図る別の方法として，定理1のように軌道と $S$ 整数の共通部分を考える代わりに，より強い条件である軌道と $S$ **単数**の共通部分の一様有界性を考えるのも自然な問題となる．これに関し，ディオファントス幾何の重要な予想である Lang 予想を仮定して次の結果が得られた．

**定理 2** (Krieger–Levin–Scherr–Tucker–Yasufuku–Zieve [4]). $k$ を代数体，$S$ を素イデアルの有限集合とし，$R_S$ を $S$ 整数集合とする．ここで， Lang 予想を仮定すると，整数 $d \geq 2$ に対し，定数 $C = C(k, S, d)$ が存在し，$\beta z^{\pm d}$ の形ではない任意の $d$ 次有理関数 $\phi(z) \in k(z)$ と $P \in \mathbb{P}^1(k)$ に対し，$|\mathcal{O}_\phi(P) \cap R_S^*| \leq C$.

Lang 予想は,「$k$ 上定義された一般型代数多様体上の $k$ 有理点は Zariski 稠密ではない」と主張する．滑らかな曲線の場合，種数 2 以上であることと一般型であることが同値なので，曲線の場合の Lang 予想は，Mordell 予想 (Faltings の定理) である．つまり，Lang 予想は，Mordell 予想の高次元化とみることができ，2 次元版 (Bombieri–Lang 予想) も証明されていない．この予想は，より壮大な Vojta 予想 [7, Main Conjecture (Conjecture 3.4.3)] の特殊例としてみることもできる．

定理 2 の証明では，Lang 予想を直接使うわけではなく，Lang 予想を仮定して Faltings の定理の一様版を示した Caporaso–Harris–Mazur [2] の結果を適用する．[2] では，曲線のモジュライ空間のファイバー積における Lang 予想が成り立つと仮定することで,「$g \geq 2$ と代数体 $k$ を固定すると，ある定数 $C(g,k)$ が存在し，$k$ 上定義される任意の種数 $g$ の代数曲線には，$C(g,k)$ 個以下しか $k$ 有理点は含まれない」と証明されている．この結果が感覚的に強すぎる，と感じているディオファントス幾何の専門家がいるのも事実で，それゆえに Lang 予想を信じていない人もいる．Lang 予想は，代数多様体の canonical divisor の性質，つまり微分形式の最高次ウェッジ積の性質のみで記述できるので，多様体の次元が上がれば上がるほど，ウェッジ積をとる際により多くの情報が失われるはずで，低次元の時のみ Lang 予想を信じている人もいる．

定理 2 の証明では，$\phi^{\circ n}(P)$ が $S$ 単数ならば，($\phi^{\circ(n-1)}(P), \phi^{\circ n}(P)$ の $p$ 乗根) が，代数曲線 $y^p = \phi(x)$ 上の有理点となることを利用する．素数 $p$ を上手にとることで，この曲線の種数を 2 以上 $\frac{1}{2}(\frac{5}{2}d-1)(2d-2)$ 以下にしている．特に，$d=2$ の場合は，種数が 2 以上 4 以下の曲線となる．しかしながら，曲線のモジュライ空間そのものが一般型になるわけではないので，[2] で Lang 予想を適用するのもこの空間ではなく，この適切なファイバー積である．従って，モジュライ空間の次元までは制限できても，残念ながら，適用する Lang 予想の次元までは制限できない．より詳しく書くと，$X \longrightarrow B$ を曲線族 (特に $B$ がモジュライ空間，$X$ が universal family) とし $L$ を $X$ 上の ample divisor としたとき，$B$ の canonical divisor の pullback と $L^{\otimes m}$ のテンソル積が ample になるような $m$ を考え，$\underbrace{X \times_B \cdots \times_B X}_{m+1\text{ 個}}$ に Lang 予想が使われるので，$m$ が effective にならないと，いくら $\dim X = \dim B + 1$ が分かっても，必要となる Lang 予想の次元は分からない．ただ，定理 2 の証明で必要なのは，上述のような特別な形をした曲線における有理点の個数の一様上界なので，[2] での一般論よりは低い次元での Lang 予想の適用で事足りる可能性もあり得る．今後の研究課題としていきたい．

同じ論文 [4] では，次の特殊な場合で，$S$ 単数と軌道の共通部分の一様有界性を，予想を仮定せずに示した．

**定理 3.** $k$ を代数体，$S$ を素イデアルの有限集合とし，$R_S$ を $S$ 整数集合とする．このとき，整数 $d \geq 2$ に対し，定数 $C = C(k,S,d)$ が存在し，$(z-\beta)^d$ の形ではない任意の $d$ 次モニック多項式 $\phi(z) \in k[z]$ と $P \in \mathbb{P}^1(k)$ に対し，$|\mathcal{O}_\phi(P) \cap R_S^*| \leq C$.

この定理の証明は次のように行う．$\phi$ が $(z-\beta)^d$ でないことから，$\phi(z) = 0$ に少なくとも 2 つの相異なる根が存在することになり，それらを使うと，$\phi^{\circ n}(P)$ が単数になるごとに，ある一つの固定された単数方程式の解を構築できる．このような解の個数の上界は分

かっているので，証明が終わる．

上記 2 定理ともに，$k$ や $S$ を固定しないでもよいことを付記する．$S$ にアルキメデス付値たちを全て含めることにすると，$|S|$ さえ有界であれば，同じ主張が成り立つ．なぜならば，$[k:\mathbb{Q}] \leq 2|S|$ より $k$ の拡大次数が有界となり，単数方程式の解の個数の bound は単数群のランクにだけよるもので書き表すことが出来る [3] からである．

定理 3 以外にも，[4] の Corollary 1.9 や Section 4 で，単数と軌道の共通部分の一様有界性を無条件で証明できる族を挙げている．ただ，これらは非アルキメデス力学系の結果であり，あまり代数体に関しての結果としてみることはできない．非アルキメデス力学系との関連としては，例えば，bad reduction の個数による関数で代数体上の前周期点の個数を bound した Benedetto の結果 [1] などもあるので，軌道と単数との共通部分に関してもそのような関連があるのかを調べるのは有益だと思っている．

最後に，上記 2 定理では，実は「軌道」という情報をフルに活用していないことを述べる．数論的力学系の全般的問題なのであるが，軌道という情報を上手に使うのは難しく，多くの場合で使っているのが次の 3 パターンである：

(1) $\phi(k)$ の部分集合，つまり $k$ 有理点の $\phi$ による像の部分集合

(2) $k$ の部分集合で，(一つの元を除いて)$k$ 内に $\phi$ による逆像がある

(3) $k$ の可算部分集合で，元の対数的高さが指数関数的に増加するもの．

たしかに，$\mathcal{O}_\phi(P)$ はどの条件も満たしているが，実際に軌道である場合は，これらよりもはるかに強い条件である．今回紹介した結果では実は (1) の条件しか本質的に使っておらず，従って，上記 2 定理における $\mathcal{O}_\phi(P)$ は $\phi(k)$ に置き換える事ができる．「軌道である」ということのより的確な利用方法を開発できれば，数論的力学系が一気に進展すると個人的には思っている．

**謝辞．** 本稿は 2014 年 10 月に京都大学数理解析研究所で行われた研究集会 「Analytic Number Theory – Distribution and Approximation of Arithmetic Objects」における筆者の講演が基になっている．講演と本稿執筆の機会を与えて頂いた，研究代表者の群馬大学名越弘文氏に感謝致します．

## 参考文献

[1] Robert L. Benedetto, *Preperiodic points of polynomials over global fields*, J. Reine Angew. Math. **608** (2007), 123–153.

[2] Lucia Caporaso, Joe Harris, and Barry Mazur, *Uniformity of rational points*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 1, 1–35.

[3] J.-H. Evertse, *On equations in S-units and the Thue-Mahler equation*, Invent. Math. **75** (1984), no. 3, 561–584.

[4] Holly Krieger, Aaron Levin, Zachary Scherr, Thomas Tucker, Yu Yasufuku, and Michael E. Zieve, *Uniform boundedness of $S$-units in arithmetic dynamics*, Pacific J. Math. **274** (2015), no. 1, 97–106.

[5] Serge Lang, *Elliptic curves: Diophantine analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 231, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[6] Joseph H. Silverman, *Integer points, Diophantine approximation, and iteration of rational maps*, Duke Math. J. **71** (1993), no. 3, 793–829.

[7] Paul Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1239, Springer-Verlag, Berlin, 1987.