

Diophantine exponents for formal power series over a finite field

筑波大学数理物質科学研究科数学専攻 大音 智弘*

Tomohiro Ooto

Graduate School of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1 はじめに

p を素数とし, $q = p^s$ とおく. ただし, s は正の整数. 位数 q の有限体を \mathbb{F}_q , \mathbb{F}_q 係数の多項式環を $\mathbb{F}_q[T]$, \mathbb{F}_q 係数の有理関数体を $\mathbb{F}_q(T)$, \mathbb{F}_q 係数のローラン級数体を $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ で表す. 任意の $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1})) \setminus \{0\}$ は次の形で書ける:

$$\xi = \sum_{n=N}^{\infty} a_n T^{-n},$$

ただし, $a_n \in \mathbb{F}_q, N \in \mathbb{Z}, a_N \neq 0$. このとき, $|\xi| := q^{-N}, |0| := 0$ で $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ 上に絶対値を定める. この絶対値は, $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{F}_q((T^{-1}))}$ に一意的に延長できることが知られており, それもまた $|\cdot|$ とかく.

本論文では, $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ 上のディオファントス近似について得られた結果およびその証明の概略を紹介する. 2節では主定理およびその系を紹介する. また, それらの結果に関する未解決問題をいくつか提示する. 3節では, 主定理のおおまかな証明を試みる.

ディオファントス近似では, 与えられた数を簡単な数でどのくらい近似できるかについて主に研究が行われている. どのくらい近似できるかを議論するために, $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ に対して, 無理数度 $\mu(\xi)$ を次で定める:

$$\mu(\xi) := \sup \left\{ w \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} 0 < |\xi - r/s| \leq |s|^{-w} \\ \text{for infinitely many } (r, s) \in (\mathbb{F}_q[T] \setminus \{0\})^2 \end{array} \right\}.$$

大まかに言うと, この無理数度は ξ がどのくらい $\mathbb{F}_q(T)$ の元で近似できるかを測る関数となっている. 例えば, $\xi \in \mathbb{F}_q(T)$ のとき, $\mu(\xi) = 1$, そうでないとき $\mu(\xi) \geq 2$ となることが知られており, 近似したい対象の代数的な性質によって無理数度の値が変化する. また, 実数のディオファントス近似における Liouville の定理の類似が成立する.

定理 1.1 (Mahler [12]). $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ を $\mathbb{F}_q(T)$ 上代数的数とする. このとき,

$$\mu(\xi) \leq \deg \xi.$$

*e-mail: ooto@math.tsukuba.ac.jp

しかし, Liouville の定理の拡張である Roth の定理について, その類似は成立しない. つまり, $\mu(\xi) > 2$ となる代数的数 $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ が存在する. 例えば, t を正の整数, $r = p^t$ とし, $\xi := \sum_{n=0}^{\infty} T^{-r^n} \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ とおく. このとき, ξ は r 次の代数的数で $\mu(\xi) = r$ となる ([12]).

一般の代数的数の無理数度を計算することは難しいが, 代数的数のときに無理数度がどのような値をとるかについての研究が行われている.

定理 1.2 (Chen [9]). 正の整数 k と有理数 $2 < w \leq p^k + 1$ とに対して, 次を満たす代数的数 $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ が存在する:

$$\mu(\xi) = w, \quad \deg \xi = p^k + 1.$$

このような結果から, 無理数度 μ の代数的数での値域は $\mathbb{Q}_{\geq 2} \cup \{1\}$ であることが期待されているが, 解決には至っていない.

無理数度 μ は $\mathbb{F}_q(T)$ での最良近似を定式化したものだが, 一般の代数的数や多項式での最良近似を定式化する. 多項式 $P(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in (\mathbb{F}_q[T])[X]$ に対して, $H(P) := \max_{0 \leq n \leq d} |a_n|$ を P の高さおよび, 代数的数 $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ に対して, X に関して既約かつ原始的な多項式 $P_\alpha(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in (\mathbb{F}_q[T])[X]$ で, a_d は T に関するモニック多項式かつ $P_\alpha(\alpha) = 0$ となるのが一意に存在する. このような $P_\alpha(X)$ を α の最小多項式とよび, $H(\alpha) := H(P_\alpha)$ を α の高さおよび,

整数 $n \geq 1$ と $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ に対して,

$$w_n(\xi) := \sup \left\{ w \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} 0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}, \quad \deg_X P \leq n \\ \text{for infinitely many } P(X) \in (\mathbb{F}_q[T])[X] \end{array} \right\},$$

$$w_n^*(\xi) := \sup \left\{ w \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} 0 < |\xi - \alpha| \leq H(\alpha)^{-w-1}, \quad \deg \alpha \leq n \\ \text{for infinitely many } \alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)} \end{array} \right\}.$$

これらの関数 w_n, w_n^* は Diophantine exponent とよばれ, それぞれ n 次以下の多項式 (resp. 代数的数) でどのくらい良く近似できるかを測る関数となっている. 簡単な議論から, 任意の $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ に対して,

$$\mu(\xi) - 1 = w_1(\xi) = w_1^*(\xi)$$

となるので, Diophantine exponent w_n, w_n^* は無理数度 μ の一般化となっている. この Diophantine exponent は, 実数や p 進数の場合にも高さを用いて定義されている (詳しくは, [3, Section 3 and 9] を参照). しかし, 有限体係数のローラン級数の Diophantine exponent は実数と比べ分かっていることが少なく未解決な部分が多い.

2 主定理

この節では, 得られた定理およびその系を紹介する. また, 結果に関連した未解決問題をいくつか提示する.

定理 2.1. $d \geq 1$ を整数, $w \geq 2d - 1$ を実数とする. このとき, 次を満たす非可算無限個の $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ が存在する:

$$w_1(\xi) = w_1^*(\xi) = \dots = w_d(\xi) = w_d^*(\xi) = w.$$

この定理の実数と p 進数の類似は既に知られている ([4, 5]). また定理 2.1 の $d = 1$ のときは、前から知られている ([11]). $\xi := \sum_{n=1}^{\infty} T^{-n!}$ とおくと、簡単な計算で $w_1^*(\xi) = +\infty$ となることがわかる. また定義から、任意の $\eta \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ に対して、数列 $(w_n(\eta))_{n \geq 1}, (w_n^*(\eta))_{n \geq 1}$ は単調増加となることがわかるので、任意の $n \geq 1$ に対して、 $w_n(\xi) = w_n^*(\xi) = +\infty$ となる. 従って、定理 2.1 と合わせて次の系を得る.

系 2.2. $d \geq 1$ を整数とする. このとき、Diophantine exponent w_d および w_d^* の値域は $[2d-1, +\infty]$ を含む.

この系に関する問題として次があげられる.

問題 2.3. $d \geq 1$ を整数とする. このとき、Diophantine exponent w_d および w_d^* の値域を決定せよ.

問題 2.3 の実数と p 進数の類似は、 w_d のときは解決しており、その値域は $[d, +\infty] \cup \{0, 1, \dots, d-1\}$ となる ([3, Theorem 3.1, 3.8, 5.8, 9.4, 9.6, and Proposition 3.1, 9.1]). しかし、 w_d^* での類似はまだ未解決である (部分的な結果については [3, Theorem 3.4, 3.5, 5.4, 9.4, 9.6, and Proposition 9.3] を参照). $\xi \in \mathbb{F}_q(T)$ のとき $w_1(\xi) = 0$, そうでないとき $w_1(\xi) \geq 1$ となり、また $w_1 = w_1^*$ となることから、系 2.2 と合わせて w_1, w_1^* の値域は $[1, +\infty] \cup \{0\}$ であることがわかる. 従って、 $d = 1$ のとき問題 2.3 は解決済み.

定理 2.1 を代数的数に制限して考えたとき、次のような結果が得られた.

定理 2.4. $d \geq 1$ を整数、 $w > 2d - 1$ を有理数とする. このとき、狭義単調増加な正の整数列 $(k_n)_{n \geq 1}$ と数列 $(\xi_n)_{n \geq 1}$ で $\xi_n \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ が代数的数となるものが存在して、任意の $n \geq 1$ に対して次を満たす:

$$w_1(\xi_n) = w_1^*(\xi_n) = \dots = w_d(\xi_n) = w_d^*(\xi_n) = w, \quad \deg \xi_n = p^{k_n} + 1.$$

定理 2.4 は、定理 1.2 を一部を拡張したものとなっている. また、定理 2.4 から系 2.2 のように w_d, w_d^* の代数的数での値域について次のことが得られる.

系 2.5. $d \geq 1$ を整数とする. このとき、Diophantine exponent w_d および w_d^* の代数的数に制限したときの値域は、 $\mathbb{Q} \cap [2d-1, +\infty)$ を含む.

この系に関する問題として次があげられる.

問題 2.6. $d \geq 1$ を整数とする. このとき、Diophantine exponent w_d および w_d^* の代数的数に制限したときの値域を決定せよ.

この問題は $d = 1$ のときでさえわかっていない. $\xi \in \mathbb{F}_q(T)$ のとき $w_1(\xi) = w_1^*(\xi) = 0$ となるので、 w_1 および w_1^* の代数的数での値域は $(\mathbb{Q} \cap [1, +\infty)) \cup \{0\}$ を含むが、一致するかは知られていない. 実数や p 進数での w_d, w_d^* の代数的数での値域は、 $\{0, 1, \dots, d\}$ であることが知られており ([3, Theorem 3.1, 3.5, 9.4]), $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ の場合とは様子が異なっている.

定理 2.4 では、いくらかでも次数の大きい代数的数を構成していることから、次が得られる.

系 2.7. $d \geq 1$ を整数、 $w > 2d - 1$ を有理数とする. このとき、 $\mathbb{F}_q(T)$ 上線型独立な代数的数の集合 $\{\xi_n \in \mathbb{F}_q((T^{-1})) \mid n \geq 1\}$ が存在して、任意の $n \geq 1$ に対して次を満たす:

$$w_1(\xi_n) = w_1^*(\xi_n) = \dots = w_d(\xi_n) = w_d^*(\xi_n) = w.$$

次に、 $d \geq 2$ のとき $w_d(\xi) \neq w_d^*(\xi)$ となる $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ を構成する。そのために、連分数の理論を用いる。 $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1})) \setminus \mathbb{F}_q(T)$ に対して、次を満たす $a_0 \in \mathbb{F}_q[T], a_1, a_2, \dots \in \mathbb{F}_q[T] \setminus \mathbb{F}_q$ が一意的に存在する:

$$\xi = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad (1)$$

(1) を ξ の連分数展開といい、 $\xi = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ と略記する。この ξ に対して、 p_n, q_n を次で定める:

$$\begin{cases} p_{-1} = 1, p_0 = a_0, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, n \geq 1, \\ q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, n \geq 1. \end{cases}$$

$(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ は ξ の convergent sequence とよばれ、 n に関する帰納法から $p_n/q_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ となることがわかる。

このとき、連分数を用いることで次の2つの結果が得られた。

定理 2.8. $d \geq 2$ を整数とし、 $w \geq (3d + 2 + \sqrt{9d^2 + 4d + 4})/2$ を実数とする。 $b, c \in \mathbb{F}_q[T]$ を相異なる多項式とする。数列 $(a_{n,w})_{n \geq 1}$ を次で定める:

$$a_{n,w} = \begin{cases} c & \text{整数 } i \geq 0 \text{ が存在して } n = [w^i] \text{ となるとき,} \\ b & \text{その他.} \end{cases}$$

$\xi_w := [0, a_{1,w}, a_{2,w}, \dots]$ とおく。このとき、任意の $2 \leq n \leq d$ に対して、

$$w_n^*(\xi_w) = w - 1, \quad w_n(\xi_w) = w.$$

定理 2.9. $d \geq 2$ を整数とし、 $w \geq 121d^2$ を実数とする。 $b, c, d \in \mathbb{F}_q[T]$ を相異なる多項式とする。 $0 < \eta < \sqrt{w}/d$ を実数とし、 $i \geq 1$ に対して、 $m_i := [([w^{i+1}] - [w^i - 1])/[\eta w^i]]$ とおく。数列 $(a_{n,w,\eta})_{n \geq 1}$ を次で定める:

$$a_{n,w,\eta} = \begin{cases} c & \text{整数 } i \geq 0 \text{ が存在して } n = [w^i] \text{ となるとき,} \\ d & \text{任意の整数 } i \geq 0 \text{ に対して, } n \neq [w^i] \text{ で, ある整数 } 1 \leq m \leq m_j, j \geq 1 \text{ が存在して } n = [w^j] + m[\eta w^j] \text{ となるとき,} \\ b & \text{その他.} \end{cases}$$

$\xi_{w,\eta} := [0, a_{1,w,\eta}, a_{2,w,\eta}, \dots]$ とおく。このとき、任意の $2 \leq n \leq d$ に対して、

$$w_n^*(\xi_{w,\eta}) = \frac{2w - 2 - \eta}{2 + \eta}, \quad w_n(\xi_{w,\eta}) = \frac{2w - \eta}{2 + \eta}.$$

従って、任意の $2 \leq n \leq d$ に対して、

$$w_n(\xi_{w,\eta}) - w_n^*(\xi_{w,\eta}) = \frac{2}{2 + \eta}.$$

定理 2.8, 2.9 は $d=2$ のとき知られており ([13]), 今回の結果はその拡張にあたる. これらの定理によって, $d \geq 3$ のとき $w_d(\xi) \neq w_d^*(\xi)$ となる $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ の具体例を初めて与えることができた. また, $d=2$ のとき定理 2.8, 2.9 の実数および p 進数類似が成立することが知られている ([7, 8]).

上記の結果から, w_d と w_d^* が異なる値を取りうることがわかった. 一方, 関数 w_d と w_d^* がどのくらい異なりうるかについては次の命題がある.

命題 2.10 ([13]). $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ とし, $n \geq 1$ を整数とする. 整数 $k \geq 0$ を $p^k \leq n < p^{k+1}$ となるように定める. このとき,

$$\frac{w_n(\xi)}{p^k} - n + \frac{2}{p^k} - 1 \leq w_n^*(\xi) \leq w_n(\xi).$$

さらに, $1 \leq n < 2p$ ならば,

$$w_n(\xi) - n + 1 \leq w_n^*(\xi) \leq w_n(\xi).$$

この命題の証明は [13] にあるので証明の概略は省略する.

定理 2.1, 2.8, 2.9, 2.10 を合わせることで次の系が得られる.

系 2.11. $d \geq 2$ を整数とし, $0 \leq \delta \leq 1$ を実数とする. このとき, 次を満たす $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ が非可算無限個存在する: 任意の $2 \leq n \leq d$ に対して,

$$w_n(\xi) - w_n^*(\xi) = \delta.$$

従って, 関数 $w_d - w_d^*$ の値域は閉区間 $[0, 1]$ を含む. 特に, 関数 $w_2 - w_2^*$ の値域は閉区間 $[0, 1]$ と一致する.

この系と定理 2.10 に関する問題として次があげられる.

問題 2.12. $d \geq 1$ を整数とする. このとき, $w_d - w_d^*$ の値域を決定せよ.

この問題は, 実数と p 進数でも研究されており, とともに $d=2$ のときは解決されている ([7, 8]). $d \geq 3$ のときは, 部分的にしか解決されていない ([2, 6, 14]).

3 主定理の証明の概略

この節では, 2 節で述べた定理の証明の概略を述べる.

Sketch proof of Theorem 2.1. まずは, 次の補題を用意する.

補題 3.1. $d \geq 1$ を整数とし, $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ とする. θ, ρ, δ を正の実数とする. 次を満たす数列 $(p_j/q_j)_{j \geq 1}$ が存在すると仮定する: 任意の $j \geq 1$ に対して, $p_j, q_j \in \mathbb{F}_q[T], q_j \neq 0, (p_j, q_j) = 1$ で, $(|q_j|)_{j \geq 1}$ は単調増加で発散し,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |q_{j+1}|}{\log |q_j|} \leq \theta,$$

$$d + \delta \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{-\log |\xi - p_j/q_j|}{\log |q_j|}, \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{-\log |\xi - p_j/q_j|}{\log |q_j|} \leq d + \rho.$$

このとき, 任意の $1 \leq n \leq d$ に対して,

$$d - 1 + \delta \leq w_n^*(\xi) \leq w_n(\xi) \leq \max \left(d - 1 + \rho, \frac{d\theta}{\delta} \right).$$

大雑把に言うと、この補題は ξ がよい有理近似をもてば w_n, w_n^* の値をコントロールできるということを示している。証明には、三角不等式や $a \in \mathbb{F}_q[T] \setminus \{0\}$ に対して $|a| \geq 1$ が成立することくらいしか用いられていない。 $d=1$ のとき、実数および有限体係数のローラン級数に対して、この補題はすでに知られている ([1, 10])。 $d \geq 2$ のとき、これの実数の類似が明確に述べてある文献はないが、ほとんど同じ議論をしている文献は存在する ([4])。

連分数の convergent sequence はある意味で最良の有理近似となることが知られているので、補題 3.1 と合わせて次を示すことができる。

命題 3.2. $d \geq 1$ を整数、 $\xi = [a_0, a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ とする。 $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ を ξ の convergent sequence とする。このとき、

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\deg q_{n+1}}{\deg q_n} \geq 2d - 1$$

ならば、

$$w_1(\xi) = w_1^*(\xi) = \dots = w_d(\xi) = w_d^*(\xi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\deg q_{n+1}}{\deg q_n}.$$

命題 3.2 の $d=1$ のときはよく知られている結果 ([11]) であり、この命題はその拡張となる。

ここで、 $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ を $\{0, 1\}$ に値を持つ数列とする。このとき、数列 $(a_n)_{n \geq 0}, (P_n)_{n \geq -1}, (Q_n)_{n \geq -1}$ を

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = T + \varepsilon_1, a_n = T^{(w-1)\deg Q_{n-1}} + \varepsilon_n, n \geq 2, \\ P_{-1} = 1, P_0 = 0, P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, n \geq 1, \\ Q_{-1} = 0, Q_0 = 1, Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}, n \geq 1, \end{cases}$$

で定め、 $\xi_w := [0, a_1, a_2, \dots]$ とおく。このとき、連分数の一般論を用いて convergent sequence を計算すると、命題 3.2 から、

$$w_1(\xi_w) = w_1^*(\xi_w) = \dots = w_d(\xi) = w_d^*(\xi_w) = w$$

となることがわかる。 □

Sketch proof of Theorem 2.4. 定理 2.1 の証明と同様に命題 3.2 を用いて証明する。そのために、convergent sequence の計算がしやすい代数的数の族を用意する。

定理 3.3. ([15]) $k, s \geq 1$ を整数、 $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{F}_q[T] \setminus \mathbb{F}_q$ とし、

$$\xi := [a_1, \dots, a_s, a_1^p, \dots, a_s^p, a_1^{p^2}, \dots] \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$$

とおく。 $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ を ξ の convergent sequence とし、 $d_i := \deg a_i$ とおき、

$$r_i := \frac{d_i}{p^k (\sum_{j=1}^{i-1} d_j) + \sum_{j=i}^s d_j}$$

とおく。このとき、 ξ は次数 $p^k + 1$ 以下の代数的数で

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\deg q_{n+1}}{\deg q_n} &= 1 + (p^k - 1) \max\{r_1, \dots, r_s\}, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\deg q_{n+1}}{\deg q_n} &= 1 + (p^k - 1) \min\{r_1, \dots, r_s\}. \end{aligned}$$

定理 3.3 のパラメーター s, d_1, \dots, d_s をうまく決めることで、上極限が w で下極限が $2d-1$ 以上になる代数的数 ξ を構成できる。この代数的数の次数に関しては、 $(d_s, p) = 1$ となるように取ってくる。すると、Newton polygon の理論を用いて、 ξ を根に持つ多項式

$$q_{s-1}X^{p^k+1} - p_{s-1}X^{p^k} + q_{s-2}X - p_{s-2}$$

が既約多項式であることが示せる。ただし、 $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ は ξ の convergent sequence とする。したがって、 $\deg \xi = p^k + 1$ となる。あとは、 $k_n < k_{n+1}$ となるようにうまく数列 $(k_n)_{n \geq 1}$ を構成すれば証明が完了する。□

Sketch proof of Theorem 2.8 and 2.9. まず、Liouville 不等式とよばれるものを用意する。

補題 3.4 ([13]). $P(X) \in (\mathbb{F}_q[T])[X]$ を次数 $m \geq 1$ の多項式とし、 $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ を次数 n の代数的数とする。このとき、

$$P(\alpha) = 0 \quad \text{or} \quad |P(\alpha)| \geq H(P)^{-n+1} H(\alpha)^{-m}.$$

補題 3.5 ([13]). $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ をそれぞれ次数 m, n の代数的数とする。このとき、

$$\alpha = \beta \quad \text{or} \quad |\alpha - \beta| \geq H(\alpha)^{-n} H(\beta)^{-m}.$$

これらの補題と三角不等式を用いることで、次の補題が証明される。この補題が、定理 2.8, 2.9 の証明において本質的な役割を果たす。

補題 3.6. $d \geq 2$ を整数とし、 $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ とする。 $\theta, \delta, \varepsilon$ を正の実数とする。次を満たす数列 $(\alpha_j)_{j \geq 1}$ が存在すると仮定する： $\alpha_j \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ は 2 次の代数的数で $(H(\alpha_j))_{j \geq 1}$ は単調増加で発散し、

$$\begin{aligned} \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log H(\alpha_{j+1})}{\log H(\alpha_j)} &\leq \theta, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\log |\xi - \alpha_j|}{\log H(\alpha_j)} &= d + \delta, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\log |\alpha_j - \alpha'_j|}{\log H(\alpha_j)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

このとき、 $2d\theta \leq (d-2+\delta)\delta$ ならば、任意の $2 \leq n \leq d$ に対して、

$$w_n^*(\xi) = d-1+\delta, \quad w_n(\xi) = d-1+\delta+\varepsilon.$$

これは、大まかに言うと ξ がよい 2 次の代数的数での近似をもてば w_n, w_n^* の値をコントロールできることを意味している。 $d=2$ のとき補題 3.6 の実数、 p 進数および有限体係数のローラン級数類似は知られている ([7, 8, 13])。

ここで $j \geq 1$ に対して、

$$\xi_{w,j} := [0, a_{1,w}, \dots, a_{[w^j],w}, \bar{b}]$$

とおく。連分数の一般論を用いることで、 $\xi_{w,j}$ は 2 次の代数的数で $(H(\xi_{w,j}))_{j \geq 1}$ は単調増加で発散し、

$$\begin{aligned} \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log H(\xi_{w,j+1})}{\log H(\xi_{w,j})} &\leq w, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\log |\xi_w - \xi_{w,j}|}{\log H(\xi_{w,j})} &= w, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\log |\xi_{w,j} - \xi'_{w,j}|}{\log H(\xi_{w,j})} = 1 \end{aligned}$$

となることがわかる。従って、補題 3.6 を用いることで、任意の $2 \leq n \leq d$ に対して、

$$w_n^*(\xi_w) = w-1, \quad w_n(\xi) = w$$

が得られる。

定理 2.9 の証明も、定理 2.8 の証明と同じ方針で示すことができる。□

参考文献

- [1] B. Adamczewski, J. Cassaigne, *Diophantine properties of real numbers generated by finite automata*, Compos. Math. **142** (2006), no. 6, 1351-1372.
- [2] Y. Bugeaud, *Mahler's classification of numbers compared with Koksma's. III*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), no. 3-4, 305-316.
- [3] Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, 160 Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [4] Y. Bugeaud, *On simultaneous rational approximation to a real number and its integral powers*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **60** (2010), no. 6, 2165-2182.
- [5] Y. Bugeaud, N. Budarina, D. Dickinson, H. O'Donnell, *On simultaneous rational approximation to a p -adic number and its integral powers*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **54** (2011), no. 3, 599-612.
- [6] Y. Bugeaud, A. Dujella, *Root separation for irreducible integer polynomials*, Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), no. 6, 1239-1244.
- [7] Y. Bugeaud, *Continued fractions with low complexity: transcendence measures and quadratic approximation*, Compos. Math. **148** (2012), no. 3, 718-750.
- [8] Y. Bugeaud, T. Pejković, *Quadratic approximation in \mathbb{Q}_p* , Int. J. Number Theory **11** (2015), no. 1, 193-209.
- [9] H-J. Chen, *Distribution of Diophantine approximation exponents for algebraic quantities in finite characteristic*, J. Number Theory **133** (2013), no. 11, 3620-3644.
- [10] A. Firicel, *Rational approximations to algebraic Laurent series with coefficients in a finite field*, Acta Arith. **157** (2013), no. 4, 297-322.
- [11] A. Lasjaunias, *A survey of Diophantine approximation in fields of power series*, Monatsh. Math. **130** (2000), no. 3, 211-229.
- [12] K. Mahler, *On a theorem of Liouville in fields of positive characteristic*, Canadian J. Math. **1**, (1949), 397-400.
- [13] T. Ooto, *Quadratic approximation in $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$* , Preprint arXiv:1512.04041.
- [14] T. Pejković, *Polynomial root separation and applications*, PhD Thesis, Université de Strasbourg and University of Zagreb, Strasbourg, 2012.
- [15] D. S. Thakur, *Diophantine approximation exponents and continued fractions for algebraic power series*, J. Number Theory **79** (1999), no. 2, 284-291.