数理解析研究所講究録
第2014巻 2017年 111-123

Diophantus の 3 組の 4 組への拡張可能性
Extendabilities of a Diophantine triple to quadruples *

日本大学 生産工学部　藤田 育嗣 (Yasutsugu Fujita)
College of Industrial Technology, Nihon University
群馬大学大学院 理工学府　宮崎 隆史 (Takafumi Miyazaki)
Faculty of Science and Technology, Gunma University

1 背景と主定理

Diophantus は次の問題を提起した:

> 各 2 数の積に 1 加えたもの a_ia_j+1 $(1 \leq i < j \leq 4)$ が平方数となるような 4 組 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ を見つけよ.

Diophantus は，上記を満たす 3 組として $\{a_1, a_2, a_3\} = \{x, x+2, 4x+4\}$ をとり，a_1a_4+1 が平方数となるように，$a_4 = 9x+6$ ととった．このとき $a_3a_4+1 = (6x+5)^2$ なので，後は $a_2a_4+1 = (3x+4)^2-3$ が平方数となればよい．$x = 1/16$ ととることにより，条件を満たす 4 組 $\{1/16, 33/16, 17/4, 105/16\}$ を得た.

Fermat は，3 組 $\{1, 3, 8\}$ (上の 3 組において $x = 1$ としたもの) から出発し，$d+1$，$3d+1$，$8d+1$ がいずれも平方数となるように $d = x^2-1$ とおき連立 Pell 方程式 $3x^2-2 = y^2$，$8x^2-7 = z^2$ の解 $x = 11$ から $d = 120$，従って求める 4 組 $\{1, 3, 8, 120\}$ を得た．[*1]

定義 1.1. m 個の相異なる正整数の集合 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ が **Diophantus の m 組** (*Diophantine m-tuples*) であるとは, 各 $1 \leq i < j \leq m$ に対し a_ia_j+1 が平方数であるときにいう.

Euler は，任意の Diophantus の 2 組 $\{a, b\}$ $(r := \sqrt{ab+1})$ は Diophantus の 4 組に拡張できることを示した:

$$\{a, b, a+b+2r, 4r(a+r)(b+r)\}.$$

Euler の 4 組において $a = 1$，$b = 3$ とおくと，Fermat の 4 組 $\{1, 3, 8, 120\}$ が得られる. Euler の 4 組に含まれる 3 組 $\{a, b, a+b+2r\}$ は **正則な Diophantus の 3 組** (*regular Diophantine triple*) とよばれ，この最大元 $c = a+b+2r$ は，固定された $\{a, b\}$ $(a < b)$ に

*本研究は，科研費 (25400025) および特別研究員奨励費 (No.25484) の助成を受けたものである.

[*1] 以上の解説は [11, p. 517] にある.

対し $\{a,b,c\}$ $(b<c)$ が Diophantus の 3 組であるような最小の整数であることは次のようにして分かる.

$ac+1=s^2$, $bc+1=t^2$ から得られる Pell 方程式 $at^2-bs^2=a-b$ の正の解は

$$t\sqrt{a}+s\sqrt{b}=\left(t_0\sqrt{a}+s_0\sqrt{b}\right)\left(r+\sqrt{ab}\right)^{\nu}$$

((t_0,s_0) は $at^2-bs^2=a-b$ の解で, $s_0\geq 0, \nu\geq 0$) の形に表されるが, [33, Theorem 108a] の論法 ([14, Lemma 1 の証明] 参照) により, $1\leq s_0<\sqrt{r}$ としてよいので $\nu\geq 1$ であり, 従って $c>b$ なる c を生じる最小の解は $(t_0,s_0,\nu)=(1,1,1)$ から得られる $(t,s)=(b+r,r+a)$ であることが分かる. これから $c=(s^2-1)/a=a+b+2r$ を得る.

Diophantus の m 組に関する最初の breakthrough は Baker と Davenport による次の結果である.

定理 1.2. ([2]) $\{1,3,8,d\}$ が Diophantus の 4 組ならば, $d=120$ である.

証明は, Baker の方法を使って連立 Pell 方程式 $3x^2-2=y^2$, $8x^2-y=z^2$ の解の上限を求め, Davenport の還元法 (reduction method) を使ってその上限を繰り返し下げることによりなされている. 定理 1.2 により, $\{1,3,8\}$ を含む Diophantus の 5 組は存在しないことが分かるが, 古くから次の予想がある.

予想 1.3. Diophantus の 5 組は存在しない.

予想 1.3 は未解決であるが, 5 組の個数の具体的な上限は得られている (後述).

Arkin, Hoggatt, Strauss (および独立に Gibbs) は任意の Diophantus の 3 組が Diophantus の 4 組に拡張できることを示した.

定理 1.4. ([1], [26]) $\{a,b,c\}$ を Diophantus の 3 組とし, $r=\sqrt{ab+1}$, $s=\sqrt{ac+1}$, $t=\sqrt{bc+1}$ とするとき, $\{a,b,c,d_+\}$ は Diophantus の 4 組である. ここで, $d_+=a+b+c+2abc+2rst$ である.

定理 1.4 の 4 組は **正則な Diophantus の 4 組** (*regular Diophantine quadruple*) とよばれ, この最大元 d_+ は, 固定された $\{a,b,c\}$ $(a<b<c)$ に対し $\{a,b,c,d\}$ $(c<d)$ が Diophantus の 4 組であるような最小の整数であることが知られている ([15, Lemma 6] 参照). また, $d=d_+$ は方程式 $(a+b-c-d)^2=4(ab+1)(cd+1)$ の解であり, この方程式のもう 1 つの解は $d=d_-:=a+b+c+2abc-2rst$ である. 常に $0\leq d_-<c$ であり, $d_->0$ と $c>a+b+2r$ が同値であることは容易に確認できるが, $c>a+b+2r$ ならば $\{a,b,c,d_-\}$ は正則な Diophantus の 4 組である.

次の予想が正しければ, 予想 1.3 も正しいことが即座に分かる.

予想 1.5. ([1], [26]) 任意の Diophantus の 4 組は正則である.

予想 1.5 を支持する最初の結果は定理 1.2 であり, 定理 1.2 の一般化として以下のような 2 組 $\{a,b\}$ や 3 組 $\{a,b,c\}$ を含む Diophantus の 4 組 $\{a,b,c,d\}$ $(a<b<c<d)$ は正則であることが知られている :

- 整数 $k \geq 2$ に対し $\{k-1, k+1\}$ ([5, 12, 18, 22]);
- Fibonacci 数列の第 n 項 F_n に対し $\{F_{2k}, F_{2k+2}\}$ ([13, 21]);
- 正整数 k, A に対し $\{k, A^2k+2A, (A+1)^2k+2(A+1)\}$ ([9, 27, 28, 29]);
- $a < b < a + 4\sqrt{a}$ を満たす整数 a, b に対し $\{a, b\}$ ([21]).

上に挙げた文献にも見られるように，Dujella は様々な手法を考案することにより予想 1.3, 1.5 の解決に迫っている．彼の登場は第 2 の breakthrough とよぶに相応しい．[*1] 次の Dujella の結果は，Diophantus の m 組に関する最も美しい結果の 1 つである．

定理 1.6. ([15]) (i) Diophantus の 6 組は存在しない．
(ii) Diophantus の 5 組は高々有限個しか存在しない．

Diophantus の 5 組の個数 (=: Q とおく) については，具体的な上限が与えられている．以下に Q の上限の記録の歴史を列挙する：

- $Q < 10^{1930}$ (2008 年, Dujella [16]);
- $Q < 10^{276}$ (2010 年, Fujita [24]);
- $Q < 10^{96}$ (2013 年, Filipin and Fujita [20]);
- $Q < 6.8 \cdot 10^{32}$ (2014 年, Elsholtz, Filipin and Fujita [19]);
- $Q < 10^{31}$ (2015 年, Cipu [6]);
- $Q < 2.4 \cdot 10^{29}$ (2015 年, Trudgian [35]);
- $Q < 5.441 \cdot 10^{26}$ (2016 (?) 年, Cipu and Trudgian [10]).

2 番目の上限 $Q < 10^{276}$ を得る際に，次の結果を利用している：

定理 1.7. ([23, Theorem 2]) $\{a, b, c, d, e\}$ $(a < b < c < d < e)$ が Diophantus の 5 組ならば，$d = d_+$ である．

定理 1.8. ([24, Theorem 1.2]) 任意に固定された Diophantus の 3 組 $\{a, b, c\}$ $(a < b < c)$ に対し，Diophantus の 5 組 $\{a, b, c, d, e\}$ $(c < d < e)$ の個数は高々 4 個である．

定理 1.8 の証明には，定理 1.7 および岡崎氏による幾何的 gap 原理 ([4, Lemma 2.2], [24, Lemma 5.1] および補題 3.4 参照) が大きく寄与している．

本稿の目的は，Diophantus の 4 組に関して定理 1.8 と同様の結果を与えることである．

主定理. 任意に固定された Diophantus の 3 組 $\{a, b, c\}$ $(a < b < c)$ に対し，Diophantus の 4 組 $\{a, b, c, d\}$ $(c < d)$ の個数は高々 11 個である．

[*1] Dujella のホームページ内の [17] には，Diophantus の m 組に関する最新の文献を含む優れた解説がある．

2 基本解

$\{a,b,c\}$ $(a<b<c)$ を Diophantus の 3 組とし $r=\sqrt{ab+1}$, $s=\sqrt{ac+1}$, $t=\sqrt{bc+1}$ とする．さらに $\{a,b,c,d\}$ $(c<d)$ を Diophantus の 4 組とし $x=\sqrt{ad+1}$, $y=\sqrt{bd+1}$, $z=\sqrt{cd+1}$ とすれば，d を消去することにより連立 Pell 方程式

$$\begin{cases} az^2-cx^2=a-c, & (2.1)\\ bz^2-cy^2=b-c & (2.2)\end{cases}$$

が得られる．[33, Theorem 108a] の論法 ([14, Lemma 1 の証明] 参照) により，(2.1), (2.2) の正整数解はそれぞれ次で与えられる：

$$z\sqrt{a}+x\sqrt{c}=(z_0\sqrt{a}+x_0\sqrt{c})(s+\sqrt{ac})^m,$$
$$z\sqrt{b}+y\sqrt{c}=(z_1\sqrt{b}+y_1\sqrt{c})(t+\sqrt{bc})^n.$$

ただし，(z_0,x_0), (z_1,y_1) はそれぞれ (2.1), (2.2) の整数解で，

$$1\le|z_0|\le\sqrt{\frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{a}}},\quad 1\le x_0<\sqrt{\frac{s+1}{2}},\quad 1\le|z_1|\le\sqrt{\frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{b}}},\quad 1\le y_1<\sqrt{\frac{t+1}{2}} \qquad (2.3)$$

を満たすものである．本稿では，(z_0,x_0), (z_1,y_1) を Pell 方程式 (2.1), (2.2) のそれぞれ**基本解** (*fundamental solutions*) とよぶことにする．従って (2.1), (2.2) の正整数解 $z=v_m=w_n$ は次のように表される：

$$v_0=z_0,\ v_1=sz_0+cx_0,\ v_{m+2}=2sv_{m+1}-v_m,$$
$$w_0=z_1,\ w_1=tz_1+cy_1,\ w_{n+2}=2tw_{n+1}-w_n.$$

主定理の証明は，与えられた基本解と同じ類に属する解の個数の上限を与えるという方針でなされるので，具体的に基本解を決定する必要がある．

定理 2.1. $\{a,b,c,d\}$ $(a<b<c<d)$ を Diophantus の 4 組とし，$z=v_m=w_n$ が解をもつと仮定する．このとき，以下の 4 つのうちいずれか 1 つが成り立つ：

(1) m,n は共に偶数で，$z_0=z_1$ かつ $|z_0|\in\{1,cr-st\}$;

(2) m は奇数，n は偶数で，$|z_0|=t$, $|z_1|=cr-st$ かつ $z_0z_1<0$;

(3) m は偶数，n は奇数で，$|z_0|=cr-st$, $|z_1|=s$ かつ $z_0z_1<0$;

(4) m,n は共に奇数で，$|z_0|=t$, $|z_1|=s$ かつ $z_0z_1>0$.

さらに，もし $d>d_+$ ならば，(2) は起こらない．

これまで基本解に関しては，Dujella が大よそ決定した結果 ([15, Lemma 8]) が一般には最良であり，そこでは m,n が偶数の場合に $|z_0|$ が明示的に決定されていないという曖昧さがあったが，定理 2.1 ではその曖昧さを排除していることと後半の主張が加わっていることが新しい．

定理 2.1 の証明の鍵となるのは，2 次無理数の有理数による同時近似に関する Rickert の定理 ([34]) を少し書き直した次の定理である．

定理 2.2. ([8, Theorem 2.2]) a, b, N を $0 < a \le b-5$, $b > 2000$, $N \ge 3.706a'b^2(b-a)^2$ $(a' = \max\{b-a, a\})$ を満たす整数とする．N が ab で割り切れるとき，$\theta_1 = \sqrt{1+b/N}$ および $\theta_2 = \sqrt{1+a/N}$ は，すべての整数 p_1, p_2, q $(q > 0)$ に対し

$$\max\left\{\left|\theta_1 - \frac{p_1}{q}\right|, \left|\theta_2 - \frac{p_2}{q}\right|\right\} > \left(\frac{1.413 \cdot 10^{28} a'bN}{a}\right)^{-1} q^{-\lambda}$$

を満たす．ただし

$$\lambda = 1 + \frac{\log(10a^{-1}a'bN)}{\log(2.699a^{-1}b^{-1}(b-a)^{-2}N^2)} < 2$$

である．

【定理 2.1 の証明の概略】まず，$d = d_+$ の場合には，[15, Lemma 5] の証明より，$m, n \le 2$ かつ $(m,n) = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ のときそれぞれ $(z_0, z_1) = (t,s), (t, st-cr), (st-cr, s), (st-cr, st-cr)$ であることが分かるので，定理の主張が成り立つ．

以下，$d > d_+$ と仮定する．後半の主張は，$|z_0| = t$, $|z_1| = cr - st$ と基本解の範囲 (2.3) を精密に調べることにより c の a, b による評価

$$4ab^2 < c < 4\tau^{-4}a^2b \qquad \left(\tau = \frac{\sqrt{ab}}{r}\left(1 - \frac{a+b+1/c}{c}\right)(<1)\right) \tag{2.4}$$

が得られるが，この不等式が，$b > 4000$ ([7, Lemma 3.4]) および $b > a+2$ (これは [5], [22] の帰結である) に反することから分かる．

[15, Lemma 8] により，あとは m, n が共に偶数の場合に，$|z_0| \in \{1, cr-st\}$ であることを示せばよい．$|z_0| \notin \{1, cr-st\}$ と仮定する．$d_0 = (z_0^2-1)/c$ とおくと，正則でない Diophantus の 4 組 $\{a,b,d_0,c\}$ $(d_0 < c)$ が得られる ($|z_0| = 1$, $cr-st$ はそれぞれ $d_0 = 0$, d_- に対応する)．このとき，c は a, b と比べて「非常に大きい」ことが分かるので，定理 2.2 を

$$q = abz, \quad p_1 = sbx, \quad p_2 = tay, \quad N = abc$$

で適用することができ，n の a, b, c による上限が得られる．しかし，その上限は合同式 $v_m \equiv w_n \pmod{8c^2}$ から得られる n の下限と $b > 4000$ に反する． □

3 主定理の証明

固定された Diophantus の 3 組 $\{a,b,c\}$ $(a<b<c)$ に対し，基本解 (z_0, z_1) に伴う正則でない Diophantus の 4 組 $\{a,b,c,d\}$ $(c<d)$ の個数を $N(z_0,z_1)$ とおく．主定理は定理 2.1 と次の定理から従う．

定理 3.1. (1) 一般に $N(z_0,z_1) \le 2$ が成り立つ．

(2) $(z_0,z_1) \in \{(st-cr, st-cr), (st-cr, s), (t,s)\}$ ならば $N(z_0,z_1) \le 1$ である．

注意 3.2. (2) に現れる基本解 (z_0,z_1) はそれぞれ $(m,n) \in \{(2,2),(2,1),(1,1)\}$ のとき解 $z = v_m = w_n = cr + st$，すなわち，$d = d_+$ を与える．

【定理 2.1, 3.1 から主定理が従うこと】固定された Diophantus の 3 組 $\{a,b,c\}$ $(a<b<c)$ に対し，$\{a,b,c,d\}$ $(d_+<d)$ が（正則でない）Diophantus の 4 組であるような d の個数を N とする．$N\le 10$ を示せばよい．また，

$$\begin{aligned}
N_{ee} &= N(1,1)+N(-1,-1)+N(cr-st,cr-st)+N(st-cr,st-cr),\\
N_{oe} &= N(t,st-cr)+N(-t,cr-st),\\
N_{eo} &= N(st-cr,s)+N(cr-st,-s),\\
N_{oo} &= N(t,s)+N(-t,-s)
\end{aligned}$$

とおく．定理 2.1, 3.1 により

$$N_{ee}\le 7,\quad N_{oe}=0,\quad N_{eo}\le 3,\quad N_{oo}\le 3,$$
$$N=N_{ee}+N_{eo}+N_{oo}$$

である．c と a,b の大きさによって場合分けして考える．

- $c>4\tau^{-4}ab^2$ (τ は (2.4) のもの) ならば，(2.3) から $|z_0|,|z_1|\ne cr-st$ が分かるので，

$$N_{eo}=0,\quad N_{ee}=N(1,1)+N(-1,-1),\quad N=N_{ee}+N_{oo}\le 4+3=7.$$

- $4\tau^{-4}ab^2>c>4ab^2$ ならば，$|z_1|\ne cr-st$ であり，

$$N_{ee}=N(1,1)+N(-1,-1),\quad N=N_{ee}+N_{eo}+N_{oo}\le 4+3+3=10.$$

- $4ab^2>c>4\tau^{-4}a^2b$ ならば，$|z_1|\ne cr-st$ かつ $|z_0|\ne t$ が分かるので，

$$N_{oo}=0,\quad N_{ee}=N(1,1)+N(-1,-1),\quad N=N_{ee}+N_{eo}\le 4+3=7.$$

- $4\tau^{-4}a^2b>c>4a^2b$ ならば，$c>4a^2b$ のとき $4ab^2>4\tau^{-4}a^2b$ であることに注意すると $|z_0|\ne t$ が分かるので，

$$N_{oo}=0,\quad N=N_{ee}+N_{eo}\le 7+3=10.$$

- $4a^2b>c$ ならば，$|z_0|\ne t$ かつ $|z_1|\ne s$ が分かるので，

$$N_{eo}=N_{oo}=0,\quad N=N_{ee}\le 7.$$

□

定理 3.1 (1) の証明には，(3 つの) 対数の 1 次形式に関する Matveev の結果 ([32]) と岡崎氏による幾何的 gap 原理を利用する．いずれにおいても，1 次形式

$$\Lambda=m\log\xi-n\log\eta+\log\mu$$

を評価しておく必要がある．ここで

$$\xi=s+\sqrt{ac},\quad \eta=t+\sqrt{bc},\quad \mu=\frac{\sqrt{b}\,(x_0\sqrt{c}+z_0\sqrt{a})}{\sqrt{a}\,(y_1\sqrt{c}+z_1\sqrt{b})}$$

である．

補題 3.3. $z = v_m = w_n$ の解 (m, n) に対し，$0 < \Lambda < \kappa\xi^{-2m}$ が成り立つ．ここで

$$\kappa = \begin{cases} 6\sqrt{ac} & (d > d_+ \text{ の場合}), \\ 2.001c/b & (z_0 = st - cr \text{ の場合}), \\ 1/(2ab) & (z_0 = t \text{ の場合}) \end{cases}$$

である．

【証明】$P = a^{-1/2}(z_0\sqrt{a} + x_0\sqrt{c})\xi^m$, $Q = b^{-1/2}(z_1\sqrt{b} + y_1\sqrt{c})\eta^n$ とおくと，$v_m = w_n$ より

$$P - Q = \left(\frac{c}{a} - 1\right)P^{-1} - \left(\frac{c}{b} - 1\right)Q^{-1} > \frac{c-a}{a}(Q-P)P^{-1}Q^{-1},$$

すなわち $P > Q$ である．$(P-Q)/P < (c-a)/(aP^2) < 1/2$ なので，

$$0 < \Lambda = \log\frac{P}{Q} = -\log\left(1 - \frac{P-Q}{P}\right) < \frac{2(c-a)}{a}P^{-2} < \frac{2(x_0\sqrt{c} - z_0\sqrt{a})^2}{c-a}\xi^{-2m}.$$

あとは各場合に右辺が $\kappa\xi^{-2m}$ 以下であることを見ればよい． □

以下，基本解 (z_0, z_1) を 1 つ固定し，$z = v_m = w_n$ は (z_0, z_1) と同じ類に属する 3 つの解 (m_0, n_0), (m_1, n_1), (m_2, n_2) $(m_0 < m_1 < m_2)$ をもつと仮定する．また，

$$\Lambda_i = m_i \log\xi - n_i \log\eta + \log\mu \qquad (i \in \{0, 1, 2\})$$

とおく．次の補題が与える $m_2 - m_1$ の下からの評価は非常に強力である．

補題 3.4. ([4, Lemma 2.2], [24, Lemma 5.1] 参照) $v_{m_0} > 0$ と仮定すると

$$m_2 - m_1 > \kappa^{-1}(4ac)^{m_0}\Delta\log\eta$$

が成り立つ．ここで

$$\Delta = \begin{vmatrix} n_1 - n_0 & n_2 - n_1 \\ m_1 - m_0 & m_2 - m_1 \end{vmatrix} > 0$$

である．

証明は [4, Lemma 2.2] や [24, Lemma 5.1] と同様の方法でなされる．

【定理 3.1 (1) の証明】$N(z_0, z_1) \geq 3$ と仮定すると，$z = v_m = w_n$ は 3 つの解 (m_0, n_0), (m_1, n_1), (m_2, n_2) $(m_0 < m_1 < m_2)$ をもち，しかも $z = v_{m_0}$ は $d > d_+$ なる d に対応するので，$m_0 \geq 4$ としてよい ([23, Lemmas 7–11] 参照)．補題 3.3 と [32, Theorem 2.1] から

$$\frac{m_2}{\log(38.96m_2)} < A(c)\,C\log\eta$$

が分かる．ここで，$C = 3.08 \cdot 10^{11}$ および

$$A(c) = \begin{cases} 8.1\log c & (c = a + b + 2r \text{ の場合}), \\ 8.6\log(0.632c) & (c > a + b + 2r \text{ の場合}) \end{cases}$$

である．$m_0 \geq 4$ および $\eta < 2c-1$ に注意すると，$c = a+b+2r$ のとき

$$\frac{\frac{128}{3}a^4c^4}{\log(38.96 \cdot \frac{128}{3}a^4c^4\log(2c-1))} < 8.1C\log c$$

を得るが，これは $c < 2100$ を意味し，$c > b > 4000$ ([7, Lemma 3.4]) に反する．$c > a+b+2r$ の場合も同様に

$$\frac{\frac{128}{3}a^{3.5}c^{3.5}}{\log(38.96 \cdot \frac{128}{3}a^{3.5}c^{3.5}\log(2c-1))} < 8.6C\log(0.632c),$$

から $c < 6400$ が分かるが，これは $c > 5b > 20000$ に反する ($c > a+b+2r$ ならば $c > 4ab+a+b$ が成り立つことに注意する; [30, Lemma 4] 参照)． □

$z = v_m = w_n$ の 3 つの解のうちの 1 つ（つまり最小の解）が $d = d_+$ に対応する場合には，Matveev の定理と補題 3.4 を使って得られる c の上限は非常に大きいので，各 c に対して還元法を使って矛盾を導くことができない．そこで，Matveev の定理の代わりに，2 つの 1 次形式に関する Laurent の定理 [31, Theorem 2] を利用する．そのために，1 次形式

$$\Gamma = \Lambda_2 - \Lambda_1 = (m_2 - m_1)\log\xi - (n_2 - n_1)\log\eta$$

を考える．補題 3.3 より $0 < |\Gamma| < \kappa\xi^{-2m_1}$ であり，[31, Theorem 2] より

$$\frac{2m_1}{\log\eta} < \frac{\mathcal{C}\mu(\rho+3)^2}{\lambda^3\sigma}h^2 + \frac{4\sqrt{\omega\theta}h + 8\log h + 4\log\left(\sqrt{\mathcal{C}\omega\theta}\lambda^{-3}(\rho+3)^2\right)}{\log^2 16000} + 1 \tag{3.1}$$

が分かる．ただし，$\rho = 7.9$, $\mu = 0.62$,

$$\sigma = \frac{1+2\mu-\mu^2}{2}, \quad \lambda = \sigma\log\rho,$$
$$h = 4\log\left(\frac{2(m_2-m_1)}{\log\eta}+1\right) + 4\log\left(\frac{\lambda}{\rho+3}\right) + 7.06 + \log\rho,$$
$$H = \frac{h}{\lambda}, \quad \omega = 2+2\sqrt{1+\frac{1}{4H^2}}, \quad \theta = \sqrt{1+\frac{1}{4H^2}} + \frac{1}{2H},$$
$$\mathcal{C} = \left(\frac{\omega}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega^2}{9} + \frac{16\lambda\omega^{5/4}\theta^{1/4}}{3(\rho+3)H^{1/2}\log(16000)} + \frac{16\lambda\omega}{3(\rho+3)H\log(16000)}}\right)^2$$

である．不等式 (3.1) が機能するためには，「$m_2 - m_1$ と m_1 が近い」ことを示す必要がある．そのために，Rickert の定理を，前出のもの (定理 2.2) とは別の観点で言い直した次の定理を利用する．

定理 3.5. a, b, c を $0 < a < b < c$ を満たす整数とし，$a_1 = a(c-b)$, $a_2 = b(c-a)$, $N = abz^2$ とおく．ただし z は連立 Pell 方程式 (2.1), (2.2) の正の解である．また $u = c-b$, $v = c-a$, $w = b-a$ とおく．もし $N \geq 10^5 a_2$ ならば，$\theta_1 = \sqrt{1+a_1/N}$ および $\theta_2 = \sqrt{1+a_2/N}$ は，すべての整数 p_1, p_2, q ($q > 0$) に対し

$$\max\left\{\left|\theta_1 - \frac{p_1}{q}\right|, \left|\theta_2 - \frac{p_2}{q}\right|\right\} > \left(\frac{32.01a_1'a_2N}{a_1}\right)^{-1}q^{-\lambda}$$

を満たす．ただし

$$\lambda = 1 + \frac{\log\left(\frac{16a_1'a_2N}{a_1}\right)}{\log\left(\frac{1.6874N^2}{a_1a_2(a_2-a_1)uvw}\right)}$$

である．

証明は [20, Theorem 2.5] と同様になされる．

補題 3.6. $(x_{(i)}, y_{(i)}, z_{(i)})$ $(i \in \{1,2\})$ を連立 Pell 方程式 (2.1), (2.2) の正の解とし，θ_1, θ_2 を定理 3.5 において $z = z_{(1)}$ としたものとするとき，

$$\max\left\{\left|\theta_1 - \frac{acy_{(1)}y_{(2)}}{abz_{(1)}z_{(2)}}\right|, \left|\theta_2 - \frac{bcx_{(1)}x_{(2)}}{abz_{(1)}z_{(2)}}\right|\right\} < \frac{c^{3/2}}{2a^{3/2}}z_{(2)}^{-2}$$

が成り立つ．

【証明】

$$\left|\sqrt{1+\frac{a_1}{N}} - \frac{p_1}{q}\right| = \frac{y_{(1)}\sqrt{c}}{bz_{(1)}z_{(2)}}\left|z_{(2)}\sqrt{b} - y_{(2)}\sqrt{c}\right| < \frac{(c-b)\sqrt{c}\,y_{(1)}}{2b\sqrt{b}\,z_{(1)}z_{(2)}^2} < \frac{c^{3/2}}{2b^{3/2}}z_{(2)}^{-2},$$

$$\left|\sqrt{1+\frac{a_2}{N}} - \frac{p_2}{q}\right| = \frac{x_{(1)}\sqrt{c}}{az_{(1)}z_{(2)}}\left|z_{(2)}\sqrt{a} - x_{(2)}\sqrt{c}\right| < \frac{(c-a)\sqrt{c}\,x_{(1)}}{2a\sqrt{a}\,z_{(1)}z_{(2)}^2} < \frac{c^{3/2}}{2a^{3/2}}z_{(2)}^{-2}. \qquad \square$$

定理 3.5 と補題 3.6 を合わせると，次の命題が得られる．

命題 3.7. $\{a,b,c,d_i\}$ $(i \in \{1,2\})$ を $a<b<c<d_1<d_2$ を満たす Diophantus の 4 組とし，$x_{(i)}$, $y_{(i)}$, $z_{(i)}$ を $ad_i+1 = x_{(i)}^2$, $bd_i+1 = y_{(i)}^2$, $cd_i+1 = z_{(i)}^2$ $(i \in \{1,2\})$ を満たす正整数とする．もし $n_1 \geq 7$ または $(n_1, z_1) = (6, st-cr)$ ならば，$n_2 < 255n_1$ が成り立つ．

【証明】方針は [3, Corollary 3.3] と同様であるが，煩雑な計算式を含むので，少し丁寧に述べたいと思う．

$N = abz_{(1)}^2$, $p_1 = acy_{(1)}y_{(2)}$, $p_2 = bcx_{(1)}x_{(2)}$, $q = abz_{(1)}z_{(2)}$ とおくと，定理 3.5 および補題 3.6 より

$$z_{(2)}^{2-\lambda} < \frac{c^{3/2}}{2a^{3/2}}a^\lambda b^\lambda z_{(1)}^\lambda \cdot 32.01b^3c\frac{c-a}{c-b}z_{(1)}^2 < 16.005a^{\lambda-2}b^{\lambda+7/2}c^{5/2}z_{(1)}^{\lambda+2} \tag{3.2}$$

($c \geq a+b+2r$ および $(c-a)/(c-b) \leq (b+2r)/(a+2r) < b^{1/2}a^{-1/2}$ に注意)．以下，$z_{(i)} = w_{n_i}$ $(i \in \{1,2\})$ とおく．

(2.3) から $0.5655b^{-1/4}c^{3/4} < w_1 < 1.4144b^{1/4}c^{1/5}$ なので

$$0.5655 \cdot 1.99975^{n_1-1}b^{n_1/2-3/4}c^{n_1/2+1/4} < w_{n_1} < 1.4144 \cdot 2.0001^{n_1-1}b^{n_1/2-1/4}c^{n_1/2+3/4}$$

を得る．これから

$$\frac{16a_1'a_2N}{a_1} < 16b^3c\frac{c-a}{c-b}z_{(1)}^2 < 32.01 \cdot 2.0001^{2n_1-2}b^{n_1+3}c^{n_1+5/2} < (4.001bc)^{n_1+2.75},$$

$$\frac{1.6874N^2}{a_1a_2(a_2-a_1)uvw}=\frac{1.6874abz_{(1)}^4}{c(b-a)^2(c-b)^2(c-a)^2}$$
$$>0.172\cdot 1.99975^{4n_1-4}b^{2n_1-4}c^{2n_1-4}>(3.999bc)^{2n_1-4}$$

が分かるので，

$$\lambda<1+\frac{(n_1+2.75)\log(4.001bc)}{(2n_1-4)\log(3.999bc)}<1+\frac{0.5001n_1+1.3751}{n_1-2}$$

を得る．従って (3.2) より

$$z_{(2)}^{0.4999n_1-3.3751}<16.005^{n_1-2}a^{3.3751-0.4999n_1}b^{5.0001n_1-7.6249}c^{2.5n_1-5}z_{(1)}^{3.5001n_1-4.6249}.$$

また，$z_{(1)}=w_{n_1}>1.99975^{n_1-1.82255}(bc)^{0.5n_1-0.25}$ より

$$16.005^{n_1-2}b^{5.0001n_1-7.6249}c^{2.5n_1-5}<16.005^{n_1-2}(bc)^{3.75005n_1-5}<z_{(1)}^{7.5001}$$

であるので，

$$z_{(2)}<z_{(1)}^{\sigma}\qquad\left(\sigma=\frac{3.5001n_1+2.8752}{0.4999n_1-3.3751}\right)\tag{3.3}$$

が得られる．$n_1\geq 7$ なら $\sigma>1$ であることに注意する．もし $n_2\geq n_1\sigma+1.1(\sigma-1)$ なら $z_{(2)}/z_{(1)}^{\sigma}>1$ となって上の式に反するので，$n_2<n_1\sigma+1.1(\sigma-1)$，従って (3.3) より

$$n_2<\frac{(n_1+1.1)(3.5001n_1+2.8752)}{0.4999n_1-3.3751}-1.1<255n_1$$

を得る．

$(n_1,z_1)=(6,st-cr)$ の場合には，$\sigma<0$ となってしまい (3.3) は 使えないが，w_6 の評価は上記 w_{n_1} の評価で $n_1=6$ としたものより改善できる．実際，

$$w_6=(16b^2c^2+12bc+1)(cr+st)+4(2bc+1)cr$$

から

$$32a^{1/2}b^{5/2}c^3<w_6<32.0041a^{1/2}b^{5/2}c^3$$

が得られる．また，$|z_1|=cr-st$ の場合には (2.3) より $c<7.25a^2b$ が分かるので，

$$\frac{16a_1'a_2N}{a_1}<1.6389\cdot 10^4a^{1/2}b^{17/2}c^7,$$
$$\frac{1.6874N^2}{a_1a_2(a_2-a_1)uvw}>1.7693\cdot 10^6a^3b^9c^7$$

より

$$\lambda<2-\frac{\log\left(\frac{1.7693}{1.6389}\cdot 10^2a^{5/2}b^{1/2}\right)}{\log(1.7693\cdot 10^6a^3b^9c^7)}<2-\frac{\log(69.992a^{33/16}b^{9/32}c^{7/32})}{\log(1.7693\cdot 10^6a^3b^9c^7)}<\frac{63}{32}$$

を得る．従って (3.2) より

$$z_{(2)} < 4.9808 \cdot 10^{229} a^{125/2} b^{985/2} c^{463}$$

を得るが，$z_{(2)} = w_{n_2} > 0.5655 \cdot 1.99975^{n_2-1} b^{n_2/2-3/4} c^{n_2/2+1/4}$ であるので，

$$1.99975^{n_2} b^{n_2/2} c^{n_2/2} < 1.7614 \cdot 10^{230} b^{2037/4} c^{2037/4}$$

が分かる．故に $n_2 < 2037/2 < 255 n_1$ が得られる． □

【定理 3.1 (2) の証明】$z_0 \in \{t, st-cr\}$ に対し $N(z_0, z_1) \geq 2$ と仮定して矛盾を導く．従って，$z = v_m = w_n$ は $m_0 < m_1 < m_2$ なる 3 つの解 (m_i, n_i) $(i \in \{0,1,2\})$ をもち，$z_0 = t$, $st-cr$ のときそれぞれ $m_0 = 1, 2$ である．また，[23, Lemmas 7-11] より $\min\{m_1, n_1\} \geq 4$ であるが，今は $z_1 \in \{s, st-cr\}$ であることから，$m_1 \geq 6$ が分かる．

$m_i \equiv m_j \pmod 2$ かつ $n_i \equiv n_j \pmod 2$ $(i \in \{0,1,2\})$ より $\Delta \geq 4$ なので，補題 3.3 と 3.4 より

$$\frac{m_2 - m_1}{\log \eta} > 7.99 a^2 bc \cdot 4 > 5.2 \cdot 10^8. \tag{3.4}$$

一方，$n_i - 1 \leq m_i \leq 2n_i + 1$ ([15, Lemma 3]) および $m_1 \geq 6$ に注意すれば，命題 3.7 より

$$m_2 \leq 2n_2 + 1 \leq 510 n_1 - 1 \leq 510 m_1 + 509 < 594.9 m_1,$$

すなわち $m_2 - m_1 < 594 m_1$ が分かる．従って (3.1) より

$$\frac{m_2 - m_1}{297 \log \eta} < \frac{\mathcal{C}\mu(\rho+3)^2}{\lambda^3 \sigma} h^2 + \frac{4\sqrt{\omega}\theta h + 8 \log h + 4 \log\left(\sqrt{\mathcal{C}\omega}\theta \lambda^{-3}(\rho+3)^2\right)}{\log^2 16000} + 1,$$

すなわち $(m_2 - m_1)/\log \eta < 3.4 \cdot 10^7$ を得るが，これは (3.4) に反する． □

注意 3.8. 本稿の執筆と前後して，(3.1) と定理 3.5 とを組み合わせることとは別のアイデアを利用することにより，主定理が大きく改善できることに気づいた ([25] 参照)．従って本稿の主たる意義は，2 つの対数形式に関する Baker の方法と 2 次無理数の同時近似に関する Rickert の定理とを組み合わせることにより，基本解が 1 つに定まらない連立 Pell 方程式についても (基本解が唯 1 つである [3] の連立 Pell 方程式同様)，その解の個数を評価できる場合があることを明示したことにあると言えるかもしれない．

参考文献

[1] J. Arkin, V. E. Hoggatt and E. G. Strauss, On Euler's solution of a problem of Diophantus, Fibonacci Quart. 17 (1979), 333–339.

[2] A. Baker and H. Davenport, The equations $3x^2 - 2 = y^2$ and $8x^2 - 7 = z^2$, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 20 (1969), 129–137.

[3] M. A. Bennett, On the number of solutions of simultaneous Pell equations, J. Reine Angew. Math. 498 (1998), 173–199.

[4] M. A. Bennett, M. Cipu, M. Mignotte and R. Okazaki, On the number of solutions of simultaneous Pell equations II, Acta Arith. 122 (2006), 407–417.

[5] Y. Bugeaud, A. Dujella and M. Mignotte, On the family of Diophantine triples $\{k-1, k+1, 16k^3-4k\}$, Glasgow Math. J. 49 (2007), 333–344.

[6] M. Cipu, Further remarks on Diophantine quintuples, Acta Arith. 168 (2015), 201–219.

[7] M. Cipu, A. Filipin and Y. Fujita, Bounds for Diophantine quintuples II, Publ. Math. Debrecen 88 (2016), 59–78.

[8] M. Cipu and Y. Fujita, Bounds for Diophantine quintuples, Glas. Math. Ser. III 50 (2015), 25–34.

[9] M. Cipu, Y. Fujita and M. Mignotte, Non-extendable two-parametric families of Diophantine triples, preprint.

[10] M. Cipu and T. Trudgian, Searching for Diophantine quintuples, preprint.

[11] L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, Vol. 2, Chelsea, New York, 1966.

[12] A. Dujella, The problem of the extension of a parametric family of Diophantine triples, Publ. Math. Debrecen 51 (1997), 311–322.

[13] A. Dujella, A proof of the Hoggatt-Bergum conjecture, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 1999–2005.

[14] A. Dujella, An absolute bound for the size of Diophantine m-tuples, J. Number Theory, 89 (2001), 126–150.

[15] A. Dujella, There are only finitely many Diophantine quintuples, J. Reine Angew. Math. 566 (2004), 183–214.

[16] A. Dujella, On the number of Diophantine m-tuples, Ramanujan J. 15 (2008), 37–46.

[17] A. Dujella, *Diophantine m-tuples,* http://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/dtuples.html.

[18] A. Dujella and A. Pethő, A generalization of a theorem of Baker and Davenport, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 49 (1998), 291–306.

[19] C. Elsholtz, A. Filipin, Y. Fujita, On Diophantine quintuples and $D(-1)$-quadruples, Monats. Math. 175 (2014), 227–239.

[20] A. Filipin Y. Fujita, The number of Diophantine quintuples II, Publ. Math. Debrecen 82 (2013), 293–308.

[21] A. Filipin, Y. Fujita and A. Togbé, The extendibility of Diophantine pairs II: examples, J. Number Theory 145 (2014), 604–631.

[22] Y. Fujita, The extensibility of Diophantine pairs $\{k-1, k+1\}$, J. Number Theory 128 (2008), 322–353.

[23] Y. Fujita, Any Diophantine quintuple contains a regular Diophantine quadruple, J. Number Theory 129 (2009), 1678–1697.

[24] Y. Fujita, The number of Diophantine quintuples, Glas. Mat. Ser. III 45 (2010), 15–29.

[25] Y. Fujita and T. Miyazaki, On the extensions of a Diophantine triple: the uniqueness in the regular case, the number in general, preprint.

[26] P. E. Gibbs, Computer Bulletin 17 (1978), 16.

[27] B. He and A. Togbé, On the family of Diophantine triples $\{k+1, 4k, 9k+3\}$, Period. Math. Hungar. 58 (2009), 59–70.

[28] B. He and A. Togbé, On a family of Diophantine triples $\{k, A^2k+2A, (A+1)^2k+2(A+1)\}$ with two parameters, Acta Math. Hungar. 124 (2009), 99–113.

[29] B. He and A. Togbé, On a family of Diophantine triples $\{k, A^2k+2A, (A+1)^2k+2(A+1)\}$ with two parameters II, Period. Math. Hungar. 64 (2012), 1–10.

[30] B. W. Jones, A second variation on a problem of Diophantus and Davenport. Fibonacci Quart. 16 (1978), 155–165.

[31] M. Laurent, Linear forms in two logarithms and interpolation determinants II. Acta Arith. 133 (2008), 325–348.

[32] E. M. Matveev, An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers. II. Izv. Math. 64 (2000), 1217–1269.

[33] T. Nagell, Introduction to number theory, Almqvist, Stockholm; Wiley, New York, 1951.

[34] J. H. Rickert, Simultaneous rational approximation and related Diophantine equations, Math, Proc. Cambridge Philos. Soc. 113 (1993), 461–472.

[35] T. Trudgian, Bounds on the number of Diophantine quintuples, J. Number Theory 157 (2015), 233–249.