数理解析研究所講究録
第2015巻 2017年 44-52

FINITE MULTIPLE ZETA VALUES ASSOCIATED WITH 2-COLORED ROOTED TREES

慶應義塾大学大学院理工学研究科 小野雅隆
MASATAKA ONO
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
KEIO UNIVERSITY

1. はじめに

本稿では, 2色根付き木と呼ばれる組合せ論的な対象を定義し, 2色根付き木に付随するある有限和について論ずる. 有限多重ゼータ値はHoffman[H2] とZhao[Z] による先駆的な研究を経て, 金子とZagier によって次のように定義された [KZ].

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r):=\left(\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<p}\frac{1}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}} \bmod p\right)_p \in \mathcal{A}$$

ここで $k_1,\ldots,k_r$ は正の整数である. また $\mathcal{A}:=\left(\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)\Big/\left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$ であり, p は有理素数全てを渡る. 以下 $\mathcal{A}$ の元は $()_p$ と mod$p$ を省略し $(a_p \bmod p)_p$ を a_p などと書く. 現在では有限多重ゼータ値に関する様々な結果が知られている（例えば [M], [Oy], [SS], [SW1], [SW2]）.

鎌野は [K] において, Mordell-Tornheim 多重ゼータ値の有限類似である有限 Mordell-Tornheim 多重ゼータ値

$$\zeta_{\mathcal{A}}^{MT}(k_1,\ldots,k_r;k_{r+1}):=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_r>0\\ m_1+\cdots+m_r<p}}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_r^{k_r}(m_1+\cdots+m_r)^{k_{r+1}}}\in\mathcal{A}$$

を導入した. ここで $k_1,\ldots,k_{r+1}$ は全て正の整数である. 鎌野は有限 Mordell-Tornheim 多重ゼータ値の有限多重ゼータ値の一次結合による明示的な表示を Hoffman 代数の言葉を用いて与え [K, Theorem 2.1], その表示を用いて有限多重ゼータ値の間の関係式を得た [K, Theorem 3.2, Proposition 3.4].

本研究の目的は, 鎌野の結果をより一般的な有限和に対して拡張することである. 筆者は [Y] で導入された2色ポセット上の積分を参考に, ある種の組合せ論的な対象に有限和を定義することで拡張することを目指した. そして2色根付き木という組合せ論的対象と付随するある有限和を定義するに至った. これが表題の2色根付き木に付随する有限多重ゼータ値である.

そのため本稿ではまず, 2色根付き木と呼ぶ組合せ論的な対象を定義し, 2色根付き木に付随する $\mathcal{A}$ の元を定義する. 2色根付き木とは, 有限個の辺と頂点を持つ根付き木に付加構造を与えたものである. 後に見るように, これは金子とZagier の有限多重ゼータ値及び鎌野の有限 Mordell-Tornheim 多重ゼータ値の共通の一般化になっている. そして2色根付き木に対して幾つかの条件を課すことで, 2色根付き木に付随する有限多重ゼータ値も有限多重ゼータ値の一次結合による明示的な表示が得られた. これが本稿の主定理である.

さらに，金子-Zagierによる有限多重ゼータ値のシャッフル関係式が2色根付き木に付随する有限多重ゼータ値の枠組みから得られたことも報告する．本研究を始めた頃は有限多重ゼータ値のシャッフル関係式が得られるとは全く想定しておらず，筆者にとってこれは大きな驚きであった．

2. 2色根付き木と付随する有限多重ゼータ値

ここでは2色根付き木と付随する有限多重ゼータ値を定義し，2色根付き木に付随する有限多重ゼータ値が変の縮約や根の入れ替えでどう変化するかを紹介する．これらの性質は主定理を証明する上でポイントになる2色根付き木とその上の指数の組が“収穫可能である”という概念を定義する上で重要な役割を果たす．

定義 2.1. 以下の3つ組 $(T, \mathrm{rt}_T, V_\bullet)$ を2色根付き木と呼ぶ．

(i) $T = (V, E)$ は木であり，$\#V (= \#E + 1)$ は有限である．
(ii) $\mathrm{rt}_T \in V$ は T の頂点である．rt_T を T の根と呼ぶ．
(iii) $V_\bullet$ は V の部分集合で，次数が1である T の点（端点）をすべて含む．$V_\circ := V \setminus V_\bullet$ とおく．

以下では2色根付き木 $(T, \mathrm{rt}_T, V_\bullet)$，$T$ の辺 e 及び $(m_v) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{V_\bullet}$ に対し

$$L_e(\mathrm{rt}_T, (m_v)) := \sum_{v \in V_\bullet \text{ s.t. } e \in P(\mathrm{rt}_T, v)} m_v$$

とおく．ここで $P(\mathrm{rt}_T, v)$ は rt_T から v への道である．つまり rt_T から e を通って到達しうる $V_\bullet$ の元を添え字に持つような m_v たちの総和が $L_e(\mathrm{rt}_T, (m_v))$ である．

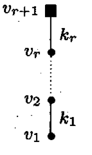
定義 2.2. 2色根付き木 $X = (T, \mathrm{rt}_T, V_\bullet)$ と写像 $k : E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$\mathcal{A}$ の元

$$\zeta_{\mathcal{A}}(X, k) := \sum_{\substack{(m_v) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{V_\bullet} \text{ s.t. } \\ \sum_{v \in V_\bullet} m_v = p}} \prod_{e \in E} L_e(\mathrm{rt}_T, (m_v))^{-k(e)}$$

を X に付随する有限多重ゼータ値と呼ぶ．また k を X 上の指数と呼ぶ．

例 2.3. 2色根付き木 $X = (T, \mathrm{rt}_T, V_\bullet)$ に対し，rt_T が $V_\bullet$ の元ならば■で，$V_\circ$ の元ならば□で表す．rt_T 以外の $V_\bullet$ または $V_\circ$ の元をそれぞれ●及び○で表す．

(i) $X = (T, \mathrm{rt}_T, V_\bullet)$ 及び k を以下で定義される2色根付き木及びその上の指数とする．

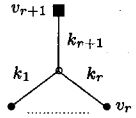


ここで $k_i := k(e_i)$ は正で, $e_i \in E$, $\mathrm{rt}_T = v_{r+1}$ とする. $m_i := m_{v_i}$ $(1 \leq i \leq r+1)$ とおくと, $L_{e_i}(\mathrm{rt}_T, (m_v)) = m_1 + \cdots + m_i$ $(1 \leq i \leq r)$ となる. したがって

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{A}}(X,k) &= \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_{r+1}\geq 1\\ m_1+\cdots+m_{r+1}=p}} (m_1+\cdots+m_r)^{-k_r}\cdots(m_1+m_2)^{-k_2}m_1^{-k_1}\\ &= \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_r\geq 1\\ m_1+\cdots+m_r\leq p-1}} \frac{1}{m_1^{k_1}(m_1+m_2)^{k_2}\cdots(m_1+\cdots+m_r)^{k_r}}\\ &=\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)\end{aligned}$$

となり, 金子-Zagier の有限多重ゼータ値が得られる.

(ii) 次に 2 色根付き木 $X = (T, \mathrm{rt}_T, V_\bullet)$ 及びその上の指数 k を以下のようにとる.



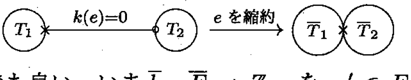
$\mathrm{rt}_T = v_{r+1}$ とし $k_i \geq 1 (1 \leq i \leq r)$ と仮定する. このとき $L_{e_i}(\mathrm{rt}_T, (m_v)) = m_i$ $(1 \leq i \leq r)$, $L_{e_{r+1}}(\mathrm{rt}_T, (m_v)) = m_1 + \cdots + m_r$ であるから,

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{A}}(X,k) &= \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_{r+1}\geq 1\\ m_1+\cdots+m_{r+1}=p}} m_1^{-k_1}\cdots m_r^{-k_r}(m_1+\cdots+m_r)^{-k_{r+1}}\\ &= \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_r\geq 1\\ m_1+\cdots+m_r\leq p-1}} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}(m_1+\cdots+m_r)^{k_{r+1}}}\\ &=\zeta_{\mathcal{A}}^{MT}(k_1,\ldots,k_r;k_{r+1})\end{aligned}$$

となる. したがってこの場合は鎌野の有限 Mordell-Tornheim 多重ゼータ値に一致する.

次の 2 つの命題は, 2 色根付き木に付随する有限多重ゼータ値が特定の辺の縮約に関して不変であることを示している.

命題 2.4. $X = (T, \mathrm{rt}_T, V_\bullet)$ を 2 色根付き木, k を X 上の指数とする. 端点の 1 つが $V_\circ$ の元であって k による値が 0 となる辺 $e \in E$ が存在すると仮定する. $\overline{T} := T/e = (\overline{V}, \overline{E})$ を e を縮約して T から得られる木, $\overline{V}_\bullet$, $\overline{\mathrm{rt}_T} \in \overline{V}_\bullet$ をそれぞれ $\overline{T}$ における $V_\bullet$ と rt_T の像とし, $\mathrm{rt}_{\overline{T}} := \overline{\mathrm{rt}_T}$ とおく. これらの状況を図示すると以下のようになる.



ここで × は ∘ か • のどちらでも良い. いま $\overline{k} : \overline{E} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を, $e' \in E$ の $\overline{T}$ での像 $\overline{e'} \in \overline{E}$ に対し, $\overline{k}(\overline{e'}) := k(e')$ で定義される $\overline{X} := (\overline{T}, \mathrm{rt}_{\overline{T}}, \overline{V}_\bullet)$ 上の指数とする. このとき,

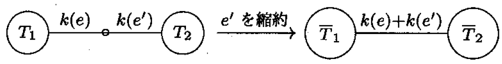
$$\zeta_{\mathcal{A}}(X,k) = \zeta_{\mathcal{A}}(\overline{X},\overline{k})$$

が成り立つ.

命題 2.5. $X = (T, \mathrm{rt}_T, V_\bullet)$ を 2 色根付き木, k を X 上の指数とする. 次数が 2 である $v \in V_\circ$ を共通の端点に持つ 2 つ辺 $e, e' \in E$ が存在すると仮定する. e を縮約して得られる木 $\overline{T} := T/e' = (\overline{V}, \overline{E})$ を考える. $\overline{e} \in \overline{E}$ 及び $\overline{V}_\bullet$ をそれぞれ e 及び $V_\bullet$ の $\overline{T}$ での像とし, $\overline{\mathrm{rt}_T} \in \overline{V}_\bullet$ を rt_T の $\overline{T}$ での像とする. $\mathrm{rt}_{\overline{T}} := \overline{\mathrm{rt}_T}$ とおき, $\overline{k} : \overline{E} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を, $f \in E$ の $\overline{T}$ での像 $\overline{f} \in \overline{E}$ に対し

$$\overline{k}(\overline{f}) := \begin{cases} k(e) + k(e') & \overline{f} = \overline{e} \text{ の時} \\ k(f) & \text{その他の時.} \end{cases}$$

で定義される $\overline{X} := (\overline{T}, \mathrm{rt}_{\overline{T}}, \overline{V}_\bullet)$ 上の指数とする. この状況を図示すると以下のようになる.



この時,

$$\zeta_{\mathcal{A}}(X, k) = \zeta_{\mathcal{A}}(\overline{X}, \overline{k})$$

が成り立つ.

どちらの命題も 2 色根付き木に付随する有限多重ゼータ値の定義をよく眺めると簡単に証明できる. 次の命題は有限多重ゼータ値の間の関係式を得る上で極めて重要である.

命題 2.6. 木 $T = (V, E)$ 及びその頂点 $v', v'' \in V$ と V の部分集合 $V_\bullet$ に対し, 2 つの 2 色根付き木 $X' = (T, v', V_\bullet), X'' = (T, v'', V_\bullet)$ を考える. k を X' 及び X'' 上の指数とするとき,

$$\zeta_{\mathcal{A}}(X', k) = (-1)^{k(P(v', v''))} \zeta_{\mathcal{A}}(X'', k)$$

が成り立つ. ここで $k(P(v', v'')) := \sum_{e \in P(v', v'')} k(e)$ である.

証明は, 辺 e が v' と v'' を結ぶ道 $P(v', v'')$ に含まれる場合に

$$V_\bullet = \{v \in V_\bullet \mid e \in P(v', v)\} \sqcup \{v \in V_\bullet \mid e \in P(v'', v)\}$$

となり, e が $P(v', v'')$ に含まれない場合に

$$\{v \in V_\bullet \mid e \in P(v', v)\} = \{v \in V_\bullet \mid e \in P(v'', v)\}$$

となることから従う.

例 2.7. 例 2.3 (ii) で扱った 2 色根付き木 X' 及びその上の指数 k を考える. このとき $\zeta_{\mathcal{A}}(X', k)$ は有限 Mordell-Tornheim 多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}^{MT}(k_1, \ldots, k_r; k_{r+1})$ に一致するのであった. $X'' = (T, v_1, k)$ を v_1 を根に持つ 2 色根付き木とする. すると命題 2.6 から

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathcal{A}}^{MT}(k_1, \ldots, k_r; k_{r+1}) &= \zeta_{\mathcal{A}}(X', k) = (-1)^{k(P(v_{r+1}, v_1))} \zeta_{\mathcal{A}}(X'', k) \\ &= (-1)^{k_1 + k_{r+1}} \zeta_{\mathcal{A}}^{MT}(k_{r+1}, k_2, \ldots, k_r; k_1), \end{aligned}$$

となり, 鎌野の結果 [K, Lemma 3.1] が得られる.

3. 主定理と応用

ここではまず2色根付き木上の指数が本質的に正であるという概念を定義し, 主定理を述べる. 次に主定理の証明で本質的である, 2色根付き木とその上の指数の組が "収穫可能である" という概念を定義する. 主定理は2色根付き木とその上の指数の組が収穫可能である場合に帰着される. その後収穫可能である場合の中でも簡単な場合について証明を与える. 最後に応用として, 主定理を用いて有限多重ゼータ値のシャッフル関係式の別証明を与える.

定義 3.1 (本質的に正). 2色根付き木 $X=(T,\mathrm{rt}_T,V_\bullet)$ 上の指数 k が本質的に正であるとは, 任意の $v,v'\in V_\bullet$ に対し $k(P(v,v'))$ が正であることを言う.

主定理は以下の通りである.

定理 3.2 (主定理). X を2色根付き木, k を X 上の本質的に正な指数とする. このとき X に付随する有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}(X,k)$ は金子-*Zagier* の有限多重ゼータ値の $\mathbb{Z}$ 上の線型結合で明示的に記述される.

定義 3.3. $X=(T,\mathrm{rt}_T,V_\bullet)$ を2色根付き木, k を X 上の指数とする. 以下の性質を満たすとき, 組 (X,k) は収穫可能であるという.

- **(H1):** 根 rt_T は T の端点である. 特に, rt_T は $V_\bullet$ の元である.
- **(H2):** $V_\bullet$ の元の次数は常に2以下であり, $V_\circ$ の元の次数は常に3以上である.
- **(H3):** 辺 e が分岐点 $v\in V_\circ$ に接続しており, e のもう一方の端点 v' が $V_\bullet$ の元であってかつ v' より v の方が根 rt_T の近くにあるならば, $k(e)$ は正である. ここで分岐点とは次数が3以上の頂点のことである.

命題 2.4, 命題 2.5 及び 命題 2.6 を用いることで, 2色根付き木 X とその上の本質的に正である指数 k の組 (X,k) から, 付随する有限多重ゼータ値が符号のズレを除いて一致するような収穫可能な組 $(X_{\mathrm{h}},k_{\mathrm{h}})$ を構成することができる. より正確に, 以下が成り立つ.

命題 3.4. $X=(T,\mathrm{rt}_T,V_\bullet)$ を2色根付き木, k を X 上の本質的に正な指数とする. このとき, 2色根付き木 X_{h} とその上の指数 k_{h} で以下を満たすものが存在する.

(i) 組 $(X_{\mathrm{h}},k_{\mathrm{h}})$ は収穫可能であり, k_{h} は X_{h} 上の本質的に正な指数である.

(ii) $\zeta_{\mathcal{A}}(X,k)=(-1)^{k_{\mathrm{h}}(P(\overline{\mathrm{rt}_T},\mathrm{rt}_{T_{\mathrm{h}}}))}\zeta_{\mathcal{A}}(X_{\mathrm{h}},k_{\mathrm{h}})$ が成り立つ. ここで $\overline{\mathrm{rt}_T}\in V(X_{\mathrm{h}})$ は rt_T の X_{h} での像である.

定義 3.5. 2色根付き木 X とその上の本質的に正な指数 k に対し, 命題 3.4 を満たす収穫可能な組 $(X_{\mathrm{h}},k_{\mathrm{h}})$ を (X,k) の収穫可能形式と呼ぶ.

命題 3.4 により, 主定理は (X,k) が収穫可能な場合に帰着される. 収穫可能な組 (X,k) に対しては, 以下で述べるように X の形状によって Hoffman 代数 $\mathfrak{H}^1$ の元を用いて $\zeta_{\mathcal{A}}(X,k)$ が具体的にわかる. ここで正確な主張を述べるため Hoffman 代数の言葉 [H2] を導入する. $\mathfrak{H}:=\mathbb{Q}\langle x,y\rangle$ を x,y を変数とする $\mathbb{Q}$ 上の非可換多項式環とし, $\mathfrak{H}^1:=\mathbb{Q}+y\mathfrak{H}$ とおく. $\mathfrak{H}^1$ は $\mathbb{Q}$ 代数として $z_k:=yx^{k-1}$ $(k=1,2,\ldots)$ で生成されることに注意する. 写像 $Z_{\mathcal{A}}:\mathfrak{H}^1\to\mathcal{A}$ を $z_{k_1}\cdots z_{k_r}$ の行き先を $\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)$ とすることで定義し, $\mathbb{Q}$ 線型にのばす. $\mathbb{Q}$ 線型にのばしたものも $Z_{\mathcal{A}}$ で表す.

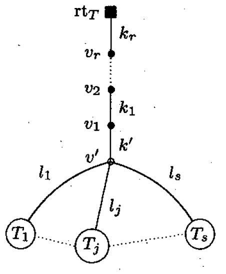
次に $\mathfrak{H}$ 上のシャッフル積 $⧢:\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ を以下のルールで定義し, $\mathbb{Q}$ 双線型にのばす.

(i) 任意の $w \in \mathfrak{H}$ に対し $w ш 1 = 1 ш w = w$.

(ii) 任意の $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$ 及び $u_1, u_2 \in \{x, y\}$ に対し $(w_1u_1) ш (w_2u_2) = (w_1 ш w_2u_2)u_1 + (w_1u_1 ш w_2)u_2$.

主定理は次の命題に帰着される.

命題 3.6. $X = (T, \mathrm{rt}_T, V_\bullet)$ を 2 色根付き木, k を X 上の本質的に正な指数とし, 組 (X, k) が収穫可能であると仮定する. (X, k) は収穫可能であるので, (X, k) は以下の形に書けることに注意する.



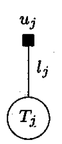
ここで r, s は正整数, $k_i := k(e_i)$ $(1 \leq i \leq r), l_j := k(f_j)$ $(1 \leq j \leq s), k' := k(e')$ であり, $k_i, l_j \geq 1, k' \geq 0$ である. また $T_1, \ldots, T_s$ は T の部分木である. このとき

$$\zeta_{\mathcal{A}}(X, k) = Z_{\mathcal{A}}(w)$$

が成り立つ. ここで

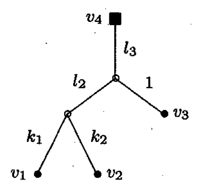
$$w = \left(\mathop{ш}_{j=1}^{s} w_j \right) x^{k'} z_{k_1} \cdots z_{k_r}$$

であり, $w_j \in \mathfrak{H}^1$ $(1 \leq j \leq s)$ は T_j に新たな根 u_j を新たに付け加えることで得られる以下の 2 色根付き木に対応する $\mathfrak{H}^1$ の元である.



命題 3.6 の証明は複雑なので本稿では省略する. 詳細は [On, Proposition 3.2] の証明を参照されたい. ここでは以下の組 (X, k) の場合の証明を与える.

(1)



ただし $k_1, k_2, l_3 \geq 1, l_2 \geq 2$ とする. (X, k) は収穫可能であり k は本質的に正であることに注意する. $S = S(X, k)$ を根に一番近い $V_\circ$ の元よりも下に位置する辺の k による値の総和とする. この場合は

$S = k_1 + k_2 + l_2 + 1$ である．なお $V_\circ$ が空集合の場合，つまり (X, k) が通常の有限多重ゼータ値を与える例 2.3 (i) の場合は，$Z_{\mathcal{A}}$ の定義より

$$\zeta_{\mathcal{A}}(X, k) = \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r) = Z_{\mathcal{A}}(z_{k_1} \cdots z_{k_r})$$

となりこの命題が成り立つ．

$S(X, k)$ に関する帰納法で示す．いま

$$\zeta_{\mathcal{A}}(X, k) = \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \geq 1 \\ m_1+m_2+m_3 \leq p-1}} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} m_3 (m_1+m_2)^{l_2} (m_1+m_2+m_3)^{l_3}}$$

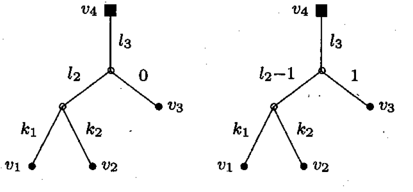
である．$s = 2, X_1 = m_3, X_2 = m_1 + m_2$ として次の部分分数分解

(2)
$$\frac{1}{X_1 \cdots X_s} = \frac{1}{X_1 + \cdots + X_s} \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{\underbrace{X_1 \cdots X_s}_{X_i\text{ を取り除く}}}$$

を用いると

(3)
$$\zeta_{\mathcal{A}}(X, k) = \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \geq 1 \\ m_1+m_2+m_3 \leq p-1}} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} (m_1+m_2)^{l_2} (m_1+m_2+m_3)^{l_3+1}} + \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \geq 1 \\ m_1+m_2+m_3 \leq p-1}} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} (m_1+m_2)^{l_2-1} (m_1+m_2+m_3)^{l_3+1}}$$

となる．(3) の右辺の第 1 項，第 2 項はそれぞれ以下で定義される組 $(X', k'), (X'', k'')$ に付随する有限多重ゼータ値と一致する．



左が (X', k') であり右が (X'', k'') である．(X'', k'') は収穫可能であり k', k'' はどちらも本質的に正である．一方 (X', k') は収穫可能ではない．そこで値が 0 である辺を縮約すると (一方の端点が $\circ$ なので，これは可能である)，これは (X', k') の収穫可能形式 $(X'_{\mathrm{h}}, k'_{\mathrm{h}})$ になる．また命題 2.4 より $\zeta_{\mathcal{A}}(X', k') = \zeta_{\mathcal{A}}(X'_{\mathrm{h}}, k'_{\mathrm{h}})$ である．

さて，$S(X'_{\mathrm{h}}, k'_{\mathrm{h}}), S(X'', k'') < S(X, k)$ であるから帰納法の仮定から

$$\zeta_{\mathcal{A}}(X', k') = \zeta_{\mathcal{A}}(X'_{\mathrm{h}}, k'_{\mathrm{h}}) = Z_{\mathcal{A}}((z_{k_1} ш z_{k_2}) x^{l_2} z_{l_3+1})$$

$$\zeta_{\mathcal{A}}(X'', k'') = Z_{\mathcal{A}}(((z_{k_1} ш z_{k_2}) x^{l_2-1} ш z_1) x^{l_3+1})$$

が成り立つ．これより，シャッフル積の定義を用いて

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{A}}(X,k) =& Z_{\mathcal{A}}((z_{k_1} ш z_{k_2})x^{l_2}z_{l_3+1}) + Z_{\mathcal{A}}(((z_{k_1} ш z_{k_2})x^{l_2-1} ш z_1)x^{l_3+1})\\ =& Z_{\mathcal{A}}(((z_{k_1} ш z_{k_2})x^{l_2} ш z_1)x^{l_3})\end{aligned}$$

となり，(1) の場合は証明された．一般の場合も (2) を用いて全く同じ方法で示される．

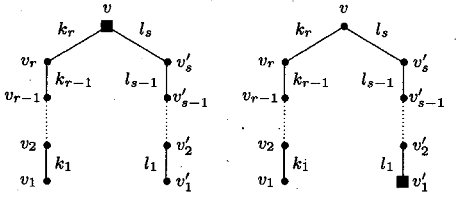
最後に主定理を用いて有限多重ゼータ値のシャッフル関係式が得られることを説明し，本稿を終える．

系 3.7. ([KZ]) 正整数 $k_1,\ldots,k_r,l_1,\ldots,l_s$ 及び $\mathfrak{H}^1$ の 2 つの元 $w:=z_{k_1}\cdots z_{k_r}, w':=z_{l_1}\cdots z_{l_s}$ に対し，

$$Z_{\mathcal{A}}(w ш w') = (-1)^{l_1+\cdots+l_s} Z_{\mathcal{A}}(z_{k_1}\cdots z_{k_r} z_{l_s}\cdots z_{l_1}).$$

が成り立つ．

Proof. 次の 2 つの 2 色根付き木 $X=(T,v,V), X'=(T,v'_1,V)$ とそれらの上の指数 k を考える．



左が (X,k) で右が (X',k) である．このとき命題 2.6 より

$$\zeta_{\mathcal{A}}(X,k) = (-1)^{k(P(v,v'_1))}\zeta_{\mathcal{A}}(X',k) \tag{4}$$

が成り立つ．主定理（定理 3.2）より，(4) の左辺は $Z_{\mathcal{A}}(w ш w')$ である．一方命題 3.6 より，(4) の右辺は $(-1)^{l_1+\cdots+l_s}Z_{\mathcal{A}}(z_{k_1}\cdots z_{k_r}z_{l_s}\cdots z_{l_1})$ であるので，これで示された． □

謝辞

講演の機会を与えてくださり，また旅費を援助してくださった名古屋大学の古庄英和先生に感謝申し上げます．

References

[H1] M. E. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[H2] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345–366.

[K] K. Kamano, Finite Mordell-Tornheim multiple zeta values, Funct. Approx. Comment. Math. **54** (2016), 65–72.

[KZ] M. Kaneko, D. Zagier, finite multiple zeta values, in preparation.

[M] H. Murahara, Derivation relations for finite multiple zeta values, preprint, arXiv:1512.08696v2.

[On] M. Ono, finite multiple zeta values associated with 2-colored rooted trees, preprint, arXiv:1609.09168v1.

[Oy] K. Oyama, 'Ohno's relation for finite multiple zeta values, preprint, arXiv:1506.00833.

[SS] K. Sakugawa, S. Seki, On functional equations of finite multiple polylogarithms, preprint, arXiv:1509.07653.

[SW1] S. Saito, N. Wakabayashi, Sum formula for finite multiple zeta values, J. Math. Soc. Japan Vol. 67, **3** (2015) pp. 1069–1076.

[SW2] S. Saito, N. Wakabayashi, Bowman-Bradley type theorem for finite multiple zeta values, to appear in Tohoku Math. J. **68** (2016).

[Y] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, preprint, arXiv:1405.6499v1.

[Z] J. Zhao, Wolstenholme type theorem for multiple harmonic sums, Int. J. Number Theory **4** (2008), no. 1, 73–106.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KEIO UNIVERSITY, 3-14-1 HIYOSHI, KOUHOKU-KU, YOKOHAMA 223-8522, JAPAN
E-mail address: ono@math.keio.ac.jp