数理解析研究所講究録
第2016巻 2017年 132-141

有限位相空間と変換群
～河野進氏を偲んで～
Transformation Groups and Finite Topological Spaces
Dedicated to the memory of Dr.Susumu Kono

京都産業大学理学部　牛瀧文宏 (Fumihiro Ushitaki)
Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

1　はじめに

有限位相空間とは、文字通り有限点集合に位相を入れた位相空間である。この数学的対象に関しての大きな関心事といえば、n 点集合上に入る位相の総数や、それらを位相型で分類した時の総数であろう。例えば、3 点集合 $\{x_1, x_2, x_3\}$ に入る位相の総数は 29 通りであるが、これを位相型で分類すると 8 種類になる。位相空間であるからホモトピー型での分類も可能で、上記 29 種類の空間をホモトピー型で分類すると 3 種類になってしまう。3 点でホモトピー型が 3 種類ということは、3 点空間のホモトピー型は連結成分の個数で完全に分類されていることを示している。しかし、このように位相の入れ方の総数などがわかるのは、点の個数が少ない場合であって、一般に n 点集合に入る位相の総数などについては依然として未解決の問題である。

一方で、このような組み合わせ論的*な関心事とは別に、有限位相空間とそれらの間の連続写像に対して、位相空間論的性質や代数トポロジー的性質を論点とする立場もある。代数トポロジー的な見方は、M. C. McCord ([8]) と R. Stong ([11]) に始まるとみてよいが、数年前に J. A. Barmak により [2] が出版されたことは、記憶に新しい。

著者もこの分野でいくつかの仕事を行い、そのうちのいくつかは、大阪大学大学院理学研究科で研究生をされていた河野進氏と共同の仕事であった。その河野進氏が 2015 年 6 月 18 日に 66 歳で永眠された。共同の仕事があったとはいえ、氏がご病気がちになられてからは、新年の挨拶のやりとり程度のお付き合いとなり、この事実を知ったのは 2016 年に入ってからのことだった。いつもご自身の手書きで頂戴していた年賀状が届かないなと思っていたら、氏のお姉様から届いた寒中見舞いで河野進氏が帰天されたことを知った。

*ホモトピー型を考えることがそうであるかは微妙かもしれない。

論文としての体をなしていないとお叱りを受けるかもしれないが、２節では河野氏との昔話も含めながら、主に有限位相空間の代数トポロジーについての基本的結果を振り返る。そして３節では河野氏と共同研究した結果（有限位相空間の同相群について）を振り返り、第４節では、筆者が現在行っている研究の一端を述べさせていただきたいと思う。

2 有限位相空間の代数トポロジーの基本的な結果

有限位相空間の理論においては、しばしば T_0 分離公理が重要になる。一般に位相空間 X が T_0 分離公理を満たすとは、X の異なる２点 x, y に対して、$x \in O$ かつ $y \notin O$ となる開集合 O か $y \in O$ かつ $x \notin O$ となる開集合 O の一方が常に取れることを言う。ちなみに、X の異なる２点 x, y に対して、$x \in O$ かつ $y \notin O$ となる開集合 O と $y \in O$ かつ $x \notin O$ となる開集合 O の両方が常に取れてしまうと、すなわち X が T_1 分離公理を満たすと X は離散空間になり、それほど興味あることは得られない。以後、T_0 分離公理を満たす有限位相空間を有限 T_0 空間ということにする。

有限位相空間 X には、各点を含む最小の開集合が存在する。$x \in X$ を含む最小開集合を U_x と書くことにする。そうすると、X が有限 T_0 空間 であれば、X の２点 x, y に対して

$$x \leq y \underset{\text{def}}{\iff} x \in U_y \tag{1}$$

なる関係を入れると、これにより X 上に順序が定義されることになる。もちろん一般の有限位相空間においても、上記 (1) の関係を考えることは可能である。ただ、この場合 X は対称律を満たさず、$(x, \leq)$ はいわゆる前順序集合となる。

有限 T_0 空間 は位相の個数の計算においても重要である。実は、有限点集合に入る位相の個数の計算は有限 T_0 空間 の個数に帰着されることが知られていて、次の Evance-Harary-Lynn の公式が成り立つ。

命題 2.1 ([4]). $T(n)$ を n 点集合上に入る位相の総数、$T_0(m)$ を m 点集合上に入る位相の総数とするとき、

$$T(n) = \sum_{m=1}^{n} S(n, m) T_0(m)$$

が成り立つ。ここで、$S(n, m)$ は第２種 *Stirling* 数である。

前節でも述べたように、有限位相空間についての代数トポロジー的な見方は、M. C. McCord ([8]) と R. Stong ([11]) に始まる。[8] にある主要な定理は次の２つである。

命題 2.2 ([8]). 任意の有限 T_0 空間 X に対して、X の点を頂点とする有限単体的複体 $\mathfrak{K}(X)$ が存在して、X と $|\mathfrak{K}(X)|$ が弱ホモトピー同値になる。

命題 2.3 ([8]). 任意の有限単体的複体 K に対して、K の各単体の重心を点とする有限 T_0 空間 $\mathfrak{K}(X)$ が存在して、$|K|$ と $\mathfrak{K}(X)$ が弱ホモトピー同値になる。

いずれも具体的に構成することで証明される結果であって、単なる存在定理ではない。詳細は [8] に譲るが、ここで T_0 が仮定されている意味を提示するために、有限 T_0 空間 X から $\mathfrak{K}(X)$ を構成する方法と弱ホモトピー同値写像 $f_X : |\mathfrak{K}(X)| \to X$ の定義を述べておきたい。

X が有限 T_0 空間 であるので、(1) で見たように、X は順序集合になる。従って、X の点を頂点とし X のチェイン（全順序部分集合）を単体とする単体的複体、すなわち X の順序複体が定義できる。これが $\mathfrak{K}(X)$ である。さて、$|\mathfrak{K}(X)|$ から任意の点 α をとると、α を内点として含む単体がただ一つ存在する。これを $\sigma = \langle x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_r} \rangle$ とすると、σ はもともと X のチェインであるのだから、$x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ の間には X の順序関係が存在している。そこで、$f_X(\alpha) = \min\{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\}$ と定義するのである。命題 2.2 はこの f_x が弱ホモトピー同値写像であることを実は述べているのである。

さて、有限位相空間のホモトピー型に関する研究は R. Stong によって行われた。論文 ([11]) では、一般の有限位相空間を (1) により前順序集合として捉えることで、様々な結果を得ている。まず、R. Stong の論文では有限位相空間の間の写像の連続性は、次のように前順序集合の言葉に置き換えられている。

命題 2.4. X, Y を有限位相空間とする。$f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は f が前順序集合の間の写像として順序を保つことである。

そして、有限位相空間論で重要な役割を果たす極小有限位相空間などが次のように定義される。

定義 2.5. X を有限位相空間とする。

1. $x \in X$ が線形点 (linear point) であるとは、$y > x$ なる $y \in X$ が存在して、$z > x$ を満たす任意の $z \in X$ に対して、$z \geq y$ が成り立つことを言う。

2. $x \in X$ が余線形点 (colinear point) であるとは、$y < x$ なる $y \in X$ が存在して、$z < x$ を満たす任意の $z \in X$ に対して、$z \leq y$ が成り立つことを言う。

3. X が極小（または、X が極小有限空間）であるとは、X が有限 T_0 空間 であり、線形点も余線形点も持たないことを言う。

4. X の部分空間 A が、X の強収縮変形である極小有限空間である時、X のコアであると言う。

有限 T_0 空間 は順序集合であるから、ハッセ図で表すことができる。言うまでもなく極小有限空間とは、すべての点から上にも下にも２本以上の線が出ているハッセ図を持つ空間のことである。R. Stong は [11] の中で、すべての有限位相空間はコアを持ち、それは同相を除いて一意的であることを示している。なお、R. Stong は極小位相空間のことをコアと呼んでいるが、ここでは Barmak([2]) に従って、極小有限空間と呼ぶことにする。有限位相空間のコアはホモトピー型による空間の分類に重要な役割を果たす。すなわち、次の事実が成り立つ。

命題 2.6. X, Y を有限位相空間、A, B をそれぞれのコアとする。この時、X と Y がホモトピー同値であるための必要十分条件は、A と B が同相であることである。

このことから、もし n 点集合上の入る位相のホモトピー型の個数を調べたければ、n 以下の点を持つ極小有限空間の同相類の個数を調べれば良いことがわかる。

いつだったかは忘れてしまったが、河野氏から頂いたメイルの中に、ある高校の先生たちと n 点集合に入る位相の個数を調べているということが書かれていた。当時の河野氏といえば、セミナーでは stunted lens spaces の安定ホモトピー型などの研究結果を話されていたので、こういうことに興味を持たれていることが意外であった。そのとき、すでにこれらの結果を知っていた著者は、位相の個数の数え上げは未解決な大問題であることをメイルに書き、上記の結果と有限位相空間をブール行列を用いて議論した H. Sharp Jr. の論文 ([9],[10]) を紹介した。意外な結果に驚かれていたことを記憶している。私の記憶に間違いがなければ、これが河野氏と共同研究を始める契機になったと思う。

3 有限位相空間の同相群

河野氏と共著で、有限位相空間に関する論文を３編（[5],[6],[7]）出版させていただいたが、そこからいくつか紹介しておきたい。

有限位相空間への群作用を考えるには、その同相群を考える必要があるとの考えから、われわれは同相群の研究を始めた。有限位相空間 X に対して、その同相群を $\mathrm{Homeo}(X)$ と表し、

コンパクト開位相をいれて位相群とする。詳細は [5] や [6] に委ねるが、一般に Homeo(X) は恒等写像をふくむ連結成分の非交和となり、各連結成分には密着位相が入っている[†]。そして、X が有限 T_0 空間 であることと、Homeo(X) に離散位相が入ること（すなわち、各連結成分が 1 点になっていること）が同値になることが示される。

そうすると、特に Homeo(X) の位相については、X が有限 T_0 空間 でない時が考察対象となる。そこで、有限位相空間 X の各点 x, y に対して、関係を

$$x \sim y \underset{\text{def}}{\iff} U_x = U_y$$

により定義する。ここで、U_x, U_y は x, y を含む最小の開集合である。今後、この関係による商空間 $X/\sim$ を $\hat{X}$ で表す。そして、$\nu_X : X \to \hat{X}$ を自然射影とし、$\nu_X(x) = [x]$ と表すことにする。そうすると、次が成り立つ[‡]。

命題 3.1 ([8]). X を有限位相空間、x をその点とする。

1. x を含む最小の閉集合を C_x とかくとき、$\nu_X^{-1}([x]) = U_x \cap C_x$ が成り立つ。

2. $\hat{X}$ は有限 T_0 空間 である。

3. ν_X はホモトピー同値写像である。

一般に、Homeo(X) の構造については Homeo($\hat{X}$) に帰着され、次が成り立つことを [6] で示した。

命題 3.2 ([6]). 上記の記号のもと、$\iota : \prod_{[x]\in\hat{X}} \mathrm{Homeo}(\nu_X^{-1}([x])) \to \mathrm{Homeo}(X)$ を $\nu_X^{-1}([x])$ から X への各包含写像から定る写像、$\pi : \mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Homeo}(\hat{X})$ を $\nu_X : X \to \hat{X}$ から定る写像とするとき、

$$1 \longrightarrow \prod_{[x]\in\hat{X}} \mathrm{Homeo}(\nu_X^{-1}([x])) \xrightarrow{\ \iota\ } \mathrm{Homeo}(X) \xrightarrow{\ \pi\ } \mathrm{Homeo}(\hat{X})$$

は位相群の間の完全系列である。

さらに、Homeo($\hat{X}$) の部分群 $\mathrm{Homeo}_X(\hat{X})$ を

$$\mathrm{Homeo}_X(\hat{X}) = \left\{ f \in \mathrm{Homeo}(\hat{X}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \#f([x]) = \#[x] \text{ for every } [x] \in \hat{X}, \\ \text{ここで個数は } X \text{ の部分集合として数える。} \end{array} \right\}.$$

[†]位相群の定義の中に Hausdorff 空間であることを仮定することがあるが、ここではそれは仮定しない。位相空間が群構造を持ち、演算が連続であるものを位相群と呼ぶ。

[‡]この命題と命題 により、任意の有限位相空間 X に対し、ある単体的複体 K が存在して、X と $|K|$ が弱ホモトピー同値となることがわかる。

と定義するとき、$\mathrm{Homeo}_X(\hat{X}) = \mathrm{Image}(\pi)$ となることが示され、結果として位相群の間の完全系列

$$1 \longrightarrow \prod_{[x]\in\hat{X}} \mathrm{Homeo}(\nu_X^{-1}([x])) \xrightarrow{\iota} \mathrm{Homeo}(X) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Homeo}_X(\hat{X}) \longrightarrow 1$$

が成立する。

続いて [7] では、X に位相群 G が作用している場合について、その不動点集合の同相群について研究を行った。すなわち、不動点集合について制限して考えるとき、次が成り立つ。

命題 3.3 ([7]). X を有限位相空間、G を X に作用する位相群とするとき、位相群の間の次の完全系列が成り立つ。

$$1 \longrightarrow \prod_{[x]\in\hat{X}} \mathrm{Homeo}(\nu_X^{-1}([x])^G) \xrightarrow{\iota^G} \mathrm{Homeo}(X^G) \xrightarrow{\pi^G} \mathrm{Homeo}(\hat{X^G})_{X^G} \longrightarrow 1.$$

G が X に連続に作用するとき、G の $\mathrm{Homeo}(X)$ への作用 $\psi : G \times \mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Homeo}(X)$ を $\psi(g,f) = \Phi(g) \circ f \circ \Phi(g^{-1})$ で定義することができる。ここで、$g \in G, f \in \mathrm{Homeo}(X)$ であり、$\Phi : G \to \mathrm{Homeo}(X)$ は準同型写像である。この作用のもとでの同相群の不動点集合については、次の結果を得ていた。

命題 3.4 ([7]). X を位相群 G の作用を持つ有限位相空間とし、G の $\mathrm{Homeo}(X)$ への作用を上記のものとするとき、位相群の間の次の完全系列が成り立つ。

$$1 \longrightarrow \prod_{[x]\in\hat{X}} \mathrm{Homeo}(\nu_X^{-1}([x]))^G \xrightarrow{\iota^G} \mathrm{Homeo}(X)^G \xrightarrow{\pi^G} \mathrm{Homeo}(\hat{X})_X^G$$

この他にも色々と計画していたものもあったが、筆者の力不足により河野氏の存命中に形にできなかったことをもどかしく思う。

4 有限位相空間とボルスク・ウラムの定理

有限位相空間については、河野氏との研究の後も、著者は少しずつではあるが続けてきた。ここで、有限位相空間について最近著者が行っている研究について、紹介しておきたい。一部、京都府立医科大学の長崎氏、大阪大学の原氏と共同で行っている内容を含む。

現在行っている研究の 1 つは有限位相空間版のボルスク・ウラムの定理である。球面に代わるものとして、球面と弱ホモトピー同値な有限位相空間を持ってくることで、ボルスク・ウラム型の結果を得ようというものである。まず、Barmak([2]) にならって次の定義を与える。

定義 4.1. X を空間とする。有限位相空間 Y が X と弱ホモトピー同値である時、Y を X の有限モデルという。また、Y が X の最小頂点数の有限モデルである時、Y を X の極小有限モデルという。

一般に空間が与えられた時、その極小有限モデルを決定することは難しいが、Barmak は球面の極小有限モデルを決定した。我々の有限位相空間版のボルスク・ウラムの定理を述べる前に、準備としてこれを紹介しておきたい。

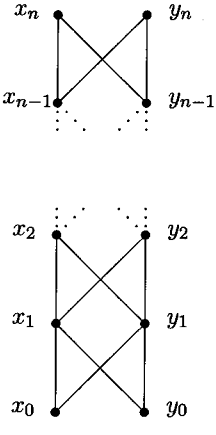
定義 4.2. X, Y を有限 T_0 空間 とする。

1. X と Y の non-Hausdorff join $X \circledast Y$ とは、集合としては $X \sqcup Y$ と等しく、そこに X, Y 内の元々の順序に加えて、$x \in X$ と $y \in Y$ に対して常に $x \leq y$ という順序を定めた順序集合（従って有限 T_0 空間）を言う。

2. $Y = S^0$、すなわち、Y が離散位相を持つ 2 点集合の時、$\mathbb{S}(X) = X \circledast S^0$ を X の non-Hausdorff suspension という。X の n 次 non-Hausdorff suspension $\mathbb{S}^n(X)$ を帰納的に、$\mathbb{S}^n(X) = \mathbb{S}(\mathbb{S}^{n-1}(X)), \mathbb{S}^0(X) = X$ により定める。

この時、次が Barmak により示された。

命題 4.3 ([1]). $\mathbb{S}^n(S^0)$ は n 次元球面 S^n の極小有限モデルであり、このモデルは一意的である。



今後これを $\mathrm{F}_{min}(S^n)$ と書くことにする。$\mathrm{F}_{min}(S^n)$ のハッセ図は上のようになる。一番下のレベルの x_0, y_0 が $\mathbb{S}^n(S^0)$ の記法の中にある S^0 であり、それに次々と $\{x_i, y_i\}$ の 2 点集合を懸垂していくことで、$\mathrm{F}_{min}(S^n)$ を得ているのである。ちなみに、$|\mathfrak{K}(\mathrm{F}_{min}(S^n))|$ は $n = 1$ の時に

は四角形、$n=2$ の時には8枚の三角形で囲まれた閉曲面（正八面体と思えば良い）となり、多面体における懸垂と直感的に合致する。

今、有限順序集合 X に対して、その高さ $ht(X)$ を X の最長のチェインの元の個数から1を引いたものとして定義する。例えば、$ht(\mathrm{F}_{min}(S^n))=n$ である。そして、X の各点 x に対して、高さ $ht(x)$ を $ht(x)=ht(U_x)$ で定義する。同相写像は各点の高さを変えないので、$\mathrm{F}_{min}(S^n)$ には2次巡回群 C_2 が x_i と y_i の行き来により自由に作用することがわかる。この時、次の結果を得た。

定理 4.4. m,n を正の整数とする。C_2 が $\mathrm{F}_{min}(S^m)$ と $\mathrm{F}_{min}(S^n)$ に上記のように自由に作用している時、連続な C_2 写像 $f:\mathrm{F}_{min}(S^m)\to\mathrm{F}_{min}(S^n)$ が存在すれば、$m\leqq n$ である。

証明: 集合として $\mathrm{F}_{min}(S^m)=\{x_0,x_1,\ldots,x_m,y_0,y_1,\ldots,y_m\}$、とし、$x_0<x_1<\cdots<x_m$ と $y_0<y_1<\cdots<y_m$ を $\mathrm{F}_{min}(S^m)$ の極大な2つのチェインとする。$C_2=\langle g\rangle$ とおけば、$0\leqq i\leqq m$ に対して、$y_i=g\cdot x_i$ と $x_i=g\cdot y_i$ を満たす。

$m>n$ であると仮定して矛盾を導く。$f:\mathrm{F}_{min}(S^m)\to\mathrm{F}_{min}(S^n)$ は連続であるから、チェインをチェインに移す。$m>n$ であるのでチェイン $f(x_0<x_1<\cdots<x_m)$ の長さは m より小さくなければならず、そのためある $0\leqq i\leqq m$ が存在して、$f(x_i)=f(x_{i+1})$ となる。しかも、$\mathrm{F}_{min}(S^m)$ の作り方から、$x_{i+1}>y_i$ も成り立っている。そうすると、f の連続性より

$$f(x_i)=f(x_{i+1})\geq f(y_i)=f(g\cdot x_i)=g\cdot f(x_i)$$

となる。この式の最左辺と最右辺に g を作用させると、作用の連続性より、$g\cdot f(x_i)\geq f(x_i)$ も得られ、結局 $g\cdot f(x_i)=f(x_i)$ となる。しかし、これは $\mathrm{F}_{min}(S^n)$ に C_2 が自由に作用しているという仮定に反する。

□

上の定理は C_2 作用のボルスク・ウラムの定理であるが、C_n 作用の場合にも C_n が自由に作用する有限モデルを用いることで、同様の結果が証明される。また、チェインは連続写像でチェインに移ることを用いると、上の定理4.4は次のように拡張される。

定理 4.5. m を正の整数とする。X を C_2 が自由に作用している有限位相空間とする。C_2 が $\mathrm{F}_{min}(S^m)$ に自由に作用している時、連続は C_2 写像 $f:\mathrm{F}_{min}(S^m)\to\mathrm{F}_{min}(S^n)$ が存在すれば、$m\leqq ht(X)$ である。

5 最後に

思い起こすと、河野氏との最初の出会いは、大学4年の時であったと思う。川久保先生のゼミでBredonの教科書([3])を読んでいたところに、参加してくださった。それ以来色々とお世話になったし、ご研究を邁進されるお姿に刺激を受けたりした。また、面倒見のいい、そのお人柄に大いに感銘を受けた。最後になったが、河野進氏との出会いと、一緒に研究をさせていただいたことに感謝したい。

参考文献

[1] J. A. Barmak and E.G. Minian, *Minimal finite models*, J. Homotopy Relat. Struct. **2** (2007), No. 1, 127–140.

[2] J. A. Barmak, Algebraic topology of finite topological spaces and applications, Lecture Notes in Mathematics 2032, Springer, 2011.

[3] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Pure and Applied Mathematics Vol.46, Academic Press, 1972.

[4] J. W Evance , F. Harary and M. S. Lynn, *On the computer enumeration of finite topologies*, Comm. ACM. **10** (1967), 295–298.

[5] Kono, S. and Ushitaki, F., *Geometry of finite topological sapces and equivariant finite topological spaces*, in: Current Trends in Transformation Groups, ed. A. Bak, M. Morimoto and F.Ushitaki, pp. 53–63, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht ,2002 .

[6] Kono, S. and Ushitaki, F., *Homeomorphism groups of finite topological spaces*, RIMS Kokyuroku, **1290** (2002), pp. 131–142.

[7] Kono, S. and Ushitaki, F., *Homeomorphism groups of finite topological spaces and Group actions*, RIMS Kokyuroku, **1343** (2003), pp. 1–9.

[8] M. C. McCord, *Singular homotopy groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke. Math. J. **33** (1966), 465–474.

[9] H. Sharp Jr., *Quasi-orderings and topologies on finite sets*, Proc. Amer. Math.Soc. **17** (1966), 1344–1349.

[10] H. Sharp Jr., *Cardinality of finite topologies*, J.Combin.Theory **5** (1968), 82–86.

[11] R. E. Stong, *Finite topological spaces*, Trans. of Amer. Math. Soc. **123** (1966), 325–340.