数理解析研究所講究録
第2016巻 2017年 182-195

有限群のバーンサイド環の逆極限について

岡山大学大学院自然科学研究科　杉村　匡郁
Masafumi Sugimura
Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

1　イントロダクション

G を有限群とする. $\mathcal{S}(G)$ で G の部分群全体を表し, $\mathcal{F}$ を G-共役不変で部分群に関して閉じた $\mathcal{S}(G)$ の部分集合とする. $\mathfrak{F}$ で objects が $\mathcal{F}$, morphisms が $H,K\in\mathcal{F}$ かつ $g\in G$ に対して $gHg^{-1}\subset K$ を満たすすべての三つ組 $(H,g,K):H\rightarrow K$ であり任意の (H,g,K), $(K,h,L)\in \mathrm{Mor}(\mathfrak{F})$ に対して $(K,h,L)\circ(H,g,K)=(H,hg,L)$ を満たすカテゴリーを表す. $A(G)$ で G のバーンサイド環を表す. すなわち $A(G)$ は有限 G-集合に関するカテゴリーの Grothendieck 群である. このとき, morphism (H,g,K) に対して準同型写像 $(H,g,K)^{*}:A(K)\rightarrow A(H)$ が随伴する. 特に $H\leq K$ であれば, $(H,e,K)^{*}$ は $res_{H}^{K}:A(K)\rightarrow A(H)$ と書かれる. $\alpha=[X]-[Y]\in A(G)$ と $H\in \mathcal{S}(G)$ に対して, 整数 $\chi_{H}(\alpha)$ を $|X^{H}|-|Y^{H}|$ で定める. ここで, X, Y は有限 G-集合で, $|X^{H}|$ は X の H-不動点集合 X^{H} の要素の個数を表す. $P(G,\mathcal{F})=\prod_{H\in\mathcal{F}}A(H)$ とし, $L(G,\mathcal{F})$ でカテゴリー $\mathfrak{F}$ に随伴する逆極限

$$\lim_{\longleftarrow\mathfrak{F}}A(-)\quad\left(\subset\prod_{H\in\mathcal{F}}A(H)\right)$$

を表す. ここで $\lim_{\longleftarrow\mathfrak{F}}A(-)$ は

$$\{(x_{H})\in P(G,\mathcal{F})\mid(P,g,Q)^{*}x_{Q}=x_{P}\ \mathrm{for}\ \forall(P,g,Q)\in \mathrm{Mor}(\mathfrak{F})\}$$

で定められる集合である. 制限準同型写像 $res_{H}^{G}:A(G)\rightarrow A(H)$ は準同型写像 $res_{\mathcal{F}}:A(G)\rightarrow A(\mathfrak{F})$ を誘導し, $Im(res_{\mathcal{F}})\subset L(G,\mathcal{F})$ がすぐに分かる. そこで, $B(G,\mathcal{F})=Im(res_{\mathcal{F}})$ とし, 完全列

$$L(G,\mathcal{F})/B(G,\mathcal{F})\hookrightarrow P(G,\mathcal{F})/B(G,\mathcal{F})\twoheadrightarrow P(G,\mathcal{F})/L(G,\mathcal{F})$$

を観察する. $P(G,\mathcal{F})$ は自由 $\mathbb{Z}$-加群で, $P(G,\mathcal{F})/L(G,\mathcal{F})$ も自由 $\mathbb{Z}$-加群であることがわかる. ここで, $\mathbb{Z}$ は有理整数環である. このとき $B(G,\mathcal{F})$ が $L(G,\mathcal{F})$ に一致するかどうかを調べることは興味深い. [1] ではこの問題についていくつかの結果を得ており, 以下に興味深い結果を紹介する. $\mathcal{F}_{G}=\mathcal{S}(G)\backslash\{G\}$ とする.

命題 1.1. p を素数, m を正の整数とし, G を 位数 p^{m} の巡回群とする. このとき, $L(G,\mathcal{F})/B(G,\mathcal{F})$ は 加群として $\mathbb{Z}_{p}^{\oplus m-1}$ に同型である.

命題 1.2. G を有限べき零群とする. このとき, $B(G,\mathcal{F})$ が $L(G,\mathcal{F})$ に一致するための必要十分条件は, G の位数が相異なる素数の積であることである.

上の命題 1.1 〜命題 1.2 を動機として，本論文では p を素数，m と n を正の整数とし，$G = C_{p^m} \times C_{p^n}$ に対して $B(G, \mathcal{F})$ と $L(G, \mathcal{F})$ が一致するかどうかを考察していく．本論文における主結果は以下の 2 つである．

定理 1.3. p を素数，m を正の整数とする．$G = C_{p^m} \times C'_p$ ならば，$Q(G, \mathcal{F}) \cong Z_p^{p(m-1)+1}$ である．

定理 1.4. p を素数，m を 2 以上の正の整数とする．$G = C_{p^m} \times C'_{p^2}$ ならば，$Q(G, \mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}_p^{(m-2)(p^2+1)+p^2+p+2}$ である．

2 バーンサイド環の定義

G を有限群とする．有限 G-集合 X の同値類 $[X]$ を

$$[X] = [Y] \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} |X^H| = |Y^H| \ (\forall H \geq G)$$

により定義する．このとき, 差 $[X_1] - [X_2]$ を考え，

$$A(G) = \{[X_1] - [X_2] \mid X_1, X_2 : \text{有限}\, G\text{-集合}\,\}$$

と定める．ただし，

$$\begin{aligned}[X_1] - [X_2] = [Y_1] - [Y_2] &\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} [X_1 \amalg Y_2] = [Y_1 \amalg X_2] \\ &\Leftrightarrow |X_1^H \amalg Y_2^H| = |Y_1^H \amalg X_2^H| \quad (\forall H \leq G)\end{aligned}$$

とする．さらに，$[X_1] - [X_2]$, $[Y_1] - [Y_2] \in A(G)$ の和と積を

$$([X_1] - [X_2]) + ([Y_1] - [Y_2]) \overset{def}{=} [X_1 \amalg Y_1] - [X_2 \amalg Y_2]$$

$$([X_1] - [X_2])([Y_1] - [Y_2]) \overset{def}{=} [(X_1 \times Y_1) \amalg (X_2 \times Y_2)] - [(X_1 \times Y_2) \amalg (X_2 \times Y_1)]$$

と定義する．X , Y が G-集合のとき, $X \times Y$ には

$$g(x, y) = (gx, gy)$$

により, G-作用を定める．この作用を**対角作用** (diagonal action) と呼ぶ．上の積は, この対角作用によるものである．$A(G)$ において $[X] - [\emptyset]$ を $[X]$ で表す，ただし $\emptyset$ は空集合を表す．

定義 1. 上の加法と乗法を持つ環 $A(G)$ を**バーンサイド環** (Burnside ring) と呼ぶ．

具体的には，$A(G)$ は $\{[G/H] \mid (H) \subset \mathcal{S}(G)\}$ で生成される自由 $\mathbb{Z}$-加群である．ただし，(H) は H の共役類を表し，$\mathcal{S}(G)$ は G の部分群全体を表す．また，任意の有限 G-集合 X は

$$G/H_1 \amalg G/H_2 \amalg \cdots \amalg G/H_m \qquad (m = |X/G|)$$

と同型であるので，$A(G)$ は

$$\left\{ \sum_{(H) \subset \mathcal{S}(G)} a_H [G/H] \;\middle|\; a_H \in \mathbb{Z} \right\}$$

と書くことができる．

3 研究の動機

$\mathcal{F}$ と $\mathfrak{F}$ を §1 でそれぞれ定めたものとし，$\mathcal{F}_G = S(G) \setminus \{G\}$ とする．$L'(G,\mathcal{F}) = \{x \in P(G,\mathcal{F}) \mid nx \in B(G,\mathcal{F}) \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}$ と定める．次の定理が知られている．

定理 3.1. $L(G,\mathcal{F}) = L'(G,\mathcal{F})$ が成り立つ．

$P(G,\mathcal{F})/B(G,\mathcal{F})$ は

$$P(G,\mathcal{F})/B(G,\mathcal{F}) \cong P(G,\mathcal{F})/L(G,\mathcal{F}) \oplus L(G,\mathcal{F})/B(G,\mathcal{F})$$

と直和分解できる．$L(G,\mathcal{F})$ は $P(G,\mathcal{F})$ の直和因子であるので $P(G,\mathcal{F})/L(G,\mathcal{F})$ は torsion free であり，また上の 3.1 から $L(G,\mathcal{F})/B(G,\mathcal{F})$ は有限群である．ここでは，torsion part である $L(G,\mathcal{F})/B(G,\mathcal{F})$ について考察することに興味があり，$Q(G,\mathcal{F}) = L(G,\mathcal{F})/B(G,\mathcal{F})$ を考察していく．次の結果が知られている．

命題 3.2 (Y.Hara, M.Morimoto [1]). 4 次の交代群 $G = A_4$ に対して，$Q(G,\mathcal{F}_G) = 0$ が成り立つ．すなわち $B(G,\mathcal{F}) = L(G,\mathcal{F})$ が成り立つ．

定理 3.3 (M.Sugimura). 5 次の交代群 $G = A_5$ に対して，$Q(G,\mathcal{F}_G) = 0$ が成り立つ．すなわち $B(G,\mathcal{F}) = L(G,\mathcal{F})$ が成り立つ．

4 定理 1.4 の証明

C_{p^m}，C'_p をそれぞれ位数 p^m，p の巡回群とし，$G = C_{p^m} \times C'_p$ とする．(C_{p^m} と明確に区別するために　C'_p と表記することにする．)

4.1 G の部分群について

a を C_{p^m} の生成元，b を C'_p の生成元とする．このとき，G の位数 p^k $(k = 0,1,2,\cdots,m-1)$ の部分群を以下のように定める．

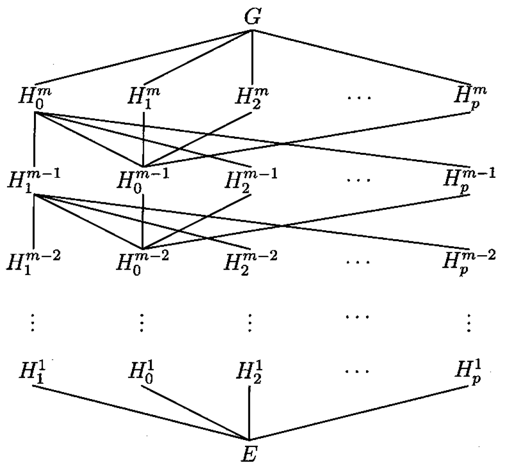
(1) $\langle (a^{p^{m-k}}, b^l) \rangle$ $(l = 0,1,2,\cdots,p-1)$

(2) $\langle (a^{p^{m-k+1}}, e), (e,b) \rangle \cong C_{p^{k-1}} \times C'_p$

すなわち，G の位数 p^k $(k = 1,2,\cdots,m)$ の部分群はそれぞれ $p+1$ 個存在する．この部分群の個数についての命題と必要な補題を紹介する．

補題 4.1. G を位数 n の巡回群とし，正の整数 m を n の約数とする．このとき，G に位数 m の巡回部分群が唯一つ存在する．

H_i^k $(k = 1,2,\cdots,m, i = 0,1,\cdots,p)$ で位数 p^k の i 番目の部分群を表すと，以下のような G の部分群のなすダイアグラムが完成する．



4.2 $res^G_{\mathcal{F}}$ の表の作成

$\mathcal{F}_{max}$ で G の極大部分群の集合を表す．$K \in \mathcal{F}_{max}$ とすると，$H \in \mathcal{F}$ ($|H| \leq |K|$) に対して，

$$res^G_K[G/H] = \begin{cases} p[K/H] & (H \subset K) \\ [K/(K \cap H)] & (H \not\subset K) \end{cases}$$

が成り立つ．ここで $N = H_0^{m-1} = \displaystyle\bigcap_{i=0,1,\cdots,p-1} H_i^m$ とし，

$$\mathcal{F}_1 = \{H \in S(G) \mid H \neq G, H \supset N\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{H \in S(G) \mid H \not\supset N\}$$

と定め，集合 $\mathcal{G}$ を

$$\mathcal{G} = \{(K, L) \mid K \in \mathcal{F}_{max}, L \in S(K)\}$$

と定める．$a_{H,(K,L)}$ を $res^G_K[G/H]$ の $[K/L]$ の係数とし，行列

$$M = \Big[a_{H,(K,L)}\Big]_{H \in S(G), (K,L) \in \mathcal{G}}$$

を求め，M の行に関する基本変形と列の順序の入れ替えを用いて $Q(G)$ の計算を行う．ここで，$\mathcal{G}$ を次のような $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ の disjoint union に分ける．

$$\mathcal{G}_1 = \{(K, L) \in \mathcal{G} \mid L \in \mathcal{F}_1\},$$
$$\mathcal{G}_2 = \{(K, L) \in \mathcal{G} \mid L \in \mathcal{F}_2\}.$$

上の行列 M の行と列の順序は以下のようにとる．

- 行 $H \in S(G)$ の順序は，H の位数が大きいほうの順序が先になるようにとる．

- 列 $(K,L)\in\mathcal{G}$ は，$\mathcal{G}_1$ の要素の順序が先で，$\mathcal{G}_2$ の要素の順序があとになるようにする．
- $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$ の各々については，(K,L) の辞書式順序になるようにする．
- $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$ の各々において，同じ $K\in\mathcal{F}_{max}$ をもつ (K,L) に対しては，L の位数が大きいほうの順序が先になるようにする．

上のように順序を定めた行列

$$M=\begin{bmatrix} \left[a_{H,(K,L)}\right]_{H\in\mathcal{F}_1,(K,L)\in\mathcal{G}_1} & \left[a_{H,(K,L)}\right]_{H\in\mathcal{F}_1,(K,L)\in\mathcal{G}_2} \\ & \\ \left[a_{H,(K,L)}\right]_{H\in\mathcal{F}_2,(K,L)\in\mathcal{G}_1} & \left[a_{H,(K,L)}\right]_{H\in\mathcal{F}_2,(K,L)\in\mathcal{G}_2} \end{bmatrix}$$

を具体的に書いたものを巻末に付録として付けている．

4.3 $Q(G,\mathcal{F})$ の計算

$$M=\begin{bmatrix} M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)} & M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_2)} \\ M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_1)} & M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)} \end{bmatrix}$$

とする．$M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_2)}=O, M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_1)}=O$ なので，$M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)}$ と $M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)}$ について基本変形を行って $Q(G,\mathcal{F})$ を求める．$Q(G,\mathcal{F})$ のうち $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_1$ に制限したものを $Q(G,\mathcal{F}_1)$，$\mathcal{F}_2$ に制限したものを $Q(G,\mathcal{F}_2)$ とする．

まず，$Q(G,\mathcal{F}_1)$ の計算を行う．M の $M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)}$ にあたるものが以下の表である．

	H_0^m	H_1^m	H_2^m	$\cdots$	H_p^m	H_0^m	H_1^m	H_2^m	$\cdots$	H_p^m
	$[H_0^m/H_0^m]$	$[H_1^m/H_1^m]$	$[H_2^m/H_2^m]$	$\cdots$	$[H_p^m/H_p^m]$	$[H_0^m/H_0^{m-1}]$	$[H_1^m/H_0^{m-1}]$	$[H_2^m/H_0^{m-1}]$	$\cdots$	$[H_p^m/H_0^{m-1}]$
$[G/G]$	1	1	1	$\cdots$	1	0	0	0	$\cdots$	0
$[G/H_0^m]$	p	0	0	$\cdots$	0	0	1	1	$\cdots$	1
$[G/H_1^m]$	0	p	0	$\cdots$	0	1	0	1	$\cdots$	1
$[G/H_2^m]$	0	0	p	$\cdots$	0	1	1	0	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$[G/H_p^m]$	0	0	0	$\cdots$	p	1	1	1	$\cdots$	1
$[G/H_0^{m-1}]$	0	0	0	$\cdots$	0	p	p	p	$\cdots$	p

この表の成分を行列 $M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)}$ として取り出す．表の $[G/H_i^k]$ の行に対応する $M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)}$

の行ベクトルを $\boldsymbol{v}_i^k$ とする．

$$M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_G \\ \boldsymbol{v}_0^m \\ \boldsymbol{v}_1^m \\ \boldsymbol{v}_2^m \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_p^m \\ \boldsymbol{v}_0^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & p & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & p & p & \cdots & p \end{bmatrix}$$

この行列を行に関する基本変形で変形し，次のような行列 $N_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)}$ を得る．

$$N_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_G \\ \boldsymbol{w}_0^m \\ \boldsymbol{w}_1^m \\ \boldsymbol{w}_2^m \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_p^m \\ \boldsymbol{w}_0^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p & 0 & \cdots & -p & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -p & \cdots & -p & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -p & 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & p & p & \cdots & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

以上より，

$$\begin{aligned} B(G,\mathcal{F}_1) &= \langle \boldsymbol{w}_G, \boldsymbol{w}_0^m, \boldsymbol{w}_1^m, \boldsymbol{w}_2^m, \cdots, \boldsymbol{w}_p^m, \boldsymbol{w}_0^{m-1} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{w}_G, \boldsymbol{w}_0^m, \boldsymbol{w}_1^m, \boldsymbol{w}_2^m, \cdots, \boldsymbol{w}_p^m \rangle \end{aligned}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_p^{m\prime} &= \frac{1}{p}\boldsymbol{w}_p^m \\ &= [0,0,0,\cdots,0,1,1,1,\cdots,1] \end{aligned}$$

とすると，

$$\boldsymbol{w}_p^m \in B(G,\mathcal{F}_1) \subset L(G,\mathcal{F}_1) \text{ かつ } \boldsymbol{w}_p^{m\prime} \in L(G,\mathcal{F}_1)$$

が言えるので，

$$Q(G,\mathcal{F}_1) \cong \mathbb{Z}_p$$

を得る．この結果は次の命題からも得ることができる．

命題 4.2 (Y.Hara, M.Morimoto [1]). p を素数，G を 位数 p^2 の *elementary* アーベル p-群，すなわち $G \cong C_p \times C_p$ とする．このとき，$L(G,\mathcal{F})/B(G,\mathcal{F})$ は加群として $\mathbb{Z}_p$ に同型である．

次に $Q(G,\mathcal{F}_2)$ の計算を行う．$M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)}$ のうち $k = 1,2,\cdots,m-1$ に対して $[G/H_1^k]$, $[G/H_2^k]$, $\cdots$, $[G/H_p^k]$ の非零である係数の部分を取り出したものが以下の表である．

	H_0^m				H_1^m	H_2^m	$\cdots$	H_p^m
	$[H_0^m/H_1^k]$	$[H_0^k/H_2^k]$	$\cdots$	$[H_0^k/H_p^k]$	$[H_1^m/H_0^{k-1}]$	$[H_2^m/H_0^{k-1}]$	$\cdots$	$[H_p^k/H_0^{k-1}]$
$[G/H_1^k]$	p	0	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	1
$[G/H_2^k]$	0	p	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$[G/H_p^k]$	0	0	$\cdots$	p	1	1	$\cdots$	1

この表の成分を行列 $M^k_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)}$ として取り出す．表の $[G/H_i^k]$ の行に対応する $M^k_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)}$ の行ベクトルを $\boldsymbol{v}_i^k$ とする．

$$M^k_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^k \\ \boldsymbol{v}_2^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_p^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & p & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

この行列を行に関する基本変形で変形し，次のような行列 $N^k_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)}$ を得る．

$$N^k_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^k \\ \boldsymbol{w}_2^k \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_p^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -p & p & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p & 0 & \cdots & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

これが，$k = 1, 2, \cdots, m-1$ に対して成り立つ．よって，

$$B(G,\mathcal{F}_2) = \langle \boldsymbol{w}_1^{m-1}, \cdots, \boldsymbol{w}_p^{m-1}, \boldsymbol{w}_0^{m-2}, \boldsymbol{w}_1^{m-2}, \cdots, \boldsymbol{w}_p^{m-2}, \cdots, \boldsymbol{w}_0^1, \boldsymbol{w}_1^1, \cdots, \boldsymbol{w}_p^1, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{E}} \rangle$$

である．ここで，$k = 1, 2, \cdots, m-1$，$i = 2, 3, \cdots, p$ に対して

$$\boldsymbol{w}_i^{k\prime} = \frac{1}{p}\boldsymbol{w}_i^k$$

とすると

$$\boldsymbol{w}_i^k \in B(G,\mathcal{F}_2) \subset L(G,\mathcal{F}_2) \text{ かつ } \boldsymbol{w}_i^{k\prime} \in L(G,\mathcal{F}_2)$$

が言える．$\boldsymbol{v}_0^k$ $(k = 1, 2, \cdots, m-2)$, $\boldsymbol{v}_i^1$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$，$\boldsymbol{v}_0^0$ の非零成分はすべて p であるので，したがって

$$Q(G,\mathcal{F}_2) \;\cong\; \mathbb{Z}_p^{p(m-1)}$$

を得る．

以上により，$Q(G,\mathcal{F}_1)$ と $Q(G,\mathcal{F}_2)$ を計算することができたので，

$$\begin{aligned} Q(G,\mathcal{F}) &\cong Q(G,\mathcal{F}_1) \times Q(G,\mathcal{F}_2) \\ &\cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^{p(m-1)} \\ &\cong \mathbb{Z}_p^{p(m-1)+1} \end{aligned}$$

を得る．これにより，定理 1.3 が証明された．

5 定理 1.4 の証明

C_{p^m}，C_{p^2} をそれぞれ位数 p^m，p^2 の巡回群とし，$G = C_{p^m} \times C'_{p^2}$ とする．(C_{p^m} と明確に区別するために C'_{p^2} と表記することにする．)

5.1 G の部分群について

a を C_{p^m} の生成元，b を C'_{p^2} の生成元とする．このとき，G の位数 p^k $(k = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$ の部分群を以下のように定める．

(1) 位数 p^{m+1} の部分群

- $\langle (a, e), (e, b^p) \rangle \cong C_{p^m} \times C'_p$
- $\langle (a^p, e), (e, b) \rangle \cong C_{p^{m-1}} \times C'_{p^2}$
- $\langle (a, b^i), (e, b^p) \rangle$ $(i = 1, 2, \cdots, p-1)$

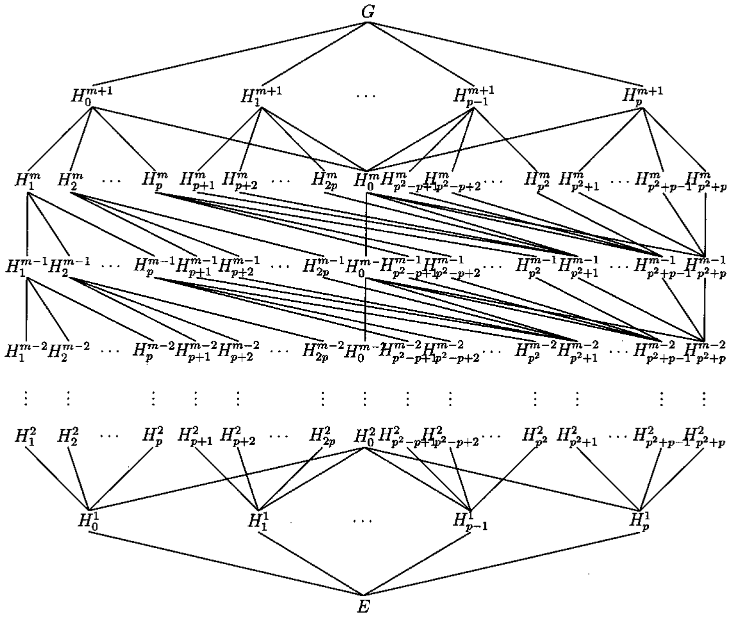
(2) 位数 p の部分群

- $\langle a^{p^{m-1}} \rangle \cong C_p$
- $\langle b^p \rangle \cong C'_p$
- $\langle (a^{p^{m-1}}, b^{ip}) \rangle$ $(i = 1, 2, \cdots, p-1)$

(3) 位数 p^k $(k = 2, 3, \cdots, m)$ の部分群

- $\langle (a^{p^{m-k+2}}, e), (e, b) \rangle \cong C_{p^{k-2}} \times C'_{p^2}$
- $\langle (a^{p^{m-k}}, b^i) \rangle$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, p^2-1)$
- $\langle (a^{p^{m-k+1}}, b^i), (e, b^p) \rangle$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, p-1)$

各位数の部分群の個数については，$G = C_{p^m} \times C_p$ の場合と同様の方法で m に関する帰納法を用いて証明することが出来る．ここで，H_i^k $(k = 1, 2, \cdots, m, i = 0, 1, \cdots, p)$ で位数 p^k の i 番目の部分群を表す．G の部分群のなすダイアグラムは以下のようになる．



5.2 $Q(G,\mathcal{F})$ の計算

$res_{\mathcal{F}}^{G}$ の表とそれから得られる行列 M は省略する．$Q(G,\mathcal{F})$ については，§4 と同様の計算で求めることができ，

$$\begin{aligned} Q(G,\mathcal{F}) &\cong Q(G,\mathcal{F}_1)\times Q(G,\mathcal{F}_2) \\ &\cong \mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p^{(m-2)(p^2+1)+p^2+p+1} \\ &\cong \mathbb{Z}_p^{(m-2)(p^2+1)+p^2+p+2} \end{aligned}$$

が得られる．これにより，定理 1.4 が証明された．

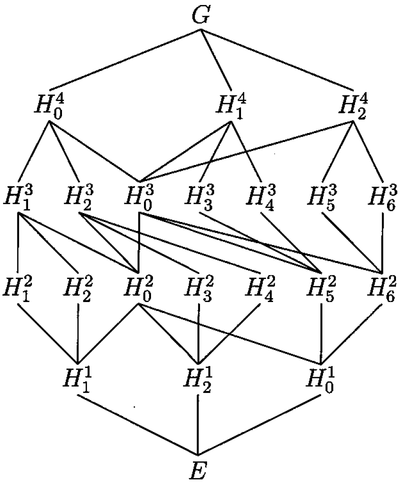
6 具体例

ここで具体例として $G=C_8\times C_4$ の場合に $Q(G,\mathcal{F})$ を計算する．

C_8，C_4' をそれぞれ位数 8，4 の巡回群とし，$G=C_8\times C_4'$ とする．(C_8 と明確に区別するために C_4' と表記することにする．)

6.1 G の部分群について

a を C_8 の生成元，b を C_4' の生成元とする．H_i^k $(k=1,2,\cdots,m,i=0,1,\cdots,p)$ で位数 p^k の i 番目の部分群を表す．G の部分群のなすダイアグラムは以下のようになる．



このダイアグラムをもとに各 $res_K^G[G/H]$ $(H, K \leq G)$ を計算して表を作成し，4.2 の行列 M の作成の規則に従って次の表を得る．

	$res^G_{H_0^4}$	$res^G_{H_1^4}$	$res^G_{H_2^4}$	$res^G_{H_0^4}$	$res^G_{H_1^4}$	$res^G_{H_2^4}$	$res^G_{H_0^4}$													$res^G_{H_1^4}$									$res^G_{H_2^4}$								
	H_0^4	H_1^4	H_2^4	H_0^3	H_0^3	H_0^3	H_1^3	H_2^3	H_0^2	H_1^2	H_2^2	H_3^2	H_4^2	H_5^2	H_6^2	H_0^1	H_1^1	H_2^1	E	H_3^3	H_4^3	H_0^2	H_1^2	H_2^2	H_0^1	H_1^1	H_2^1	E	H_5^3	H_6^3	H_0^2	H_1^2	H_2^2	H_0^1	H_1^1	H_2^1	E
G	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H_0^4	2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H_1^4	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H_2^4	0	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H_0^3	0	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H_1^3	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
H_2^3	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
H_3^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
H_4^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
H_5^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
H_6^3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
H_0^2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
H_1^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
H_2^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
H_3^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
H_4^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
H_5^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
H_6^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
H_0^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
H_1^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
H_2^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2

$$M = \begin{bmatrix} M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)} & M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_2)} \\ M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_1)} & M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)} \end{bmatrix}$$

とする．$M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_2)} = O, M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_1)} = O$ なので，$M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)}$ と $M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)}$ について基本変形を行って $Q(G,\mathcal{F})$ を求める．$Q(G,\mathcal{F})$ のうち $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_1$ に制限したものを $Q(G,\mathcal{F}_1)$，$\mathcal{F}_2$ に制限したものを $Q(G,\mathcal{F}_2)$ とする．$M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)}$ を行に関する基本変形で変形し，次のような行列 $N_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)}$ を得る．

$$M_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_G} \\ \boldsymbol{v_0^4} \\ \boldsymbol{v_1^4} \\ \boldsymbol{v_2^4} \\ \boldsymbol{v_0^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{基本変形}}{\rightsquigarrow} N_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}_1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w_G} \\ \boldsymbol{w_0^4} \\ \boldsymbol{w_1^4} \\ \boldsymbol{w_2^4} \\ \boldsymbol{w_0^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以上より，

$$B(G,\mathcal{F}_1) = \langle \boldsymbol{w_G}, \boldsymbol{w_0^4}, \boldsymbol{w_1^4}, \boldsymbol{w_2^4} \rangle$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w_2^{4\prime}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{w_2^4} \\ &= [0,0,0,1,1,1], \end{aligned}$$

とすると，

$$\boldsymbol{w_2^4} \in B(G,\mathcal{F}_1) \subset L(G,\mathcal{F}_1) \text{ かつ } \boldsymbol{w_2^{4\prime}} \in L(G,\mathcal{F}_1)$$

が言えるので，

$$Q(G,\mathcal{F}_1) \;\cong\; \mathbb{Z}_2$$

を得る．次に，$M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)}$ を行に関する基本変形で変形し，次のような行列 $N_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)}$ を得る．

$$M_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}_2)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1^3} \\ \boldsymbol{v_2^3} \\ \boldsymbol{v_3^3} \\ \boldsymbol{v_4^3} \\ \boldsymbol{v_5^3} \\ \boldsymbol{v_6^3} \\ \boldsymbol{v_0^2} \\ \boldsymbol{v_1^2} \\ \boldsymbol{v_2^2} \\ \boldsymbol{v_3^2} \\ \boldsymbol{v_4^2} \\ \boldsymbol{v_5^2} \\ \boldsymbol{v_6^2} \\ \boldsymbol{v_0^1} \\ \boldsymbol{v_1^1} \\ \boldsymbol{v_2^1} \\ \boldsymbol{v_E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{bmatrix}$$

$$
\overset{\text{基本変形}}{\rightsquigarrow} N_{(\mathcal{F}_2,G_2)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^3 \\ \boldsymbol{w}_2^3 \\ \boldsymbol{w}_3^3 \\ \boldsymbol{w}_4^3 \\ \boldsymbol{w}_5^3 \\ \boldsymbol{w}_6^3 \\ \boldsymbol{w}_0^2 \\ \boldsymbol{w}_1^2 \\ \boldsymbol{w}_2^2 \\ \boldsymbol{w}_3^2 \\ \boldsymbol{w}_4^2 \\ \boldsymbol{w}_5^2 \\ \boldsymbol{w}_6^2 \\ \boldsymbol{w}_0^1 \\ \boldsymbol{w}_1^1 \\ \boldsymbol{w}_2^1 \\ \boldsymbol{w}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{bmatrix}
$$

以上より，

$$B(G,\mathcal{F}_2)=\langle \boldsymbol{w}_1^3,\boldsymbol{w}_2^3,\boldsymbol{w}_3^3,\boldsymbol{w}_4^3,\boldsymbol{w}_5^3,\boldsymbol{w}_6^3,\boldsymbol{w}_0^2,\boldsymbol{w}_1^2,\boldsymbol{w}_2^2,\boldsymbol{w}_3^2,\boldsymbol{w}_4^2,\boldsymbol{w}_5^2,\boldsymbol{w}_6^2,\quad \boldsymbol{w}_0^1,\boldsymbol{w}_1^1,\boldsymbol{w}_2^1,\boldsymbol{w}_E\rangle$$

である．ここで，

$$\boldsymbol{w}_i^{k\prime}=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}_i^k \text{ for}(k,i)=(3,2),(3,4),(3,6),(2,4),(2,6)$$

とすると，

$$\boldsymbol{w}_i^k\in B(G,\mathcal{F}_1)\subset L(G,\mathcal{F}_1) \text{ かつ } \boldsymbol{w}_i^{k\prime}\in L(G,\mathcal{F}_1) \text{ for above } (k,i)$$

が言える．$\boldsymbol{v}_0^2,\boldsymbol{v}_1^2,\boldsymbol{v}_2^2,\boldsymbol{v}_0^1,\boldsymbol{v}_1^1,\boldsymbol{v}_2^1$, $\boldsymbol{v}_E$ の非零成分はすべて p であるので，

$$Q(G,\mathcal{F}_2)\ \cong\ \mathbb{Z}_2^{12}$$

を得る．

以上により，$Q(G,\mathcal{F}_1)$ と $Q(G,\mathcal{F}_2)$ を計算することができたので，

$$\begin{aligned}Q(G,\mathcal{F}) &\cong Q(G,\mathcal{F}_1)\times Q(G,\mathcal{F}_2)\\ &\cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2^{12}\\ &\cong \mathbb{Z}_2^{13}\end{aligned}$$

を得る．これは，定理1.4 の式に $p=2$，$m=3$ を代入したものに一致する．

7 今後の課題

今後は $G=C_{p^m}\times C_{p^n}$ について，$n=3,4$ について $Q(G,\mathcal{F})$ を計算し，$G=C_{p^m}\times C_{p^n}$ の場合の $Q(G,\mathcal{F})$ の一般化を目指す．$Q(G,\mathcal{F})$ の計算には，G の部分群の個数，部分群の個数の増え方，ダイアグラムなどが重要となってくるため，巡回群という点に注目しながらまずはこれらの性質について調べていくことが課題である．最後に，$n=3$ の場合の $Q(G,\mathcal{F})$ の推測について述べる．

予想 7.1. p を素数，m を 3 以上の正の整数とする．$G=C_{p^m}\times C'_{p^3}$ ならば，$Q(G,\mathcal{F})\cong\mathbb{Z}_p^{(m-2)(p^3+1)+2p^2+2p+3}$ である．

参考文献

[1] Y. Hara and M. Morimoto, The inverse limit of the Burnside ring for a family of subgroups of a finite group, accepted by Hokkaido Mathematical Journal.

A 付録

定理 1.3 の証明に使用した $res_K^G[G/H]$ に関する表を以下に示す.

	H_0^m	H_1^m	H_2^m	⋯	H_p^m	H_0^m	H_1^m	H_2^m	⋯	H_p^m	H_0^m																H_1^m					H_2^m					⋯	H_p^m				
	H_0^m	H_1^m	H_2^m	⋯	H_p^m	H_0^{m-1}	H_0^{m-1}	H_0^{m-1}	⋯	H_0^{m-1}	H_1^{m-1}	H_2^{m-1}	⋯	H_p^{m-1}	H_0^{m-2}	H_1^{m-2}	H_2^{m-2}	⋯	H_p^{m-2}	⋯	H_0^1	H_1^1	H_2^1	⋯	H_p^1	E	H_0^{m-2}	H_0^{m-3}	⋯	H_0^1	E	H_0^{m-2}	H_0^{m-3}	⋯	H_0^1	E	⋯	H_0^{m-2}	H_0^{m-3}	⋯	H_0^1	E
G	1	1	1	⋯	1	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0
H_0^m	p	0	0	⋯	0	0	1	1	⋯	1	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0
H_1^m	0	p	0	⋯	0	1	0	1	⋯	1	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0
H_2^m	0	0	p	⋯	0	1	1	0	⋯	1	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
H_p^m	0	0	0	⋯	p	1	1	1	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0
H_0^{m-1}	0	0	0	⋯	0	p	p	p	⋯	p	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0	⋯	0	0
H_1^{m-1}	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	p	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	1	0	⋯	0	0	1	0	⋯	0	0	⋯	1	0	⋯	0	0
H_2^{m-1}	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	p	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	1	0	⋯	0	0	1	0	⋯	0	0	⋯	1	0	⋯	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
H_p^{m-1}	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	p	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	1	0	⋯	0	0	1	0	⋯	0	0	⋯	1	0	⋯	0	0
H_0^{m-2}	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	0	p	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	p	0	⋯	0	0	p	0	⋯	0	0	⋯	p	0	⋯	0	0
H_1^{m-2}	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	p	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	1	⋯	0	0	0	1	⋯	0	0	⋯	0	1	⋯	0	0
H_2^{m-2}	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	p	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	1	⋯	0	0	0	1	⋯	0	0	⋯	0	1	⋯	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
H_p^{m-2}	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	p	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	1	⋯	0	0	0	1	⋯	0	0	⋯	0	1	⋯	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
H_0^1	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	p	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	p	0	0	0	⋯	p	0	⋯	0	0	⋯	p	0
H_1^1	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	p	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	1	0	0	⋯	0	1	⋯	0	0	⋯	0	1
H_2^1	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	p	⋯	0	0	0	0	⋯	0	1	0	0	⋯	0	1	⋯	0	0	⋯	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
H_p^1	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	p	0	0	0	⋯	0	1	0	0	⋯	0	1	⋯	0	0	⋯	0	1
E	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	0	0	⋯	0	0	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	p	0	0	⋯	0	p	0	0	⋯	0	p	⋯	0	0	⋯	0	p