

有限コクセター群の部分バーンサイド環の単元

近畿大学・理工学部 小田文仁 (Fumihito Oda)*
Faculty of Science and Engineering, Kindai University
室蘭工業大学大学院・工学研究科 竹ヶ原裕元 (Yugen Takegahara)
Muroran Institute of Technology
北星学園大学・経済学部 吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)†
Graduate School of Economics, Hokusei Gakuen University

1 Notation

G は、有限群とする。 (g) は、 $g \in G$ を含む G の共役類とする。 $\mathcal{C}(G)$ は、 G の共役類全体の集合とする。 $W_G(H)$ (または WH) は、剰余群 $N_G(H)/H$ 、ただし、 H は G の部分群、 $N_G(H)$ は H の G における正規化群、とする。二つの部分群 $H, K \leq G$ に対し、 $H \setminus G/K$ は G の H と K による両側剰余類、 $[H \setminus G/K]$ は、その完全代表系とする。 (H) は、 G の部分群 H を含む共役類; すなわち、 $(H) = \{gH \mid g \in G\}$ 、ただし、 $g \in G$ に対し、 $gH := gHg^{-1}$ 、とする。 G -集合 X に対し、 $[X]$ は、 X を含む G -集合の同型類、 X が有限集合のとき、 $|X|$ は、 X の要素の個数とする。 \mathcal{D} は、 G の部分群の collection を表す; すなわち、 \mathcal{D} は、 G -共役をとる操作で閉じている G の部分群の集合である。 $C(\mathcal{D})$ は、 \mathcal{D} の G -共役類全体の集合とする; すなわち、 $C(\mathcal{D}) = \{(H) \mid H \in \mathcal{D}\}$ 。 \mathcal{D} が G の部分群全体のとき $C(\mathcal{D})$ を $C(G)$ と書く。包含関係に関するポセット \mathcal{D} のメビウス関数を $\mu_{\mathcal{D}}$ と書く。本稿では、環は単位元を持つものとする。 O^\times は、環 O の単元群とする。

2 Introduction

有限群の collection の一般バーンサイド環 ([Yo90]) の単元群の研究は、[IO15] で始められた。対称群とその Young 部分群の collection から得られる一般バーンサイド環は、1 でない単元 α を持つ ([IO15])。単元 α は対称群の交代指標を与える。論文 [OTY16] で、我々は単元 α が多項係数を用いて記述できることを示した。本稿では、任意の有限 Coxeter 群とその parabolic subgroups の collection に対して α と同様の性質を持つ元を、Solomon の交代指標の公式の類似から構成し、それが単元であること、また、その元が、多項係数を用いて表現できることを示した論文 [OTY] の概要を述べる。

$W = \langle S \rangle$ を Coxeter system (W, S) を持つ有限 Coxeter 群とする。任意の部分集合 $J \subset S$ に対し、 W の部分群 $W_J = \langle s \mid s \in J \rangle$ を W の *standard parabolic subgroup* と呼ぶ。より一般に W の部分群は、ある standard parabolic subgroup と W -共役であるとき、*parabolic subgroup* と呼ばれる。 \mathcal{P} を W のすべての parabolic subgroups の集合とする。 $\Omega(W, \mathcal{P})$ を元 $[W/H]$ 、ただし、 $H \in \mathcal{P}$ 、で生成された通常のバーンサイド環 $\Omega(W)$ の部分加群とする。このとき、 $\Omega(W, \mathcal{P})$ は基底 $\{[W/H] \mid (H) \in C(\mathcal{P})\}$ を持つ自由 \mathbb{Z} -加群である。 G のバーンサイド環 $\Omega(G)$ は、 G/H の同型類 $[G/H]((H) \in C(G))$ の \mathbb{Z} -線形結合全体からなる可換環である。ただし、基底の元の間は積は

$$[G/H] \cdot [G/K] = \sum_{HgK \in [H \setminus G/K]} [G/(H \cap gK)]. \tag{2.1}$$

で与えられる。任意の二つの部分集合 $J, K \subset S$ と $W \in \mathcal{P}$ に対し、

$$[W/W_J] \cdot [W/W_K] = \sum_{W_J g W_K \in [W_J \setminus W/W_K]} [W/(W_J \cap gW_K)] \tag{2.2}$$

が成立する ([So76]) から $\Omega(W, \mathcal{P})$ は $\Omega(W)$ の部分環である。この環を *partial Burnside ring* (部分バーンサイド環、または PBR と略記する) *relative to the parabolic subgroups of W* ([BBTH92], [Ta06]) と呼ぶ。

* supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400003.

† supported by JSPS KAKENHI Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 25400001.

π_J は剰余類 W/W_J が与える W の置換指標とする. ε をすべての元 $s \in S$ に対し $\varepsilon(s) = -1$ で定義される W の交代指標とする. 公式

$$\varepsilon = \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \pi_J \quad (2.3)$$

は Solomon により得られた ([So66]).

本稿の目的は ε から $\Omega(W, \mathcal{P})$ の 1 でない単元を与えることである.

Theorem 4.3 *Let W be a finite Coxeter group with Coxeter system (W, S) and let α be an element*

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J]$$

of the PBR $\Omega(W, \mathcal{P})$ relative to \mathcal{P} of W . Then α is a non-identity unit of $\Omega(W, \mathcal{P})$.

元 $w \in W$ が存在し $J^w = K$ ([GP00, 2.3.1]) が成立するとき, 二つの部分集合 $J, K \subset S$ が W の同じ Coxeter class に属するという. これは, W_J と W_K が W で共役であることと同値である ([GP00, 2.1.13]). p_J を J の Coxeter class の元の個数とする. 数 p_J は, W_J と W 内で共役な standard parabolic subgroups の個数と等しい. Theorem 4.3 の系として次を得る.

Corollary 4.5 *Let W be a finite Coxeter group with Coxeter system (W, S) and let α be an element*

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J]$$

of $\Omega(W, \mathcal{P})$. Then

$$\alpha = \sum_{(W_J) \in \mathcal{C}(\mathcal{P})} (-1)^{|J|} p_J [W/W_J].$$

さらに, 任意の既約有限 Coxeter 群に対して, 多項係数を用いた α の公式 (系 4.6) も得られる.

3 Burnside ring

部分群 $H \leq G$ と左 G -集合 X に対し,

$$\text{inv}_H(X) = \{x \in X \mid hx = x \text{ for all } h \in H\}$$

とする. [to79, Proposition 1.2.2] により, 任意の $(K) \in C(G)$ に対し,

$$\varphi_H : [G/K] \mapsto |\text{inv}_H(G/K)|, (H) \in C(G)$$

で与えられる写像 $\varphi = (\varphi_H) : \Omega(G) \rightarrow \tilde{\Omega}(G) := \prod_{(H) \in C(G)} \mathbb{Z}$ は, 単射環準同型である. φ は, Burnside homomorphism または, mark homomorphism と呼ばれている.

任意の $x \in \Omega(G)$ に対し, $\varphi(x) = (x_H)_{(H) \in C(G)} \in \tilde{\Omega}(G)$, ただし, $x_H = \varphi_H(x)$ と書く.

4 Units of PBR relative to \mathcal{P} of W

(W, S) を Coxeter 系, W を有限とする. (W, S) の Coxeter element とは, $\prod_{s \in S} s \in W$ の形で表される W の元である. W の Coxeter 元全体は W の一つの共役類を構成する ([Ca72, Theorem 10.3.1]) から, ただ一つの共役類 $(c_S) \in \text{cl}(W)$, ただし, $c_S \in W$ は Coxeter 元, が存在する.

Lemma 4.1. *Let P be a parabolic subgroup of W with $(P) = (W_J) \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$, where $J \subset S$. Then P includes an element σ_P with $(\sigma_P) = (c_J) \in \text{cl}(W)$, where c_J is a Coxeter element of the standard parabolic subgroup W_J .*

Proof. 仮定より元 $w \in W$ が存在し $P = {}^w W_J$ を満たすから, $\sigma_P = wc_J w^{-1}$, ただし, c_J は W_J の Coxeter 元, とおくことにより, $(\sigma_P) = (c_J)$ を得る. \square

任意の部分群 $H \leq W$ に対し, parabolic subgroup P_H を H を含むすべての parabolic subgroups の共通部分として定義する. Lemma 4.1 により, W の任意の parabolic subgroup P で $(P) = (W_J)$ を満たすものは, 元 σ_P で $P = P_{(\sigma_P)}$, $(\sigma_P) = (c_J)$ を満たすものを含む.

$$\alpha = \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J] \in \Omega(W, \mathcal{P}) \quad (4.1)$$

とおく. 元 α は $\Omega(W)$ にも含まれる. 集合 \mathcal{P} は共通部分をとる操作で閉じていて ([So76, Section 2]), $W \in \mathcal{P}$ が成り立つから, $\Omega(W, \mathcal{P})$ は $\Omega(W)$ の部分環である ([Yo90, 3.15 (b)]).

Lemma 4.2. *If $\varphi(\alpha) = (\alpha_H)_{(H) \in C(W)}$, then $\alpha_H = \alpha_{P_H}$ for all $(H) \in C(W)$, and $\alpha_P = \varepsilon(\sigma_P)$ for all $(P) \in C(\mathcal{P})$.*

Proof. H を W の部分群とすると, parabolic subgroup P_H の定義より,

$$\text{inv}_{P_H}(W/W_J) = \{\sigma W_J \mid P_H \leq \sigma W_J\} = \{\sigma W_J \mid \tilde{H} \leq \sigma W_J\} = \text{inv}_H(W/W_J)$$

がすべての部分集合 $J \subset S$ について成立する. 従って $\alpha_H = \alpha_{P_H}$ が任意の $(H) \in C(W)$ に対して成り立つ. $P = P_{(\sigma_P)}$ が, $P \in \mathcal{P}$ に対して成立するから, $\text{inv}_P(W/W_J) = \text{inv}_{(\sigma_P)}(W/W_J)$ がすべての部分集合 $J \subset S$ について成り立つ. [So66, Theorem 2] により, 任意の $P \in \mathcal{P}$ に対し,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_P) &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \pi_J(\sigma_P) \\ &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \varphi_{(\sigma_P)}([W/W_J]) \\ &= \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \varphi_P([W/W_J]) \\ &= \varphi_P \left(\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J] \right) \\ &= \alpha_P \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. □

Remark 1. Lemma 4.2 follows from [GP00, 3.1.8] also. However, our proof does not require Deodhar's Lemma [De77].

[Yo90, Corollary 4.3] と Lemma 4.2 を用いることにより,

$$\alpha = \sum_{(P) \in C(\mathcal{P})} \frac{1}{|W_W(P)|} \left(\sum_{H \in \mathcal{P}} \mu_{\mathcal{P}}(P, H) \varepsilon(\sigma_H) \right) [W/P],$$

ただし, $\sigma_H \in W$, $H = H_{(\sigma_H)}$, が成り立つことがわかる. さらに, α の定義 (Eq. (4.1)) により,

$$\frac{1}{|W_W(P)|} \left(\sum_{H \in \mathcal{P}} \mu_{\mathcal{P}}(P, H) \varepsilon(\sigma_H) \right) = \begin{cases} p_J & \text{if } \varepsilon(\sigma_P) = 1, \\ -p_J & \text{if } \varepsilon(\sigma_P) = -1, \end{cases}$$

ただし, $p_J = |\{K \subset S \mid (W_K) = (W_J)\}|$, $(P) = (W_J)$, を得る.

Lemma 4.2 は以下の定理を示す.

Theorem 4.3. *Let W be a finite Coxeter group with Coxeter system (W, S) and let α be an element*

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J]$$

of $\Omega(W, \mathcal{P})$. Then α is a non-identity unit of $\Omega(W, \mathcal{P})$.

Corollary 4.4. *Let $\Omega(W, \mathcal{P})$ be a PBR relative to \mathcal{P} of W . Then there is a subgroup of the unit group $\Omega(W, \mathcal{P})^\times$ generated by -1 and α .*

総和の index を S の部分集合全体から, $C(\mathcal{P})$ に取り替えることにより以下の系を得る.

Corollary 4.5. *Let W be a finite Coxeter group with Coxeter system (W, S) and let α be an element*

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} [W/W_J]$$

of $\Omega(W, \mathcal{P})$. Then

$$\alpha = \sum_{(W_J) \in C(\mathcal{P})} (-1)^{|J|} p_J [W/W_J].$$

任意の既約有限コクセター群に対し, 数 p_J の値が Geck と Pfeiffer により計算されている. それらの結果 [GP00, 2.3.8, 2.3.10, 2.3.13] から以下の系を得る.

Corollary 4.6. 1. *Let W be the Coxeter group of type A_{n-1} , then*

$$\alpha = \sum_{\lambda_J + n} (-1)^{|J|} \binom{k_J}{\ell_1^J, \dots, \ell_n^J} [W/W_J],$$

where $\lambda_J = (1^{\ell_1^J}, \dots, n^{\ell_n^J})$ is a partition of n , $k_J = \ell_1^J + \dots + \ell_n^J$, and W_J is a subgroup in the class with label λ_J .

2. *Let W be the Coxeter group of type B_n , then*

$$\alpha = \sum_{m=0}^n \sum_{\lambda_J + m} (-1)^{|J|} \binom{k_J}{\ell_1^J, \dots, \ell_m^J} [W/W_J],$$

where $\lambda_J = (1^{\ell_1^J}, \dots, m^{\ell_m^J})$ is a partition of m , $k_J = \ell_1^J + \dots + \ell_m^J$, and W_J is a subgroup in the class with label λ_J .

3. *Let W be the Coxeter group of type D_n , then*

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{\lambda_J + m} (-1)^{|J|} \binom{k_J}{\ell_1^J, \dots, \ell_m^J} [W/W_J] \\ &+ \sum_{\lambda_J + n: \text{all-even}} (-1)^{|J|} \binom{k_J}{\ell_1^J, \dots, \ell_n^J} [W/W_J] \\ &+ \sum_{\lambda_J + n: \text{has an odd part}} (-1)^{|J|} \left(2 - \frac{\ell_1^J}{k_J}\right) \binom{k_J}{\ell_1^J, \dots, \ell_n^J} [W/W_J] \end{aligned}$$

where $\lambda_J = (1^{\ell_1^J}, \dots, m^{\ell_m^J})$ is a partition of $m \leq n-2$, n , $k_J = \ell_1^J + \dots + \ell_m^J$, and W_J is a subgroup in the class with label λ_J .

参考文献

- [BBTH92] Bergeron, F.; Bergeron, N.; Howlett, R.B.; Taylor, D.E.: *A Decomposition of the Descent Algebra of a Finite Coxeter Group*, J. Algebraic Combinatorics 1 (1992) 23–44.
- [Ca72] Carter, R. W.: *Simple groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics, 28, John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972.
- [De77] Deodhar, V. V.: *Some characterizations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of the relative Möbius function*, Invent. Math. 39 (1977), 187–198.
- [GP00] Geck, M.; Pfeiffer, G.: *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, 21, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [IO15] Idei, H.; Oda, F.: *The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group*, J. Algebra 429 (2015), 318–323.

- [OTY16] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T.: *The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group*, J. Algebra **460** (2016), 370–379.
- [OTY] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T.: *Sign unit of a partial Burnside ring of finite Coxeter group and Coxeter classes*, preparation.
- [So66] Solomon, L.: *The orders of the finite Chevalley groups*, J. Algebra **3**, (1966), 376 – 393.
- [So76] Solomon, L.: *A Mackey Formula in the Group Ring of a Coxeter Group*, J. Algebra **41**, (1976), 255 – 264.
- [Ta06] Tambara, D.: *A partial Burnside ring of $GL(n, q)$ relative to line stabilizers*, J. Algebra **296** no. 1, (2006), 301–322.
- [to79] tom Dieck, T.: *Transformation Groups and Representation Theory*, Lecture Notes in Mathematics, **766**, Springer, Berlin, 1979.
- [Yo90] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.