数理解析研究所講究録
第2016巻 2017年 212-216

自由な変換群のコホモロジーに関する考察

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate school of Sience, Osaka University

1 序

Borsuk-Ulam の定理は m 次元と n 次元の球面 S^m, S^n に位数 2 の群 $\boldsymbol{Z}_2$ の対心作用を考えるとき, S^m から S^n への同変写像が存在するならば, $m \leqq n$ であると述べることができる. つまり, $m > n$ ならば, S^m から S^n への同変写像は存在しない. これは, 同変写像の存在に関する定理と見ることができ, その一般化として現在までに, 作用する群を変えたり, 球面以外の空間の場合の同変写像の存在に関する研究がされている. 例えば, [7] ではホモロジー群に条件をつけて, 同変写像の存在について調べている. また, Lovász は [4] において, Kneser グラフの彩色数を決定するのに, その近傍複体を定義し, その位相を調べたが, その手法は (対心作用を考えた) 球面への同変写像の存在に関して Borsuk-Ulam の定理を一般化した形の命題を用いたのと同じである ([3], [5] などを参照せよ). このように, 球面への同変写像の存在について調べることは, 単に Borsuk-Ulam の定理を一般化することが目的ではなく, その応用も視野に入れている.

X を $\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用する弧状連結なハウスドルフ空間とする (本稿では位相空間はすべてハウスドルフ空間であることを仮定する). X から S^n への $\boldsymbol{Z}_2$ 写像が存在し, $m > n$ であれば, X から S^m への $\boldsymbol{Z}_2$ 写像が存在することはすぐにわかる. したがって, X から球面への $\boldsymbol{Z}_2$ 写像の存在について調べることは

$$\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Z}_2} X = \min\{n \in \boldsymbol{N} \mid X \text{ から } S^n \text{ への } \boldsymbol{Z}_2 \text{ 写像が存在する}\}$$

を求めることに他ならない. $E\boldsymbol{Z}_2 \to B\boldsymbol{Z}_2$ を普遍 $\boldsymbol{Z}_2$ 束とするとき, $B\boldsymbol{Z}_2$ の $\boldsymbol{Z}_2$ 係数のコホモロジー $H^*(B\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2)$ は $\boldsymbol{Z}_2[x](\deg x = 1)$ に同型である. $\boldsymbol{Z}_2$ 写像 $f\colon X \to E\boldsymbol{Z}_2$ から定まるコホモロジー間の写像 $\bar{f}^*\colon H^*(B\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2) \to H^*(X/\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2)$ を考え, $\omega_X = \bar{f}^*(x)$ とおくとき,

$$h(X) = \max\{n \in \boldsymbol{N} \mid \omega_X^n \neq 0\}$$

を考える. $\boldsymbol{Z}_2$ 写像写像 $X \to Y$ が存在するとき, $h(X) \leqq h(Y)$ であることが容易にわかる. $h(S^n) = n$ であることから, X から S^n への $\boldsymbol{Z}_2$ 写像写像が存在すれば $h(X) \leqq n$ である. この応用として Borsuk-Ulam の定理を得ることもできる.

以上の考察より, $\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用する弧状連結な位相空間 X から球面への同変写像の存在を知るには, X の軌道空間 $X/\boldsymbol{Z}_2$ のコホモロジーを調べることが有効であることがわかる. 例えば, $H^*(X; \boldsymbol{Z}_2) \cong H^*(S^n; \boldsymbol{Z}_2)$ のとき, X に $\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用し, $H^*(X/\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2)$ が ($\boldsymbol{Z}_2$ 上のベクトル空間として) 有限次元であれば, $H^*(X/\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2) \cong H^*(\boldsymbol{RP}^n; \boldsymbol{Z}_2)$ であることがわかる (証明は [6] の $H^*(\boldsymbol{RP}^n; \boldsymbol{Z}_2)$ の計算と同様に Gysin-Smith 完全系列を用いることによりできる). また, 同様に X に $\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用していて $1 \leqq p \leqq n$ で $H^p(X; \boldsymbol{Z}_2) = 0$ であれば, $\omega_X^{n+1} \neq 0$ であり, $h(X) \geqq n+1$ となるので, X から S^n への $\boldsymbol{Z}_2$ 写像は存在しない ([7] では同様のことをホモロジー群の場合に証明している).

$1 \leqq p \leqq n$ で $H^p(X; \boldsymbol{Z}_2) = 0$ という条件以外で, 同変写像の存在について考察することが次の目的となるが, 例えば, X の $\boldsymbol{Z}_2$ 係数のコホモロジー環が $H^*(S^m \times S^n; \boldsymbol{Z}_2)$ と同型のとき, 以下のような定理が知られている.

定理 1([2]). X を $H^*(X; \boldsymbol{Z}_2) \cong H^*(S^m \times S^n; \boldsymbol{Z}_2)$(コホモロジー環の同型) を満たし, 自由な $\boldsymbol{Z}_2$ 作用のある finitistic space とする ($0 < m \leqq n$ とする). このとき, $H^*(X/\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2)$ は $\boldsymbol{Z}_2[y, z]/\psi(y, z)$ と次数付き環として同型である. ここで, $\psi(y, z)$ は次のいずれかのイデアルの一つである.

(i) (y^{m+1}, z^2), $\deg y = 1$, $\deg z = n$

(ii) $(y^{m+n+1}, y^{n-m+1}z, z^2 - ay^m z - by^{2m})$, $\deg y = 1$, $\deg z = m$ $a, b \in \boldsymbol{Z}_2$ で, $n < 2m$ のときは $a = 0$

(iii) $(y^{n+1}, z^2 - ay^m z - by^{2m})$, $\deg y = 1$, $\deg z = m$ $a, b \in \boldsymbol{Z}_2$ で, $n = m$ または $n < 2m$ のときは $b = 0$

この定理において, (i), (ii), (iii) いずれの場合も $y = \omega_X$ であり, (i) の場合が $h(X) = m$, (ii) の場合が $h(X) = m + n$, (iii) の場合が $h(X) = n$ である. したがって, (i) のときは S^{m-1} への同変写像が存在せず, (ii) のときは S^{m+n-1}, (iii) のときは S^{n-1} への同変写像が存在しない.

本稿では, 定理 1 について, Gysin-Smith 完全系列による証明を与え, 具体的な例についての考察をする.

2 定理 1 の証明

定理 1 の証明は [2] ではスペクトル系列を用いているが, ここでは Gysin-Smith 完全系列を用いて証明することにしよう. Gysin-Smith 完全系列とは, 2 重被覆 $\pi\colon X \to X/\boldsymbol{Z}_2$ に対する次のコホモロジーの完全系列のことである (cf. [6]).

$$\begin{aligned} \ldots \to H^p(X/\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2) &\xrightarrow{\pi^*} H^p(X; \boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi_!} H^p(X/\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2) \\ &\xrightarrow{\cup\omega_X} H^{p+1}(X/\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(X; \boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi_!} H^{p+1}(X/\boldsymbol{Z}_2; \boldsymbol{Z}_2) \to \ldots \end{aligned}$$

以下, この節ではコホモロジーの係数は $\boldsymbol{Z}_2$ とし, 表示の複雑さをなくすために係数 $\boldsymbol{Z}_2$ を省略して書くことにする. 上の完全系列で, ω_X は $\boldsymbol{Z}_2$ 束 $X \to X/\boldsymbol{Z}_2$ の Stiefel-Whitney 類で序文中の ω_X と同じである. X のコホモロジー環が $H^*(S^m \times S^n)$ と同型で $m > 0$ なので, $p = 0$ のときを考えると $\omega_X \in H^1(X/\boldsymbol{Z}_2)$ は 0 ではないことがわかる. 同様に, $1 \leqq p \leqq m - 1$ では $H^p(X) = 0$ なので, $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_X} H^{p+1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$ は $1 \leqq p \leqq m - 2$ で全単射, $p = m - 1$ で単射となり, $1 \leqq p \leqq m - 1$ で $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ であることおよび, $\omega_X^m \neq 0$ がわかる.

$p \geqq m$ のときを考えよう. まずは $m < n$ の場合を考える. このとき,

$$0 \to H^{m-1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \to H^m(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^m(X) \xrightarrow{\pi_!} H^m(X/\boldsymbol{Z}_2) \to H^{m+1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$$

であり, $H^{m-1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2, H^m(X) \cong \boldsymbol{Z}_2$ である. これより, $H^m(X/\boldsymbol{Z}_2)$ は $\boldsymbol{Z}_2$ もしくは, $\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ と同型である.

$H^m(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ のとき, $\pi_!\colon H^m(X) \to H^m(X/\boldsymbol{Z}_2)$ が同型写像であり, $\cup\omega_X\colon H^m(X/\boldsymbol{Z}_2) \to H^{m+1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$ が零写像となることから $\omega_X^{m+1} = 0$ および

$\pi^*\colon H^{m+1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \to H^{m+1}(X)$ が単射になることがわかる. しかし, $n > m+1$ のときは $H^{m+1}(X) = 0$, $n = m+1$ のときは $H^{m+1}(X) \cong \boldsymbol{Z}_2$ で, 完全系列を考えると, いずれのときも $H^{m+1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong H^{m+1}(X)$ であることがわかる. 同様にして, $m+1 \leqq p \leqq n-1$ で $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) = H^p(X) = 0$, $H^n(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong H^n(X) \cong \boldsymbol{Z}_2$ がわかる. また, $n+1 \leqq p \leqq m+n-1$ で $H^p(X) = 0$, $H^{m+n}(X) \cong \boldsymbol{Z}_2$ であることを考えると, $n \leqq p \leqq m+n-1$ で $\cup\omega_X\colon H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \to H^{p+1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$ が同型写像であることもわかる. したがって, このとき, 定理 1 の ψ としては, (i) の (y^{m+1}, z^2) が取れる ($y = \omega_X$, z は $H^m(X)$ の生成元を $\pi_!$ でうつしたもの).

$H^m(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ のとき,

$$0 \to H^{m-1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \to H^m(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^m(X) \xrightarrow{\pi_!} H^m(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_X} H^{m+1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$$

が完全であり, $H^{m-1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$ および $H^m(X)$ が $\boldsymbol{Z}_2$ と同型で $H^m(X/\boldsymbol{Z}_2)$ が $\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ と同型であることから, $H^m(X) \xrightarrow{\pi_!} H^m(X/\boldsymbol{Z}_2)$ は零写像. したがって,

$$H^m(X) \xrightarrow{\pi_!} H^m(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_X} H^{m+1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^{m+1}(X)$$

が完全であることから, $H^m(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_X} H^{m+1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$ は単射である. $m+1 \leqq p \leqq n-1$ では $H^p(X) = 0$ であることから $m \leqq p \leqq n-2$ で $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_X} H^{p+1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$ は同型であり, $m \leqq p \leqq n-1$ では, $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ である. $H^m(X/\boldsymbol{Z}_2)$ の生成元の一つは ω_X^m であり, $H^m(X/\boldsymbol{Z}_2)$ のもう一つの生成元を z と書くことにすると (したがって, $\deg z = m$), $m \leqq p \leqq n-1$ においては, $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2)$ の生成元は ω_X^p と $\omega_X^{p-m}z$ となる.

$p = n$ のときは,

$$H^{n-1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_X} H^n(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^n(X)$$

が完全であり, $H^{n-1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_X} H^n(X/\boldsymbol{Z}_2)$ が単射, $H^n(X) \cong \boldsymbol{Z}_2$ であることから $H^n(X/\boldsymbol{Z}_2)$ は $\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ もしくは $\boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ と同型である.

$H^n(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ と仮定すると, $n \leqq p \leqq n+m$ において

$$H^p(X) \xrightarrow{\pi_!} H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_X} H^{p+1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(X)$$

が完全であることから, $n \leqq p < n+m$ で $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ となるが, これは,

$$\begin{aligned}&H^{m+n-1}(X) \xrightarrow{\pi_!} H^{n+m-1}(X/\boldsymbol{Z}_2)\\ &\xrightarrow{\cup\omega_X} H^{n+m}(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^{n+m}(X) \xrightarrow{\pi_!} H^{n+m}(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_X} H^{n+m+1}(X/\boldsymbol{Z}_2)\end{aligned}$$

が完全系列であることから, $H^{n+m+1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \neq 0$ となり, また, $p > m+n$ での完全系列を考えると, $p > m+n$ で常に $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \neq 0$ である. これは X が finistic space であることに矛盾する ([1, p.144] を見よ). したがって, $H^n(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ である.

$H^n(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ より, $\cup\omega_X\colon H^{n-1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \to H^n(X/\boldsymbol{Z}_2)$ は同型写像になる. したがって, 完全系列

$$H^n(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^n(X) \xrightarrow{\pi_!} H^n(X/\boldsymbol{Z}_2) \xrightarrow{\cup\omega_X} H^{n+1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$$

で, $\pi_!\colon H^n(X) \to H^n(X/\boldsymbol{Z}_2)$ が単射になることに注意すると, $H^{n+1}(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ である.

また, 完全系列と X のコホモロジーを考えることにより $n+1 \leqq p \leqq n+m$ で $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ となることがわかる.

さて, $H^n(X/\boldsymbol{Z}_2)$ の生成元は, ω_X^n と $\omega_X^{n-m}z$ であるが, ω_X^n, $\omega_X^{n-m}z$, $\omega_X^n + \omega_X^{n-m}z$ のうち一つが, $\cup\omega_X\colon H^n(X/\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n+1}(X/\boldsymbol{Z}_2)$ で 0 になる.

$\omega_X^{n+1} = 0$ の場合, $y = \omega_X$ とおく. また, $2m \leqq n$ のときには, $m+1 \leqq p \leqq n$ において $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$ で, その生成元が $y^p, y^{p-m}z$ であることから, $z^2 = ay^{p-m}z + by^p$ となる. また, $2m > n$ のときには, $n+1 \leqq p \leqq n+m$ で $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$, で, その生成元が $y^{p-m}z$ であることから, $z^2 = ay^{p-m}z$ となる. したがって, これが定理 1 において ψ が (iii) の $(y^{n+1}, z^2 - ay^{n-m}z - by^{2m})$ になる場合である.

$\omega_X^{n-m+1}z = 0$ の場合, $y = \omega_X$ とおくと, $q \leqq m$ で $y^{n+q} \neq 0$ であり, $y^{n+m+1} = 0$ となる. z^2 については上と同様に考えるが, $2m > n$ のとき, $n+1 \leqq p \leqq n+m$ における $H^p(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$, の生成元が y^p であることに注意すると, $z^2 = by^{2m}$ となることに注意しよう. したがって, これが定理 1 において ψ が (ii) の $(y^{m+n+1}, y^{n-m+1}z, z^2 - ay^{n-m}z - by^{2m})$ になる場合である.

$(\omega_X^n + \omega_X^{n-m}z) \cup \omega_X = 0$ の場合は, $z' = \omega_X^m + z$ と置くことにより, $\omega_X^{n-m+1}z' = 0$ となり上の場合に帰着されるので省略しよう (つまり, 定理 1 の (ii) の場合になる).

以上で, $m < n$ の場合 $H^*(X/\boldsymbol{Z}_2)$ が定理 1 のようになることが示された. $m = n$ の場合も同様で, $0 \leqq p \leqq m-1$ で, $H^*(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$, $p = m(=n)$ において, $H^*(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2$, $m+1 \leqq p \leqq m+n$ で, $H^*(X/\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2$ となり, 定理 1 のようになるが, このとき, (i) は (iii) の $a = b = 0$ の場合と考えることができる. ▮

3　定理 1 の例について

定理 1 では $X/\boldsymbol{Z}_2$ のコホモロジーがどのようになるか, その可能性を挙げただけで, 実際にそのような作用があるか否かについては述べていない. この節では $X = S^m \times S^n$ のときの具体的な $\boldsymbol{Z}_2$ 作用について考えてみよう.

$\boldsymbol{Z}_2$ の生成元を T とする. まず, 簡単に思いつく $S^m \times S^n (1 \leqq m \leqq n$ とする$)$ 上の $\boldsymbol{Z}_2$ 作用は

$$(1)\, T(x,y) = (-x,y), \quad (2)\, T(x,y) = (x,-y), \quad (3)\, T(x,y) = (-x,-y)$$

などであろう. (1) と (3) の作用については, S^m への同変写像 $(x,y) \mapsto x$ が存在するので, $h(X) = m$ である. したがって, $(S^m \times S^n)/\boldsymbol{Z}_2$ のコホモロジー環は定理 1 で (i) の形の ψ を使って表されるものである. (1) の場合は, $(S^m \times S^n)/\boldsymbol{Z}_2$ が $\boldsymbol{RP}^m \times S^n$ に同相であることに注意しておこう. (2) の作用については, $(S^m \times S^n)/\boldsymbol{Z}_2$ が $S^m \times \boldsymbol{RP}^n$ に同相であり, そのコホモロジー環は定理 1 で (iii) の形の ψ を使って表されるものである ($a = b = 0$ となっている). その他の作用として, S^n 上に不動点をもつような $\boldsymbol{Z}_2$ 作用を考え (例えば, $T(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, -x_1, \ldots, -x_n)$ など), これを用いて $S^m \times S^n$ 上の作用を $T(x,y) = (-x, Ty)$ により定義すると自由な $\boldsymbol{Z}_2$ 作用であるが, これについても, そのコホモロジー環はやはり定理 1 で (i) の形の ψ を使って表されるものになる. 以上のように, 具体的に表すことのできる作用で簡単に思いつくものは, ほとんどそのコホモロジー環が定理 1 で (i) か (iii) の形の ψ を使って表されるものになる. そこで, 次の問題が考えられる.

問題. $S^m \times S^n$(ただし, $1 \leqq m \leqq n$) 上の自由な $\boldsymbol{Z}_2$ 作用で, その軌道空間 $S^m \times S^n/\boldsymbol{Z}_2$ のコホモロジー環が定理 1 の (ii) の形の ψ を使って表されるものになるようなものが存在するか?

これについて, $m=1, n=2$ のときは次の結果がある.

定理 ([8]. $S^1 \times S^2$ 上の自由な $\boldsymbol{Z}_2$ 作用に対して, その軌道空間 $(S^1 \times S^2)/\boldsymbol{Z}_2$ は (1) $S^1 \times S^2$, (2)3 次元 Klein Bottle, (3) $S^1 \times \boldsymbol{RP}^2$, (4) $\boldsymbol{RP}^3 \sharp \boldsymbol{RP}^3$(二つの $\boldsymbol{RP}^2$ の連結和) のいずれかと同相である.

軌道空間がここで挙げたものになるような $S^1 \times S^2$ 上の自由な $\boldsymbol{Z}_2$ 作用は容易に構成できる. (1) は上で書いた $T(x,y)=(-x,y)$ という作用, (2) は $T(x,y)=(-x,-y)$, (3) は $T(x,y)=(x,-y)$ という作用の軌道空間である. (4) は $S^1 \subset \boldsymbol{C}$ とみて, $S^1 \times S^2$ 上の作用 $T(z,y)=(\overline{z},-y)$($\overline{z}$ は z の共役複素数) を考えるとよい. この定理から, $S^1 \times S^2$ 上には問題に書いたような自由な $\boldsymbol{Z}_2$ 作用は存在しないことがわかる. したがって, どのような $S^1 \times S^2$ 上の $\boldsymbol{Z}_2$ 作用に対しても $h(S^1 \times S^2)$ は 1 または 2 であり, 3 になることはない.

References

[1] G. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press, (1972).

[2] R. M. Dotzel, T. J. Singh and S. P. Tripathi, The cohomology rings of the orbit spaces of free transformation groups of the product of two spheres, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 921–930.

[3] 原靖浩, 冨田優次, グラフから定まる単体複体の位相について, 京大数理解析研究所講究録 2015 年,

[4] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy, J. Combin. Theory Ser. A 25 (1978) 319–324.

[5] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem, Springer, Berlin(2003).

[6] 中岡稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店, 1977.

[7] 長崎生光, 川上智博, 原靖浩, 牛瀧文宏, The Smith homology and a generalized Borsuk-Ulam theorem, 京大数理解析研究所講究録 1670 換群論の新たな展開　2009 年, 34–39.

[8] Y. Tao, On fixed point free involutions of $S^1 \times S^2$, Osaka Math. J. 14(1962), 145–152.