

3次元 Lorentz-Minkowski 空間の平均曲率 0 曲面

岡山大学 藤森 祥一
Shoichi Fujimori
Okayama University

概要

本稿では 3次元 Lorentz-Minkowski 空間の平均曲率 0 曲面について、最近得られた結果 [2] を中心に紹介する。また、川上裕氏 (金沢大学)、國分雅敏氏 (東京電機大学)、Wayne Rossman 氏 (神戸大学)、梅原雅顕氏 (東京工業大学)、山田光太郎氏 (東京工業大学) との共同研究で得られた結果 [4, 5] についても紹介する。

1. 準備

不定値計量 $\langle , \rangle = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$ をもつ 3次元 Lorentz-Minkowski 空間を \mathbb{L}^3 で表す。Riemann 面 M から \mathbb{L}^3 への共形はめ込み $f : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ は、誘導計量 $ds^2 = \langle df, df \rangle$ が M 上正定値であるとき空間的曲面という。空間的曲面 $f : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ の平均曲率が恒等的に消えているとき、 f を極大曲面という。完備な極大曲面は平面に限ることが知られている [1]。極大曲面にある種の特異点を許容したクラスに極大面がある [11]。

定義 1.1. $f : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ が極大面であるとは、 M の稠密な開集合 W が存在して、 f の W への制限 $f|_W$ は共形極大はめ込みを与え、かつ各 $p \in M$ に対して $df(p) \neq 0$ が成り立つときをいう。

極大面に対して、3次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 の極小曲面に対する Weierstrass 表現公式と類似の表現公式の存在が知られている。

定理 1.2 (Weierstrass 型表現公式 [10, 11]). M を Riemann, (g, η) を M 上の有理型関数 g と正則 1次微分 η の組で、 $(1 + |g|^2)^2 \eta \bar{\eta}$ が M 上 Riemann 計量を与えるものとする。

$$(1.1) \quad \Phi := \begin{pmatrix} -2g\eta \\ (1 + g^2)\eta \\ i(1 - g^2)\eta \end{pmatrix}$$

とおく。ただし $i = \sqrt{-1}$ である。このとき

$$(1.2) \quad f = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi : M \rightarrow \mathbb{L}^3 \quad (z_0 \in M)$$

は極大面である. f の特異点集合 $S(f)$ は

$$S(f) = \{p \in M; |g(p)| = 1\}$$

である. さらに, f が M 上一価であるための必要十分条件は, M 上の任意の閉曲線 ℓ に対して

$$(1.3) \quad \operatorname{Re} \oint_{\ell} \Phi = 0$$

が成り立つことである.

逆に全ての極大面はこの方法で構成することができる.

定理 1.2 の組 (g, η) を f の **Weierstrass data** という.

注意 1.3. 曲面 (1.2) の第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 \mathbb{II} は以下で与えられる.

$$ds^2 = (1 - |g|^2)^2 \eta \bar{\eta}, \quad \mathbb{II} = -\eta dg - \overline{\eta dg}.$$

さらに, $g|_{M \setminus S(f)} : M \setminus S(f) \rightarrow (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{|z| = 1\}$ は極大曲面 $f|_{M \setminus S(f)}$ の Gauss 写像

$$G|_{M \setminus S(f)} : M \setminus S(f) \rightarrow H^2 = \{x \in \mathbb{L}^3; \langle x, x \rangle = -1\}$$

と立体射影

$$\sigma : H^2 \ni (x_0, x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_0} \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{|z| = 1\}$$

の合成に一致する. すなわち $g|_{M \setminus S(f)} = \sigma \circ G|_{M \setminus S(f)}$ が成り立つ. このことから g を極大面 (1.2) の Gauss 写像と呼ぶ.

極大面にジェネリックに現れる特異点は [8] で分類されている. また, 極大面に現れるいくつかの特異点の Weierstrass data による判定法は [6, 8, 11] などと与えられている.

定義 1.4 (折り目特異点 [3]). $f : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ を極大面, (g, η) をその Weierstrass data とする. f の特異点集合を $S(f)$ で表す. すなわち $S(f) = \{p \in M; |g(p)| = 1\}$ である.

- (1) f の特異点 $p \in S(f)$ において dg が消えないとき, p を非退化特異点という.
- (2) M 上の正則曲線 $\hat{\gamma} : (a, b) \rightarrow M$ は, 各 $\hat{\gamma}(t)$ ($t \in (a, b)$) が f の非退化特異点で, かつ $\hat{\gamma}$ に沿って

$$\operatorname{Re} \left(\frac{dg}{g^2 \eta} \right)$$

が恒等的に消えているとき, 非退化折り目特異点という. またこのとき各 $\hat{\gamma}(t)$ ($t \in (a, b)$) を折り目特異点という.

正則曲線 $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{L}^3$ が零的または等方的であるとは、全ての $t \in (a, b)$ に対して $\gamma'(t) = (d\gamma/dt)(t)$ が光的ベクトルであるときをいう。

定義 1.5 (非退化零的曲線 [3]). $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{L}^3$ を零的曲線とする. $t = c$ において $\gamma'(c)$ と $\gamma''(c)$ が線型独立であるとき, γ は $t = c$ で非退化であるという. 全ての $t \in (a, b)$ において非退化な零的曲線を非退化零的曲線という.

定理 1.6 (極大面の解析的延長 [3]). $f: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ を, $\hat{\gamma}: (a, b) \rightarrow M$ を非退化特異点とする極大面とする. このとき $\gamma := f \circ \hat{\gamma}$ は非退化零的曲線である. さらに

$$(1.4) \quad f^*(u, v) := \frac{\gamma(u+v) + \gamma(u-v)}{2}$$

とおくと f^* は時間的極小曲面であり, f と f^* は γ に沿って実解析的につながる.

逆に, \mathbb{L}^3 への実解析的なはめ込みでその空間的部分と時間的部分における平均曲率が恒等的に消えており, かつ空間的部分と時間的部分の境界が非退化零的曲線ならば, そのはめ込みは非退化折り目特異点を持つ極大面の実解析的延長によって得られる.

\mathbb{L}^3 のはめ込みでその空間的部分と時間的部分における平均曲率が恒等的に消えているものを平均曲率 0 曲面と呼ぶ.

2. Schwarz H 型平均曲率 0 曲面

定数 $a \in (0, \infty)$ に対して, 超楕円曲線

$$w^2 = z(z^3 + a^3)(z^3 + a^{-3})$$

で定義される種数 3 の Riemann 面を M_a で表す. Weierstrass data

$$(2.1) \quad g = z, \quad \eta = i \frac{dz}{w}$$

で定まる極大面

$$(2.2) \quad f_a = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \int \begin{pmatrix} -2g \\ 1 + g^2 \\ i(1 - g^2) \end{pmatrix} \eta$$

の 1 径数族 $\{f_a\}_{0 < a < \infty}$ を考える. f_a の特異点集合は $\{|z| = 1\}$ である. 直接計算によって f_a の特異点集合は非退化折り目特異点であることが確かめられる.

M_a 上の \mathbb{C}^3 値正則微分 Φ_a を以下で定める.

$$\Phi_a := \begin{pmatrix} -2g \\ 1 + g^2 \\ i(1 - g^2) \end{pmatrix} \eta.$$

直接計算で次の補題が得られる。

補題 2.1 (曲面の対称性). M_a 上の反正則変換 $\psi_j : M_a \rightarrow M_a$ ($j = 1, 2, 3$) を以下で定める:

$$\begin{aligned}\psi_1(z, w) &= (\bar{z}, \bar{w}), \\ \psi_2(z, w) &= (e^{2\pi i/3}\bar{z}, e^{\pi i/3}\bar{w}), \\ \psi_3(z, w) &= \left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{\bar{w}}{\bar{z}}\right).\end{aligned}$$

このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\psi_1^*\Phi_a &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\Phi}_a, \\ \psi_2^*\Phi_a &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} \bar{\Phi}_a, \\ \psi_3^*\Phi_a &= \bar{\Phi}_a.\end{aligned}$$

この補題により,

$$\Omega_a^{\max} := \{f_a(z); |z| \leq 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/3\}$$

をこの極大面の基本領域とみなすことができる. すなわち, この極大面は Ω_a^{\max} と合同なピースによって構成されている.

補題 2.2. Ω_a^{\max} において, $\{0 \leq |z| \leq 1, \arg z = 0\}$ と $\{a \leq |z| \leq 1, \arg z = \pi/3\}$ の f_a による像は線分であり, $\{a \leq |z| \leq 1, \arg z = \pi/3\}$ の f_a による像はある時間的平面に含まれる.

Proof. f_a の Hopf 微分

$$Q = \eta dg = i \frac{dz^2}{w}$$

を考える. $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) ならば $Q \in i\mathbb{R}$ である. また, $z = e^{\pi i/3}t$ ($0 \leq t \leq 1$) ならば

$$Q = \frac{-dt^2}{\sqrt{t(t^3 - a^3)}(t^3 - a^3)} \in \begin{cases} \mathbb{R} & (0 \leq t \leq a) \\ i\mathbb{R} & (a \leq t \leq 1) \end{cases}$$

である. 従って Hopf 微分の性質 [6, Remark 3.3], [9, (1.4.5)] により結論を得る. \square

次に f_a の特異曲線 γ を考察する. 特異曲線は $z = e^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi/3$) の f_a による像であるから,

$$\gamma(s) = \int_0^s \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \xi(t) dt, \quad \xi(t) = \frac{2}{\sqrt{2 \cos 3t + a^3 + a^{-3}}} \quad \left(0 \leq s \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

と書くことができる. よって

$$(2.3) \quad f_a^*(u, v) := \frac{1}{2}(\gamma(u+v) + \gamma(u-v)),$$

とおくと f_a^* は時間的極小曲面で, f_a の解析的延長になっている. $\{v=0\}$ が折り目特異点に対応している.

以下の2つの補題は [7] と同様の議論で示される.

補題 2.3 ([7, Lemma 3.1]). $f_a^*(u, v)$ は $(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, \pi)$ 上はめ込みである.

補題 2.4 ([7, Lemma 3.2]). $f_a^*(0, v)$ ($0 < v < \pi$) は x_2 軸と平行な線分であり, $f_a^*(\pi/3, v)$ ($0 < v < \pi$) は直線 $x_0 = x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0$ と平行な線分である.

さらに $f_a^*(u, \pi+v) = f_a^*(u, \pi-v)$ が成り立つことから次の補題を得る.

補題 2.5. $f_a^*(u, \pi)$ ($u \in \mathbb{R}$) は折り目特異点である.

$\Omega_a^{\min} := \{f_a^*(u, v); 0 \leq u \leq \pi/3, 0 \leq v \leq \pi\}$ とおく.

注意 2.6. [7] で構成された Schwarz D 型の平均曲率 0 曲面では, $f_a^*(u, \pi/2)$ が x_0 軸と平行な線分であったが, この例ではそのような対称性はない.

f_a^* の折り目特異点 $f_a^*(u, \pi)$ ($u \in \mathbb{R}$) からさらに曲面を延長するために

$$\sigma(s) := f_a^*(s, \pi) = \frac{1}{2}(\gamma(s+\pi) + \gamma(s-\pi)) \quad (0 \leq s \leq \pi/3)$$

とおく. このとき

$$\sigma'(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} \hat{\xi}(s)$$

が成り立つ. ただし

$$\hat{\xi}(s) = \xi(s+\pi) = \xi(s-\pi) = \frac{2}{a^3 + a^{-3} - 2 \cos 3s}$$

とする. 直接計算で次の補題が得られる.

補題 2.7. σ と γ は次の関係式を満たす.

$$\sigma'(s) = A\gamma'\left(\frac{\pi}{3} - s\right),$$

ただし

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ 0 & -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}.$$

この補題により

$$\sigma(s) = A\gamma\left(\frac{\pi}{3} - s\right) + \mathbf{c},$$

を得る。ただし

$$\mathbf{c} = \sigma(0) - A\gamma(\pi/3) = f_a^*(0, \pi) - Af_a^*(\pi/3, 0) \in \mathbb{L}^3$$

である。従って次の命題を得る (図 2.1 参照)。

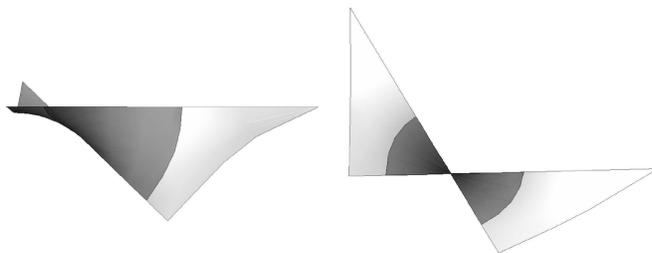
命題 2.8. f_a^* の $\sigma(s)$ における空間的曲面への延長を \hat{f}_a と書く。このとき次が成り立つ。

$$\hat{f}_a(z) = -Af_a(z) + \mathbf{c} \quad (|z| \leq 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/3).$$

$$\hat{\Omega}_a^{\max} := \{\hat{f}_a(z) ; |z| \leq 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/3\} \text{ とおくと,}$$

$$(2.4) \quad \Omega_a^{\max} \cup \Omega_a^{\min} \cup \hat{\Omega}_a^{\max}$$

の境界は 2 本の平面曲線と 2 本の線分からなる (図 2.1 参照)。このピース (2.4) を平面曲線に関する鏡映を繰り返して拡張すると, (2.4) の 6 個分が円環と同相になり, 境界の 2 つの連結成分は互いに「逆向きの」正三角形となる (図 2.2 参照)。この曲面 ((2.4) 6 つ分からなる曲面) は Schwarz rPD 曲面と呼ばれる (\mathbb{R}^3 の) 3 重周期的極小曲面と同相で, かつ同じ対称性を持つ。従って, (2.4) に鏡映を無限回施して得られる曲面は 3 重周期的である。



$$a = 0.5$$

図 2.1. 2 つの異なる視点から見た $\Omega_a^{\max} \cup \Omega_a^{\min} \cup \hat{\Omega}_a^{\max}$. 白い部分が空間的, 黒い部分が時間的である。

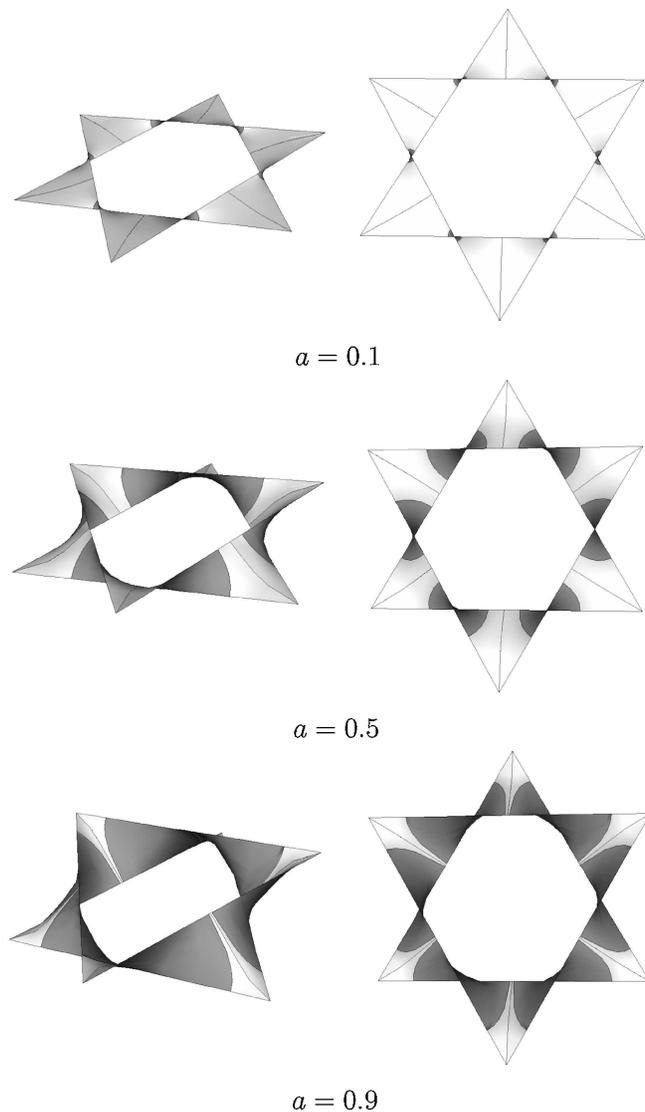


図 2.2. Schwarz H 型平均曲率 0 曲面.

こうして得られる 3 重周期的な平均曲率 0 曲面の 1 径数族を **Schwarz H 型平均曲率 0 曲面**と呼ぶ. Schwarz H 型という名前は, この曲面の空間的部分が \mathbb{R}^3 の Schwarz H 曲面と呼ばれる極小曲面 (の共役曲面) と同じ Weierstrass data を持つことによる.

3. SCHWARZ H 型平均曲率 0 曲面の極限

この節では Schwarz H 型平均曲率 0 曲面の極限について考察する. まず $a \rightarrow 0$ の極限については, 曲面に $\sqrt{a^3 + a^{-3}}$ をかけてリスケールしながら極

限をとると, [7, Remark 3.6] と同様の議論で曲面は常螺旋面に収束することがわかる.

次に極限 $a \rightarrow 1$ について考察する. このとき超楕円曲線 $w^2 = z(z^3 + a^3)(z^3 + a^{-3})$ は

$$w^2 = z(z^3 + 1)^2$$

に収束するから, Riemann 面 M_a は 6 点

$$z = e^{\pi i/3}, -1, e^{-\pi i/3}$$

でノードを持ち, 2 点

$$z = 0, \infty$$

で分岐点を持つ Riemann 面に収束する. この Riemann 面は種数 0 で 6 つのノードを持つ. よって極大面 f_a は

$$(3.1) \quad f_a \rightarrow \pm \operatorname{Re} \int \left(\begin{array}{c} -2z \\ 1+z^2 \\ i(1-z^2) \end{array} \right) \frac{i dz}{\sqrt{z(z^3+1)}}$$

に収束する. ζ を $\zeta^2 = z$ の 1 つの枝とすると, ζ はこの Riemann 面の座標になる. 6 つのノードは $\zeta = \pm e^{\pm \pi i/6}, \pm i$ に対応する. また (3.1) の右辺は

$$\pm 2 \operatorname{Re} \int \left(\begin{array}{c} -2\zeta^2 \\ 1+\zeta^4 \\ i(1-\zeta^4) \end{array} \right) \frac{i d\zeta}{\zeta^6 + 1}$$

となる. この曲面は時節で紹介する全平面で定義された平均曲率 0 グラフの特別な場合である (図 3.1 参照).

4. 全平面で定義された平均曲率 0 グラフ

この節では, 川上裕氏 (金沢大学), 國分雅敏氏 (東京電機大学), Wayne Rossman 氏 (神戸大学), 梅原雅顕氏 (東京工業大学), 山田光太郎氏 (東京工業大学) との共同研究で得られた結果 [4, 5] の 1 部を紹介する.

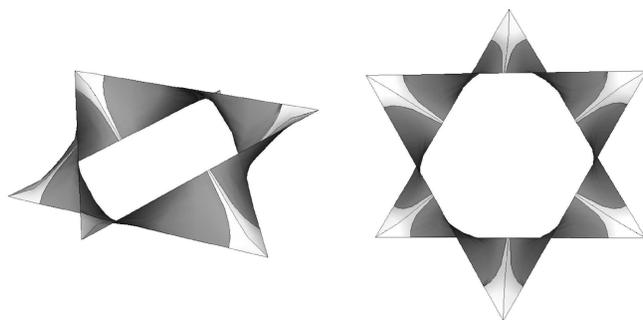
全平面で定義され, かつ空間的部分と時間的部分の両方を含む平均曲率 0 グラフとしては, 小林治氏による 2 つの例

$$x_0 = x_1 \tanh 2x_2, \quad x_0 = \log \cosh x_1 - \log \cosh x_2$$

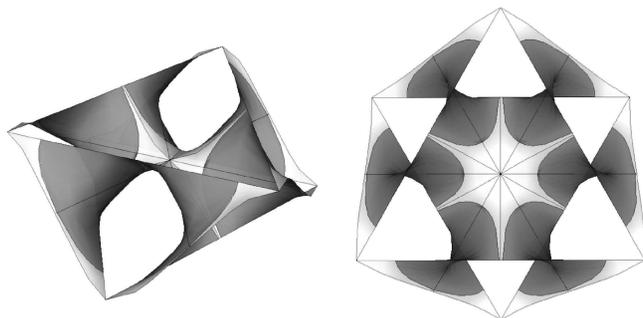
が知られているが, 我々は全平面で定義され, かつ空間的部分と時間的部分の両方を含む平均曲率 0 グラフでこれら 2 つの例を含む例を構成した.

n を 2 以上の自然数とし, $0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{2n-1}$ を $2n$ 個の実数とする.

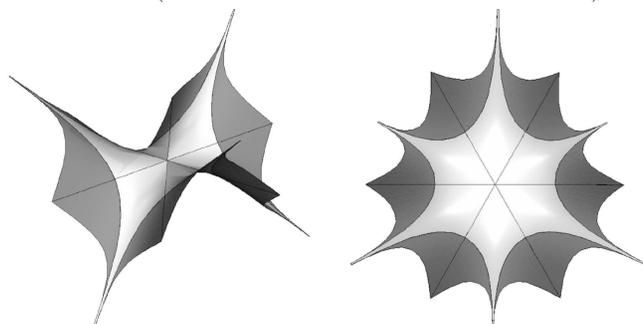
$$\{p_1, \dots, p_N\} = \{e^{i\alpha_0}, \dots, e^{i\alpha_{2n-1}}\}$$



$a = 0.9$



$a = 0.9$ (上と同じ曲面を別の格子で切った図)



$a \rightarrow 1$

図 3.1. Schwarz H型平均曲率0曲面の極限 $a \rightarrow 1$.

とおく. すなわち, $e^{i\alpha_0}, \dots, e^{i\alpha_{2n-1}}$ の中で相異なるものを p_1, \dots, p_N とおく.
 $M = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{p_1, \dots, p_N\}$, として

$$g = z^{n-1}, \quad \eta = i \frac{e^{i(\alpha_0 + \dots + \alpha_{2n-1})/2}}{\prod_{j=0}^{2n-1} (z - e^{i\alpha_j})} dz$$

とおく. このとき, (g, η) を Weierstrass data とする極大面 $f: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ は M 上一価で, かつ特異点集合 $S(f) = \{z \in M; |z| = 1\}$ は非退化折り目特異点となる.

この極大面を n 次の小林曲面と呼び, $(\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1})$ を f の **angle data** と呼ぶ. $n = 2$ で, angle data

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, \pi, \pi), \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, \pi/2, \pi, 3\pi/2)$$

から解析的延長で得られる平均曲率 0 が小林治氏による例である.

注意 4.1. [5] ではより一般の形で小林曲面を定義し, 本節で定義された曲面は小林曲面の **principal type** と呼んでいる.

定理 4.2 ([5]). $f : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ を次数 n の小林曲面, $(\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1})$ をその angle data とする. $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ を f の解析的延長として得られる平均曲率 0 曲面とする. $\alpha_{2n} = 2\pi$ とおく. このとき次が成り立つ.

- (1) $|\alpha_j - \alpha_{j+1}| < 2\pi/(n-1)$ ($j = 0, \dots, 2n-1$) かつ $\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1}$ が相異なるならば, \tilde{f} は固有はめ込みである.
- (2) $|\alpha_j - \alpha_{j+1}| < \pi/(n-1)$ ($j = 0, \dots, 2n-1$) かつ $\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1}$ が相異なるならば, \tilde{f} は全 (x_1, x_2) -平面で定義されたグラフである.
- (3) $n = 2$ ならば \tilde{f} は固有埋め込みである.

この定理で $n \geq 3$ の場合は \tilde{f} は固有埋め込みであるための条件は得られていないが,

$$\alpha_{2j} = \alpha_{2j+1} = \frac{2j}{n}\pi \quad (j = 0, \dots, n-1)$$

ならば \tilde{f} は固有埋め込みであることが [4] で示されている.

前節の極限 $a \rightarrow 1$ として得られる曲面は, $n = 3$ かつ

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3)$$

として得られる. 定理 4.2 によりこの曲面は全平面で定義された平均曲率 0 グラフである.

参考文献

- [1] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math., 15 (1970), 223–230.
- [2] S. Fujimori, *Triply periodic zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space*, preprint.
- [3] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada, and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 173–200.
- [4] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, and K. Yamada, *Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space*, to appear in Osaka J. Math.

- [5] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, and K. Yamada, *Entire zero mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, to appear in *Quart. J. Math.*
- [6] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, and S.-D. Yang, *New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space*, *Result. Math.* **56** (2009), 41–82.
- [7] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, and S.-D. Yang, *Embedded triply periodic zero mean curvature surfaces of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, *Michigan Math. J.* **63** (2014), 189–207.
- [8] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, *Math. Z.* **259** (2008), 827–848.
- [9] H. Karcher, *Construction of Minimal Surfaces*, *Surveys in Geometry*, 1–96, University of Tokyo, 1989.
- [10] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3* , *Tokyo J. Math.* **6** (1983), 297–309.
- [11] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, *Hokkaido Math. J.*, **35** (2006), 13–40.

〒 700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1, 岡山大学 理学部 数学科

E-mail address: fujimori@math.okayama-u.ac.jp