数理解析研究所講究録
第2017巻 2017年 84-102

複素双曲空間内の等質ラグランジュ部分多様体

阪市大数学研・梶ヶ谷徹

1. 序

リーマン多様体内の等質部分多様体の分類問題は, 部分多様体論において基本的な問題の一つである. 例えば, 部分多様体の余次元が1の場合, すなわち等質超曲面に対しては古典的にも多くの結果があり, 特にユークリッド空間$\mathbb{R}^n$ (Levi-Civita, Segre), 球面S^n (Hsiang-Lawson), 複素射影空間$\mathbb{C}P^n$ (高木), 一般のコンパクト型対称空間 (Kollross), 複素双曲空間$\mathbb{C}H^n$(Berndt-田丸) などのリーマン対称空間の場合には分類が与えられている (詳しくは例えば[6]やその中のリファレンスを参照). 等質部分多様体は様々な幾何学的性質を持つ部分多様体の豊富な具体例を提供する.

一方で, シンプレクティック多様体内のラグランジュ部分多様体は, シンプレクティック幾何において1つの重要な役割を演じる部分多様体である. 幾つかの等質ラグランジュ部分多様体は, シンプレクティック幾何においてもよい具体例を提供し, ラグランジュ交叉理論やハミルトン体積最小性問題と言った文脈において詳しく調べられている ([1], [19], [20], [21], [26], [32] など).

ラグランジュ部分多様体はシンプレクティック幾何的な対象であるが, 本稿では主にKähler多様体内で考える. (M, ω, J)を複素n次元のKähler多様体とする. ここで, ωはKähler形式, Jは複素構造である. Mの部分多様体Lがラグランジュ部分多様体であるとは, $\omega|_L = 0$かつ$\dim L = n$となることを言う. また, Lが$\mathrm{Aut}(M, \omega, J)$の連結閉部分群$H$の軌道として得られるとき, 等質と呼ぶ. 本稿における基本的な問題意識は, 特定のKähler多様体内の等質ラグランジュ部分多様体の構成および分類である.

1章では, 等質ラグランジュ部分多様体の一般的な性質や分類問題について, 一般のシンプレクティック多様体およびコンパクトKähler多様体内において知られている結果について簡単に述べる. 2章では, 非コンパクト型のエルミート対称空間内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体について述べる. 3章では, $\mathbb{C}H^n$内で, 岩澤分解の可解部分の閉部分群作用を用いて, 非コンパクト等質ラグランジュ部分多様体を構成し, 部分的な分類を与えた結果を紹介する.

なお, 2,3章の内容は, 橋永貴弘氏 (北九州高専) との共同研究[17]に基づくものである.

1.1. シンプレクティック多様体内のラグランジュ軌道

始めに, 一般のシンプレクティック多様体において, ラグランジュ軌道がどのようにして捉えられるかを説明する. 記号の準備も兼ねて, 基本的なことも復習する.

Mを実$2n$次元のシンプレクティック多様体とし, ωをシンプレクティック形式とする. 本稿では, 常にMは連結であると仮定する. Gを連結リー群とし, そのリー環を$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$の双対を$\mathfrak{g}^*$と書く. GがMに滑らかに作用するとする. Gの各元がMにωを保つ微分同相写像として作用する場合に, $G \curvearrowright M$をシンプレクティック作用と呼ぶ. さらにシンプレクティック作用が ハミルトン作用であるとは, 写像

$$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$$

であって, 次を満たすものが存在することを言う:

(i) 任意の$X \in \mathfrak{g}$に対して, 関数$\mu^X : M \to \mathbb{R}$を$\mu^X(p) := \langle \mu(p), X \rangle$と定める. そのとき, μ^Xは$d\mu^X = i_{\tilde{X}}\omega$を満たす. ここで, $\tilde{X}$はXの基本ベクトル場であり, iは内部積を表す.

(ii) 任意の$g \in G$に対して, $\mu \circ g = \mathrm{Ad}^*(g) \circ \mu$が成り立つ.

写像μのことを運動量写像と呼ぶ. 一般に, G-作用に関する運動量写像は一意的ではない. 事実, $c \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0 := \{c \in \mathfrak{g}^*; c([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0\}$をとれば, $\mu + c$は別の運動量写像である. しかし例えば, Gが半単純であれば, 運動量写像は一意的であることがわかる. 運動量写像に関する一般的な事柄に関しては, [2]などを参照.

M内の部分多様体Lは$\omega|_L = 0$を満たすとき, イソトロピックと呼ばれる. もし, Lがイソトロピックであれば, $\dim L \leq n$が分かる. $\dim L = n$となるとき, イソトロピック部分多様体はラグランジュ部分多様体と呼ばれる.

以下, GがMにハミルトン的に作用すると仮定する. G-軌道として得られるラグランジュ部分多様体を考える. まず, $\mathfrak{g}^*$の中心を$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*) := \{\alpha \in \mathfrak{g}^*;\ \mathrm{Ad}^*(g)\alpha = \alpha\ \forall g \in G\}$と定義すると, レベルセット$\mu^{-1}(c)$が$G$不変であるために必要十分条件は, $c \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)$となることであることに注意する.

補題 1. *LをMのG-不変なイソトロピック部分多様体とすると, ある$c \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)$が存在して, $L \subset \mu^{-1}(c)$が成り立つ.*

特に, ラグランジュ軌道は次のように捉えることができる:

補題 2 (cf. [26]). (M, ω)をシンプレクティック多様体とする. また, 連結リー群GがMにハミルトン的に作用しているとし, その運動量写像を$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$とする. $\mathcal{O}_p = G \cdot p$を$p \in M$を通る$G$-軌道とするとき, 以下が成り立つ:

(i) $\mathcal{O}_p$がイソトロピックとなるための必要十分条件は, ある$c \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)$に対し, $\mathcal{O}_p \subseteq \mu^{-1}(c)$となることである.

(ii) $\mathcal{O}_p$がラグランジュであるための必要十分条件は, 任意の$q \in \mathcal{O}_p$に対して$\mathrm{Ker} d\mu_q = T_q\mathcal{O}_p$, すなわち, $\mathcal{O}_p$が$\mu^{-1}(c)$の開部分集合になることである. 特に, G-作用がproperな作用なら, ラグランジュ軌道$\mathcal{O}_p$は$\mu^{-1}(c)$の連結成分に一致する.

一般に, 完備連結リーマン多様体の等長変換群の閉部分群作用はproperであることに注意する.

例 3. $M = \mathbb{C}^n$とし, $T^1 := \{e^{\sqrt{-1}\theta} Id_n; \theta \in [0, 2\pi]\}$を考える. T^1-作用はハミルトン的であり, その運動量写像は$\mu(z) = -\frac{1}{2}|z|^2$である. また, $\mathfrak{z}(\mathfrak{t}^*) = \mathfrak{t}^* \simeq \mathbb{R}$. T^1-軌道はすべてイソトロピック軌道であり, $\mu^{-1}(-c) = S^{2n-1}(\sqrt{2c})$ (ここで, $c > 0$)のいずれかに含まれる.

$T^n := \{\mathrm{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \ldots, e^{\sqrt{-1}\theta_n}); \theta_i \in [0, 2\pi]\ \forall i\}$を考えると, T^nの$\mathbb{C}^n$への作用はハミルトン的であり, その運動量写像は$\mu(z_1, \ldots, z_n) = -\frac{1}{2}(|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2)$である. T^n-軌道はすべてイソトロピックであり, 特に主軌道はラグランジュである. 実際, 正則値$c \in \mathfrak{t}^*$に対し, $\mu^{-1}(c) = T^n \cdot p$である.

一般にM^{2n}を$H^1(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ (例えば, Mが単連結)となるシンプレクティック多様体とすると, k-次元トーラスT^kのMへの作用は, ハミルトン作用になる[2].

また, 可換群GがMにハミルトン的に作用すると, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\{0\}$なので, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)=\mathfrak{g}^*$となり, すべての$G$-軌道はイソトロピックである. 逆に効果的な$G$-作用に対し, すべての$G$-軌道がイソトロピックになるならば, Gは可換群であることも証明できる ([2] の Proposition III.2.12).

一方で, 運動量写像の像や$\mu^{-1}(c)$の連結性に関しては, コンパクト性の仮定のもと, Kirwan によって次の一般的な結果が知られている:

定理 4 ([23], cf. [26]). Mをコンパクトシンプレクティック多様体とし, コンパクト連結リー群GがMにハミルトン的に作用するとする. このとき,
(1) 各$c\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)$に対して, $\mu^{-1}(c)$はM内の連結部分集合になる.
(2) Gの極大トーラスをTとし, そのリー環を$\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}$の正の Weyl 領域を$\mathfrak{t}_+$と書く. このとき, $\mu(M)\cap\mathfrak{t}_+$は$\mathfrak{g}^*$内の連結コンパクトな凸集合になる.

以下, ハミルトンG-作用がラグランジュ軌道を持つと仮定する. もし, G-作用がproper な作用であれば, ラグランジュ軌道の近傍の幾何学は, スライスを用いて記述できる. ラグランジュG-軌道$\mathcal{O}_p:=G\cdot p$に対し, その固定部分群をG_pとかき, そのリー代数を$\mathfrak{g}_p$とかく. 今, G-作用は proper な作用なので, 固定部分群G_pはコンパクトであることに注意する. $\mathcal{O}_p$の余接束$T^*\mathcal{O}_p$を等質ファイバー束

$$Y:=G\times_{G_p}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p)^*\to\mathcal{O}_p$$

と同一視し ($\mathcal{O}_p$は0切断として埋め込まれる), Y上に$T^*\mathcal{O}_p$上の標準的なシンプレクティック構造τを誘導する. G_pはコンパクトだから, 直和分解$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_p\oplus\mathfrak{m}$が成り立つように$G_p$-不変部分空間$\mathfrak{m}$を定義する. また, この直和分解に応じて, 同型$j:(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p)^*\tilde{\to}\mathfrak{m}^*$を定義しておく. このとき, 次が成り立つ[1].

定理 5 (cf. [3]). (M,ω)をシンプレクティック多様体, $G\curvearrowright M$を proper なハミルトン作用とする. また, $\mathcal{O}_p:=G\cdot p$がラグランジュ軌道であると仮定する. このとき, $\mathcal{O}_p$のM内でのG-不変近傍UとY内の0切断のG-不変近傍W, およびG-同変な微分同相$\phi:U\to W$で, $\phi^*\tau=\omega$かつ$\phi\circ i'=i$を満たすものが存在する. ここで, $i:\mathcal{O}_p\to U$, $i':\mathcal{O}_p\to W$である.

さらに, Y上のG-作用の運動量写像は,

$$\tilde{\mu}([g,v]):=\mathrm{Ad}^*(g)(j(v))$$

で与えられる.

YのG-不変近傍Wを十分小さくとれば, W内のG-軌道に関して, $\dim(G\cdot[e,v])\geq\dim(G\cdot[e,0])=\dim\mathcal{O}_p$とできる. よって補題2より, W内のG-軌道$G\cdot[e,v]$がラグランジュであるための必要十分条件は, $\tilde{\mu}([e,v])=j(v)\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)\ \Leftrightarrow\ v\in\mathfrak{m}^*\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)$である. よって一般には, $\dim(\mathfrak{m}^*\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*))$だけのラグランジュ軌道が$W\simeq U$内に存在する (より精密には [9] を参照). 特に, Gが半単純の場合は, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)=\{0\}$となるので, W内でラグランジュ軌道は0-切断のみである. もしさらに, MがコンパクトでGがコンパクト半単純なら, 補題2と定理4により, ラグランジュ軌道はM内で一意的であることがわかる. 逆に, 孤立したラグランジュ軌道を持つハミルトン作用は, 次のようにして特徴付けられる:

[1] 定理5は, シンプレクティックスライス定理の特別な場合 (G-軌道がラグランジュである場合) である. 一般的な記述については [3] を参照.

定理 6 ([4], [9]). Gをreductiveなリー群とし, 連結なシンプレクティック多様体Mにproperかつハミルトン的に作用するとする. また, G-作用はラグランジュ軌道$\mathcal{O}_p = G\cdot p$を持つと仮定する. このとき, ラグランジュ軌道$\mathcal{O}_p$が孤立している(すなわち, $\mathcal{O}_p$のあるG-不変近傍UでU内のラグランジュ軌道は$\mathcal{O}_p$のみであるものが存在する)ための必要十分条件は, Gの半単純な閉リー部分群G'で, $\mathcal{O}_p = G'\cdot p$となるものが存在することである.

次の命題は, regular(主軌道または例外軌道)なラグランジュ軌道を考える際に有用である(以下の証明は本質的にPacini [31]による):

命題 7 (cf. [31]). Mを連結シンプレクティック多様体とし, 連結リー群GのMへの作用はproperかつ効果的なシンプレクティック作用であると仮定する. このとき, もしG-作用がregularなラグランジュ軌道$\mathcal{O}$を持つならば, 任意の$p \in M^{reg} := \{p \in M; G\cdot p$は*regular*な軌道$\}$に対し, pにおける固定部分群は有限群になる. 従って特に, $\dim_{\mathbb{R}} G = n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

証明. GがMにproperに作用するので, ωに両立するG-不変概複素構造Jが存在する[3]. 従って, (M,ω,J)はalmost Kähler構造と仮定してよい. また, $g(\cdot,\cdot) := \omega(\cdot, J\cdot)$によって$G$-不変リーマン計量を定義する. $p \in M^{reg}$を1つ固定し, pにおける固定部分群をH_pとかく. また, そのリー環を$\mathfrak{h}$とかく. $\mathcal{O} = G\cdot p \simeq G/H_p$をラグランジュ軌道とすると, Jによって線形同型$T_p^{\perp}\mathcal{O} \simeq T_p\mathcal{O} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$が成り立つ(ここで, $T_p^{\perp}\mathcal{O}$は法空間). $T_p^{\perp}\mathcal{O}$と$T_p\mathcal{O}$には, それぞれスライス表現と線形イソトロピー表現を通じてH_pが作用するが, 線形同型$T_p^{\perp}\mathcal{O} \simeq T_p\mathcal{O}$は$H_p$-同変になることに注意する.

今, $\mathcal{O}$が主軌道であると仮定する. このとき, スライス表現は自明表現になるから, 線形イソトロピー表現も自明である. 一方, イソトロピー表現は$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$上の随伴表現$\mathrm{Ad}: H_p \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$と同値だから, その微分$\mathrm{ad}: \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$も自明である. よって, $\mathfrak{h}$は$\mathfrak{g}$のイデアルになり, H_pの単位連結成分H_p^0はGの正規部分群である. 従って, すべての$q \in M^{pri}$に対し, qにおける固定部分群の単位連結成分H_q^0はH_p^0に一致する. M^{pri}はMの中で開かつ稠密なので, 実際は, すべての点$q \in M$でH_p^0がH_q^0の部分群であることがわかる. つまり, H_p^0の元はすべての$q \in M$を固定し, G-作用が効果的であれば, $H_p^0 = \{Id\}$であり, 特にH_pは有限群になる.

次に, $\mathcal{O} = G/H'_{p'}$が例外軌道であるとする. このとき, $H'_{p'}/H_p$は有限群である. $\mathcal{O}$の近傍を, 等質ファイバー束$G \times_{H'_{p'}} (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}')$と同一視すると, $H'_{p'}$は$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$に有限群として作用しているにすぎないので, $H'^0_{p'}$は$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$に自明に作用する. よって, 先ほど同様, $H'^0_{p'}$はGの正規部分群になるが, $H'^0_{p'} = H_p^0$なので, 先と同様の議論により, 結論が得られる. □

系 8 (cf. [31]). M, Gを命題7の通りとする. このとき,

$$\mathcal{L}(M,G) := \{p \in M^{reg};\ G\cdot p \text{はラグランジュ軌道}\}$$

は, 空集合であるかまたは実次元$n + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)$の$M$の滑らかな部分多様体になる.

証明. $\mathcal{L}(M,G)$が空集合でなければ, 命題7より, $\dim G = n$である. よって, すべてのイソトロピックG-軌道はラグランジュであるので, 補題2より, $\mathcal{L}(M,G) = \mu_{reg}^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*))$になる. ここで, μ_{reg}はμのM^{reg}への制限である. 一方, 命題7より, 任意の$p \in M^{reg}$にお

いて $\mathfrak{g}_p=\{0\}$ だから, $\mu_{reg}: M^{reg}\to\mathfrak{g}^*$ は沈め込みとなるので, $\mathcal{L}(M,G)=\mu_{reg}^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*))$ は次元 $n+\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)$ の部分多様体になる. □

例 9. M^{2n} を正の Ricci 曲率を持つコンパクト Kähler-Einstein 多様体とする. この場合, M は単連結である (cf. [31]). もし, n-次元実トーラス T^n が M に正則等長的かつ効果的に作用するとすると, それはハミルトン作用であり, regular な軌道はすべてラグランジュになる (cf. 例3および[15]). 特に, $\mathcal{L}(M,G)=M^{reg}$. さらに, 極小なラグランジュ軌道が一意的に存在する (以下, 1.2節参照).

regular なラグランジュ軌道が現れるその他の例を, 3章で構成する.

また, 命題7から, 固定部分群 H_p の単位連結成分が非自明であるようなラグランジュ軌道 $\mathcal{O}=G\cdot p\simeq G/H_p$ は一般に特異軌道として現れることがわかる.

1.2. コンパクト Kähler-Einstein 多様体内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体
以下, シンプレクティック多様体の1つの典型例を与える Kähler 多様体を考える. この節では, 特に断らない限り M はコンパクトな Kähler 多様体と仮定する. ω を M の Kähler 形式, J を複素構造とする. また, $\omega(\cdot,\cdot)=g(J\cdot,\cdot)$ によって, M 上にリーマン計量 g を定める. また, リー群 G は M の正則等長変換群 $\mathrm{Aut}(M,\omega,J)$ の連結コンパクトな部分群とし, M にハミルトン的に作用すると仮定する[2].

Kähler 多様体内でラグランジュ軌道を持つ G-作用を考えよう. ラグランジュ軌道の存在については, Bedulli-Gori によって次の結果が知られている:

定理 10 ([4]). M をコンパクトな Kähler 多様体で $h^{1,1}(M)=1$ を満たすものとする. また, G を等長変換群の連結コンパクトな部分群とし, M にハミルトン的に作用すると仮定する. このとき, G-作用がラグランジュ軌道を持つための必要十分条件は, G の複素化 $G^{\mathbb{C}}$ が M 内で開 Stein 軌道を持つことである.

必要であることは次のようにしてわかる. $p\in M$ を通る G-軌道 $\mathcal{O}$ がラグランジュ軌道であれば, ラグランジュという条件, あるいは同値な条件として, $T_pM=T_p\mathcal{O}\oplus JT_p\mathcal{O}$ という直交直和が成り立つことから, $G^{\mathbb{C}}$-軌道が開であることおよび, G の p における固定部分群 G_p の複素化 $G_p^{\mathbb{C}}$ が $G^{\mathbb{C}}$ の p における固定部分群になることがわかる. 特に, 松島の定理[27] によって, p を通る $G^{\mathbb{C}}$-軌道 $G^{\mathbb{C}}\cdot p\simeq G^{\mathbb{C}}/G_p^{\mathbb{C}}$ は Stein になる. $h^{1,1}(M)=1$ という仮定は, この逆を示すのに必要になる. また, 小平の埋め込み定理により, $h^{1,1}(M)=1$ を満たすコンパクト Kähler 多様体 M は射影多様体である. 例えば, コンパクト型既約エルミート対称空間はこの仮定を満たしている. $h^{1,1}(M)>1$ の場合には, 開 Stein 軌道を持っていても, ラグランジュ軌道を持たない例が存在する ([4]).

以下, $G\curvearrowright M$ がラグランジュ軌道を持つと仮定する. ラグランジュ軌道の外在的性質について知られている結果を述べる. この節の残りは, M をコンパクト Kähler-Einstein 多様体で正の Ricci 曲率を持つものと仮定する. すなわち, ある定数 $C>0$ が存在して, M の Ricci 形式 ρ が $\rho=C\omega$ を満たすとする. このとき, G の M への作用はハミルトン的であり, 標準的な運動量写像 $\mu_{can}: M\to\mathfrak{g}^*$ は

$$\langle\mu_{can}(p),X\rangle:=-\frac{1}{2C}\mathrm{div}(J\tilde{X})_p \tag{1}$$

[2] 一般にシンプレクティック作用に対し, 運動量写像の存在には注意が必要である. M, G を上の通りとする場合には, G-作用がハミルトン的であるための必要十分条件は, G が M の Albanese トーラスに自明に作用することである (cf. [4]).

によって与えられる ([13], [33])[3]. ここで, 標準的と言っているのは, μ_{can} が $\Delta\mu^X_{can} = 2C\mu^X_{can}$, あるいは,

$$\int_M \mu^X_{can}\omega^n = 0$$

を満たす運動量写像として取っているためである (詳しくは, [13], [31] を参照).

μ_{can} の定義から, 一般に G-不変なラグランジュ部分多様体 L の平均曲率ベクトル H に対し,

$$\omega(H, \tilde{X})_p = -C\mu^X_{can}(p) \text{ for } X \in \mathfrak{g},\ p \in L$$

となることが簡単な計算でわかる. 特に, ラグランジュ軌道の極小性 (平均曲率0) は次のようにして特徴付けられる:

命題 11 ([4]). *G-作用がラグランジュ軌道 $\mathcal{O}$ を持つとする. このとき, $\mathcal{O}$ が極小であるための必要十分条件は, $\mu_{can}(\mathcal{O}) = 0$ となることである*[4].

例えば, G が半単純なら, (一意的な) ラグランジュ G-軌道は $\mu^{-1}_{can}(0)$ に含まれるので, 存在すれば必ず極小である.

また, コンパクト性の仮定のもとでは, ラグランジュ G-軌道 $\mathcal{O}$ が $\mu^{-1}_{can}(0)$ に含まれるなら, $\mathcal{O} = \mu^{-1}_{can}(0)$ であることが分かる (cf. 1.1節). つまり, G-軌道のうち極小なラグランジュ G-軌道は, それが存在すれば, 一意的である. 言い換えると,

系 12 ([4]). *M をコンパクト Kähler-Einstein 多様体とし, コンパクト連結リー群 G が M に正則等長変換として作用するとする. このとき, G-作用は高々1つの極小ラグランジュ G-軌道を持つ.*

一方, 極小ラグランジュ軌道の存在については, 次の結果が知られている:

定理 13 (cf. [31]). *M をコンパクト Kähler-Einstein 多様体で正の Ricci 曲率を持つものと仮定する. また, G を M の等長変換群の閉部分群とし, G-作用が regular なラグランジュ軌道を持つと仮定する. このとき, 極小なラグランジュ G-軌道が存在する.*

この定理の主張は, コンパクト性の仮定がないと一般に成り立たない. 例えば, $M = \mathbb{C}^n$ なら, コンパクト軌道は極小になり得ないし, $M = \mathbb{C}H^n$ においては, すべての (regular な) ラグランジュ軌道が極小にならない非コンパクト群作用も存在する (ただし, 非コンパクト群作用でもコンパクトの場合と同じような状況になっている場合もある. いずれの場合も, 3章の定理22を参照).

なお, 一般に Kähler 多様体内のコンパクトなラグランジュ軌道は常に, ハミルトン極小, すなわち, ハミルトン変形のもとでの体積汎関数の第一変分の臨界点になる. ハミルトン極小性や Kähler 多様体内のラグランジュ部分多様体の幾何学については, 大仁田によるサーベイ [30] が参考になる.

---

[3] 一般に M が Kähler 多様体であれば, $\mu' : M \to \mathfrak{g}^*$ を $\langle\mu'(p), X\rangle := -\frac{1}{2}\mathrm{div}(J\tilde{X})_p$ となるように定義すれば, μ' は G-同変であり, $d\mu'^X = \rho(\tilde{X}, \cdot)$ が成り立つ ([33]). 従って, M がコンパクトでなくとも, Ricci-平坦でない Kähler-Einstein 多様体であれば, (1) 式は正則等長変換群の連結閉部分群 G の M への運動量写像を与える.

[4] これは, 極小なラグランジュ軌道上の点は, 標準的な運動量写像の2乗ノルム関数 $||\mu_{can}||^2$ の最小値に到達する点である, と解釈することもできる (cf. [4]). しかし, 一般に逆は成り立たない. 一方で, コンパクト Kähler 多様体上のハミルトン作用 $G \curvearrowright M$ に対し, $||\mu_{can}||^2$ の最大値を与える点を通る G-軌道は複素部分多様体になることが知られている [16].

1.3. 分類定理

まず, 等質ラグランジュ部分多様体を改めて定義しておく:

定義 1. Kähler 多様体 M 内の部分多様体 L が等質であるとは, Kähler 多様体の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M, \omega, J)$ の連結閉部分群の軌道として得られることを言う. もしさらに, H が コンパクト群として取れるなら, $L = H \cdot p$ を コンパクト等質と呼ぶ.

特定の Kähler 多様体 M 内の等質ラグランジュ部分多様体の分類に関しては, M が複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$(Bedulli-Gori [4]) と複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C}) \simeq \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$(Ma-Ohnita [26]) の場合にそれぞれ結果が知られている. 現状として, 分類に関して確立された方法があるわけではなく, それぞれ独立な分類方法が取られている. いずれにしても, ラグランジュ軌道を持つ群作用がどのようにして得られるかが問題である. これらの分類について簡単に触れておく.

階数1のコンパクト型エルミート対称空間である複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ は, 応用上重要な対象である. 連結コンパクトリー群 G が $\mathbb{C}P^n$ に正則等長的に作用するとする. その作用はいつでもハミルトン作用である (前節参照). また, 定理10により, G-作用がラグランジュ軌道を持つことは, その複素化 $G^{\mathbb{C}}$ が開 Stein 軌道を持つことと同値である. 一方, 簡単な議論により, 複素連結リー群 $G^{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{C}P^n$ への作用が開かつ稠密な軌道を持つことは, $G^{\mathbb{C}} \times GL(1)$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ への作用が $\mathbb{C}^{n+1}$ 内で開かつ稠密な軌道を持つことと同値であることがわかる. 作用によって決まる $G^{\mathbb{C}} \times GL(1)$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ 上へのユニタリ表現を ρ とかくと, これは, 組 $(G^{\mathbb{C}} \times GL(1), \rho, \mathbb{C}^{n+1})$ が概均質ベクトル空間になることと同値である. 従って, $\mathbb{C}P^n$ 内でラグランジュ軌道を持つ G 作用の分類は, 概均質ベクトル空間 $(G^{\mathbb{C}} \times GL(1), \rho, \mathbb{C}^{n+1})$ であって, $\mathbb{C}P^n$ 内で開 Stein$G^{\mathbb{C}}$-軌道を持つものの分類に帰着される. 開 Stein 軌道を持つという条件は, ちょうど [34] の意味で正則な概均質ベクトル空間であることに対応している (cf. [34], Remark 26). 概均質ベクトル空間は, 佐藤-木村 [34] によって分類されており, これを用いて, Bedulli-Gori は, G が単純リー群である場合に, $\mathbb{C}P^n$ 内にラグランジュ軌道を持つ正則等長変換群の作用をすべて決定し, その詳細を与えた:

定理 14 (cf. [4]). 連結コンパクト単純リー群 G の $\mathbb{C}P^n$ に正則等長的な作用で, ラグランジュ軌道を持つものは21種類存在する.

この作用の具体的な表示については, [4] を参照して頂きたい. なお, コンパクト単純リー群の作用なので, これらの作用で得られるラグランジュ軌道は一意的で, かつ極小である.

階数2のコンパクト型エルミート対称空間である複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C}) \simeq \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) \simeq SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$ 内へのラグランジュはめ込みの典型的な例は, ガウス写像によって得られる. すなわち, L を単位超球面 $S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ 内の超曲面とすると, L の $\mathbb{R}^{n+2}$ 内における法空間を対応させるガウス写像

$$\mathcal{G} : L \to \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}), \quad p \mapsto \mathbf{p} \wedge \nu(p)$$

は向きづけられた二平面実グラスマン多様体 $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ 内へのラグランジュはめ込みを与える. ここで, $\mathbf{p}$ は $p \in L \subset \mathbb{R}^{n+2}$ における位置ベクトルであり, ν は L の $S^{n+1}(1)$ 内における (向きづけられた) 単位法ベクトルである.

Nが$S^{n+1}(1)$内の等質超曲面, すなわち, $SO(n+2)$の連結閉部分群GがNに推移的に作用するなら, Gはガウス像$L:=\mathcal{G}(N)$にも推移的に作用する. すなわち, Lは$Q_n(\mathbb{C})$内の等質ラグランジュ部分多様体である. $S^{n+1}(1)$内の等質超曲面は, Hsiang-Lawsonによって分類されており, 階数2のリーマン対称空間のイソトロピー表現の主軌道として得られる. これにより, $Q_n(\mathbb{C})$内の等質ラグランジュ部分多様体の豊富な具体例が得られる. その上で, Ma-Ohnitaは, 次を示した.

定理 15 ([26]). *$Q_n(\mathbb{C})$内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体は, $S^{n+1}(1)$内の等質超曲面のガウス像か, そのコンパクト等質ラグランジュ部分多様体からなるラグランジュ変形として得られる.*

もう少し正確に述べると, まず, Hsiang-LawsonおよびAsohによる$S^{n+1}(1)$上への余等質性1作用の分類を用いることで, $Q_n(\mathbb{C})$内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体Lは, ある階数2のコンパクト型リーマン対称対(U,K)が存在して, そのイソトロピー表現から自然に誘導される作用$K \curvearrowright Q_n(\mathbb{C})$の軌道として実現できることが分かる. 従って, 階数2のリーマン対称空間のイソトロピー表現からくる作用のラグランジュ軌道を考えればよく, もし, $\mathfrak{k}^*$の中心$\mathfrak{z}(\mathfrak{k}^*)$が自明なら, $K \curvearrowright Q_n(\mathbb{C})$に付随するラグランジュ軌道は一意的で, それは$K \curvearrowright S^{n+1}(1)$に付随する等質超曲面のガウス像に他ならない. 他方, $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}^*)$が自明でない作用は4種類存在し, 各作用に対し, ラグランジュ軌道の1変数族が得られる. この1変数族の中には, ガウス像として得られるラグランジュ軌道は一意的に存在する (標準的な運動量写像の零点に対応する). 詳細は[26]やサーベイ[30]を参照して頂きたい.

ところで, 一般にコンパクト等質ラグランジュ部分多様体はハミルトン極小であるが, ガウス写像については, 次の定理が成り立つ:

定理 16 (cf. [11]). *ガウス写像$\mathcal{G}$がハミルトン極小ならば, それは極小である* [5].

従って特に, 超球面内の等質超曲面のガウス像は$Q_n(\mathbb{C})$内ですべて極小になる. さらには, $Q_n(\mathbb{C})$内の極小等質ラグランジュ部分多様体は等質超曲面のガウス像としてのみ得られることもわかる[26]. なお, 等質超曲面のガウス写像の極小性は, 始めB. Palmerによって, 等型超曲面のガウス写像の極小性として示された事実である (cf. [30]). $Q_n(\mathbb{C})$内の等質ラグランジュ部分多様体に関する最近の進展については, [19]や[30]を参照して頂きたい.

2. 非コンパクト型エルミート対称空間内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体

以上の結果は, 主にKähler多様体がコンパクトの場合に成り立つことであった. 以下では, 非コンパクトかつ負のRicci曲率を持つ多様体の典型例である複素双曲空間$\mathbb{C}H^n$の場合に, 等質ラグランジュ部分多様体の分類について調べた幾つかの結果を紹介する. 詳細は論文[17]を参照していただきたい.

始めに, エルミート対称空間に関する基本的な事実について述べる. より詳しくは, リーマン幾何については[18], シンプレクティック幾何については[2]などを参照して頂きたい.

[5] この定理は, 最初B.Palmerによって部分的に示され, Draper-McIntoshが一般の場合を示した. なお, この結果は"geodesic Gauss map"にまで拡張されている[11].

Gを連結リー群とし, $\mathfrak{g}$をそのリー環, $\mathfrak{g}^*$を$\mathfrak{g}$の双対とする. $\lambda \in \mathfrak{g}^*$に対し, λを通るGの余随伴軌道を$\mathcal{O}_\lambda := \mathrm{Ad}^*(G) \cdot \lambda$とする. 任意の$\lambda \in \mathfrak{g}^*$に対し, $\mathcal{O}_\lambda$上には, 次のようなG不変シンプレクティック形式$\tilde{\omega}$が定義できる:

$$\tilde{\omega}_\nu(\tilde{X}, \tilde{Y}) := \langle \nu, [X, Y] \rangle, \tag{2}$$

ここで, $\nu \in \mathcal{O}_\lambda$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\tilde{X}$はG-作用によって生成されれる$\mathcal{O}_\lambda$上のXに関する基本ベクトル場である. 式(2)によって定義されるシンプレクティック構造を**Kirillov-Kostant-Souriau**のシンプレクティック構造と呼ぶ. Gの$\mathcal{O}_\lambda$上への自然な作用はハミルトン作用になり, その運動量写像はinclusion $\mu : \mathcal{O}_\lambda \to \mathfrak{g}^*$で与えられる.

以下, $\mathfrak{g}$上に$\mathrm{Ad}(G)$-不変な非退化二次形式Bが存在すると仮定する. これは例えば, Gがコンパクトであるか, もしくは半単純であればいつでも成り立つことに注意する. Bが$\mathfrak{g}$上で非退化なので, 写像$X \mapsto B(X, \cdot)$によって, 同一視$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$が得られる. この同一視のもとでは, $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathfrak{g}^*$は随伴軌道$\mathcal{O}_X := \mathrm{Ad}(G) \cdot X \subset \mathfrak{g}$に対応する. ここで, $\lambda = B(X, \cdot)$である. 軌道$\mathcal{O}_\lambda \simeq \mathcal{O}_X$を等質空間$G/G_\lambda$ (ここでG_λはλにおける固定部分群)と同一視すれば, GのG/G_λ上への自然な左作用に関する運動量写像$\mu : G/G_\lambda \to \mathfrak{g}^*$は,

$$\mu([g]) = \mathrm{Ad}^*(g)\lambda = B(\mathrm{Ad}(g)X, \cdot)$$

と書けることになる. ただし, $\mu([e]) = \lambda = B(X, \cdot)$である.

HをGの連結閉部分群とし, $\mathfrak{h}$をそのリー環とする. そのとき, HのG/G_λ上への作用は再びハミルトン作用であり, 運動量写像$\mu_H : G/G_\lambda \to \mathfrak{h}^*$は次で与えられる:

$$\mu_H([g]) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}^*} \circ \mu([g]) = B(\mathrm{Ad}(g)\zeta, \cdot)|_{\mathfrak{h}}, \tag{3}$$

ここで, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}^*}$は$\mathfrak{h}^*$上への標準的な射影である.

Gがコンパクト半単純リー群の場合には, (余)随伴軌道は一般化された旗多様体と呼ばれる. この場合には, Kirillov-Kostant-Souriauのシンプレクティック形式は, ある複素構造に関して, Kähler形式を定める (例えばSection 8 in [8]を参照). 特に, コンパクト型のエルミート対称空間はこのようにして得ることができる.

以下, $M = G/K$を連結な非コンパクト型のエルミート対称空間, (G, K)を対応するエルミート対称対とする. GとKのリー代数をそれぞれ$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$とかく. ここで, $\mathfrak{g}$は非コンパクト半単純リー代数である. $(\mathfrak{g}, \theta)$を(G, K)に対する直交対称リー代数とし, θによる$\mathfrak{g}$のCartan分解を$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$とする. $\mathfrak{g}$上のKilling-Cartan形式Bを用いて, $\mathfrak{g}$上に内積$\langle , \rangle$を$\langle X, Y \rangle := -B(X, \theta Y)$, $X, Y \in \mathfrak{g}$によって定める. $\langle , \rangle$の$\mathfrak{p}$への制限は, $\mathfrak{p}$上の$\mathrm{Ad}_G(K)$-不変内積を定め, これによって, M上のG-不変リーマン計量を定める. $M = G/K$はエルミート対称空間なので, Kは1次元の中心$C(K)$を持つ. $C(K)$のリー代数を$\mathfrak{c}(\mathfrak{k})$とかく. $\zeta \in \mathfrak{c}(\mathfrak{k})$を$J_o := \mathrm{ad}(\zeta)|_{\mathfrak{p}}$が$M$上の標準的な$G$-不変複素構造$J$を定めるように取る. また, $\omega(\cdot, \cdot) := g(J\cdot, \cdot)$と定める. このとき, (ω, J)はM上のKähler構造であり, 特にMは単連結で非正の断面曲率をもつKähler-Einstein多様体になる.

ζの双対を$\lambda_0 := B(\zeta, \cdot) \in \mathfrak{g}^*$で定め, λ_0を通る余随伴軌道$\mathcal{O}_{\lambda_0} = \mathrm{Ad}^*(G)\lambda_0$を考えると, ζは$\mathfrak{c}(\mathfrak{k})$の元だから, λ_0における固定部分群はKであり, $\mathcal{O}_{\lambda_0} \simeq G/K$という同一視ができる. $\mathcal{O}_{\lambda_0}$上にはKirillov-Kostant-Souriauのシンプレクティック形式$\tilde{\omega}$が

定義されていたが, 今の場合, $\tilde{\omega}$ と ω は $\mathcal{O}_{\lambda_0} \simeq G/K$ の同一視のもと一致する. 実際, $X, Y \in T_{\lambda_0}\mathcal{O}_{\lambda_0} \simeq \mathfrak{p}$ に対して,

$$\omega_o(X,Y) = -B(J_oX, \theta Y) = B([\zeta, X], Y) = B(\zeta, [X,Y]) = \tilde{\omega}_{\lambda_0}(X,Y)$$

となる. よって, 非コンパクト型のエルミート対称空間 M を $\mathcal{O}_{\lambda_0}$ と同一視することで, 上述の余随伴軌道に関するシンプレクティック幾何を適用することができる. 特に, G の M への作用 (およびその部分群の作用) はハミルトン作用であり, 運動量写像は, 一般に (3) 式で表すことができる (非平坦な Kähler-Einstein 多様体なので, (1) 式を用いることもできる).

一方, McDuff [28] の結果により, 任意の非コンパクト型エルミート対称空間 M に対して, 大域 Darboux の定理が成り立つことが知られている. すなわち, M は標準的なシンプレクティックベクトル空間 $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ にシンプレクティック微分同相になる. より詳しく, Deltour によって, 次のことが示されている:

定理 17 (Theorem 4.1 in [10]). $M = G/K \simeq G \cdot \lambda_0$ を非コンパクト型エルミート対称空間とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とする. そのとき, K 同変な微分同相写像 $\phi : M \to \mathfrak{p}$ であって $\phi^*\omega_o = \omega$ を満たすものが存在する. ここで, K は $\mathfrak{p}$ にイソトロピー表現を通じて作用する.

この定理は, 実際は Deltour によってさらに一般化されていることに注意しておく ([10]).

$\mathfrak{k}^*$ を非退化二次形式 $\langle , \rangle|_{\mathfrak{k}}$ によって, $\mathfrak{k}$ と同一視する. $K \curvearrowright \mathfrak{p}$ はハミルトン作用であり, 運動量写像 $\tilde{\mu}_K : \mathfrak{p} \to \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ は次で与えられる (cf. [10], [12]).

$$\tilde{\mu}_K(X) = \frac{1}{2}\mathrm{ad}(X)^2\zeta. \tag{4}$$

なお, イソトロピー表現は対応する双対コンパクト型対称空間のそれと同値であることに注意しておく. 定理 1 より, K の M への運動量写像は $\mu_K : M \to \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$

$$\mu_K = \tilde{\mu}_K \circ \phi \tag{5}$$

と書くことができる.

例 18. $\mathbb{C}H^n \simeq SU(1,n)/S(U(1) \times U(n)) = G/K$ を考える. Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と Cartan 対合 θ は次で与えられる:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{su}(1,n) \\
&= \{X \in M_{n+1}(\mathbb{R});\ {}^tXI_{1,n} + I_{1,n}\overline{X} = 0,\ \text{where } I_{1,n} = \mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1)\} \\
&= \left\{ \left[\begin{array}{c|c} a & {}^t\overline{z} \\ \hline z & A \end{array}\right];\ a \in \mathfrak{u}(1),\ z \in \mathbb{C}^n,\ A \in \mathfrak{u}(n),\ a + \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}A = 0 \right\},
\end{aligned}$$

$$\theta X = I_{1,n}XI_{1,n} \text{ for } X \in \mathfrak{g},$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} a & \\ \hline & A \end{array} \right]; a \in \mathfrak{u}(1),\ A \in \mathfrak{u}(n), a + \mathrm{tr}_{\mathbb{C}} A = 0 \right\} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(n)),$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} & {}^t\overline{z} \\ \hline z & \end{array} \right]; z \in \mathbb{C}^n \right\} \simeq \mathbb{C}^n.$$

$\mathfrak{p}$上の標準的な複素構造 J_o は $J_o = \mathrm{ad}\zeta|_{\mathfrak{p}}$ で定義される. ここで,

$$\zeta = \frac{\sqrt{-1}}{n+1} \left[\begin{array}{c|c} -n & \\ \hline & Id_n \end{array} \right] \in \mathfrak{c}(\mathfrak{k}).$$

$\mathbb{C}^{1,n}$ を符合 $(1,n)$ の擬リーマン計量 $\langle , \rangle$ を持つ複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^{1+n}$ とし, $P(\mathbb{C}^{1,n})$ をその複素射影空間とする. そのとき, $\mathbb{C}H^n$ は,

$$\mathbb{C}H^n = \{[l] \in P(\mathbb{C}^{1,n}); l = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{z\} \text{ with } \langle z, z \rangle < 0\}.$$

と書ける. また, $\mathbb{C}H^n$ は単位球体 $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < 1\}$ と写像

$$B^n \ni z \mapsto [1; z] \in \mathbb{C}H^n \subset P(\mathbb{C}^{1,n}),$$

によって同一視される. $SU(1,n)$ はこの写像を通して B^n に自然に作用する. そのとき, 写像 $\phi : \mathbb{C}H^n \simeq B^n \to \mathbb{C}^n \simeq \mathfrak{p}$,

$$z \mapsto \sqrt{\frac{C}{1-|z|^2}}\, z$$

は K-同変なシンプレクティック微分同相写像である (cf. Section 3 in [14]). ここで, C は正の定数である. (4) と (5) を使えば, K-作用の運動量写像 $\mu_K : \mathbb{C}H^n \simeq B^n \to \mathfrak{k}$ は次のように計算される:

$$\mu_K(z) = \frac{-\sqrt{-1}C}{1-|z|^2} \left[\begin{array}{c|c} |z|^2 & \\ \hline & -z{}^t\overline{z} \end{array} \right] \in \mathfrak{k} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(\mathfrak{n})), \tag{6}$$

ここで, z は $\mathbb{C}^n$ の列ベクトルと見なしている.

H を G の連結コンパクトなリー部分群とする. M は非コンパクト型のエルミート対称空間なので, H は極大コンパクト部分群 K の部分群であると仮定して良い (Theorem 2.1 in [18] Ch. VI). 定理17により, 非コンパクト型のエルミート対称空間 $M = G/K$ 内のラグランジュ部分多様体は, ϕ を通じて, $\mathfrak{p} \simeq \mathbb{C}^n$ 内のそれと対応する. さらに, 作用 $H \curvearrowright M$ がラグランジュ軌道 $\mathcal{O} := H \cdot p$ を持つとすると, ϕ が K-同変であることから,

$\mathcal{O}' := \phi(H \cdot p) = \mathrm{Ad}_{G/K}(H) \cdot \phi(p)$ は, $\mathfrak{p}$ 内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体である. $\mathbb{C}^n$ 内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体は, Hopf 束 $\pi : S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ を通じて $\mathbb{C}P^{n-1}$ 内のそれと対応していることにも注意しておく.

$M = \mathbb{C}H^n \simeq SU(1,n)/S(U(1) \times U(n))$ のときは, イソトロピー表現は, 次で与えられる:

$$\mathrm{Ad}_{G/K}(k)\xi = w^{-1}A\xi,$$

$$\text{where } k = \left[\begin{array}{c|c} w & \\ \hline & A \end{array}\right] \in S(U(1) \times U(n)) \text{ and } \xi \in \mathfrak{p} \simeq \mathbb{C}^n.$$

特に, $\mathrm{Ad}_{G/K} : K \to U(n)$ は全射であり, 逆対応が存在する:

定理 19 ([17], Y. Ohnita). $\mathcal{O}'$ を $\mathfrak{p} \simeq \mathbb{C}^n$ (または $\mathbb{C}P^{n-1}$) 内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体とする. そのとき, $\mathcal{O} := \phi^{-1}(\mathcal{O}')$ (または $\mathcal{O} := \phi^{-1} \circ \pi^{-1}(\mathcal{O}')$) は $\mathbb{C}H^n$ 内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体である. さらに, 合同の違いを除いて, $\mathbb{C}H^n$ 内のすべてのコンパクト等質ラグランジュ部分多様体はこのようにして得られる.

$\mathbb{C}^n$ や $\mathbb{C}P^{n-1}$ 内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体の具体例や分類結果については, [1], [4] および [32] などを参照して頂きたい.

注意 20. 定理19は(筆者が知る限り)大仁田によって最初に指摘された事実である. 大仁田による別証明をここに述べておく. $K = S(U(1) \times U(n))$ の中心を $C(K)$ とかくと, $C(K)$ は,

$$C(K) = \{\mathrm{diag}(e^{-n\sqrt{-1}\theta}, e^{\sqrt{-1}\theta}, \ldots, e^{\sqrt{-1}\theta}); \theta \in \mathbb{R}\} \simeq S^1.$$
$$\mathfrak{c}(\mathfrak{k}) = \{\sqrt{-1}\mathrm{diag}(-n\theta, \theta, \ldots, \theta); \theta \in \mathbb{R}\} \in \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(n))$$

で与えられる. $C(K)$ 作用の運動量写像を $\mu_{C(K)} : \mathbb{C}H^n \to \mathfrak{c}(\mathfrak{k})^*$ とかく. ここで, $\mathfrak{c}(\mathfrak{k})$ は $C(K)$ のリー代数である. 任意の正則値 $c \in \mathfrak{c}(\mathfrak{k})^*$ に対して, レベルセット $\mu^{-1}_{C(K)}(c)$ は S^{2n-1} と微分同相である. このことは, 例えば, $\mathfrak{c}(\mathfrak{k})$ の適当な基底 ξ を取って, (6) 式を使って運動量写像を計算すると,

$$\mu_{C(K)}(z) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{c}(\mathfrak{k})} \circ \mu_K(z) = C' \frac{|z|^2}{1-|z|^2}\xi$$

となっていて (ここで, C' は0でないある定数), この式から, $\mu^{-1}_{C(K)}(c) = \{z \in B^n; |z|^2 \equiv const.\} \simeq S^{2n-1}$ が分かる. あるいは, $\mu^{-1}_{C(K)}(c)$ は1つの K-主軌道に一致していて, それは $\mathbb{C}H^n$ 内の測地球面に他ならない.

$C(K)$ は $\mu^{-1}_{C(K)}(c)$ に自由に作用するので, Kähler 商 $M_c := \mu^{-1}_{C(K)}(c)/C(K)$ は滑らかな Kähler 多様体である. この Kähler 商 M_c は, Fubini-Study 計量を持つある $\mathbb{C}P^{n-1}$ に正則等長的になる. この主 S^1 束を $\tilde{\pi} : \mu^{-1}_{C(K)}(c) \to \mathbb{C}P^{n-1}$ と書こう. M_c はシンプレクティック商なので, $M_c \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$ 内の部分多様体 L_c がラグランジュであるための必要十分条件は, $\tilde{\pi}^{-1}(L_c)$ が $\mathbb{C}H^n$ 内のラグランジュ部分多様体になることである. 特に, $\mathbb{C}H^n$ 内の $C(K)$-不変なラグランジュ部分多様体はすべてこのようにして得ることができる.

$\overline{H}'$ を $SU(n)$ の連結閉部分群とし, その $\mathbb{C}P^{n-1}$ への作用がラグランジュ軌道 $\mathcal{O}'$ を持つとする. この作用は, $\overline{H} := \{1\} \times \overline{H}' \subset K$ の $\mathbb{C}P^{n-1} \simeq \mu^{-1}_{C(K)}(c)/C(K)$ への作用と同値だから, $\overline{H}' \curvearrowright \mathbb{C}P^{n-1}$ は $C(K)\overline{H} \curvearrowright \mu^{-1}_{C(K)}(c)$ を誘導する. $C(K)\overline{H}$-作用は, $\tilde{\pi}^{-1}(\mathcal{O}')$

に推移的に作用するので, $\mathcal{O} = \tilde{\pi}^{-1}(\mathcal{O}')$ はコンパクト等質ラグランジュ部分多様体である. 逆に, $\mathcal{O}$ を $\mathbb{C}H^n$ 内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体とすると, それは K のある連結閉部分群の軌道としてかけるとしてよい. 従って, $\mathcal{O}$ はいずれかの K-軌道 $(= \mu_{C(K)}^{-1}(c))$ に含まれ, 従ってまた $C(K)$-不変になる. よって, $\mathbb{C}H^n$ 内の任意のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体は, (合同の違いを除き)$\mathbb{C}P^{n-1}$ 内のそれから得ることができる.

なお, 以上の議論は, その他の Kähler 商空間に対しても応用できる. 1つの一般化については, [22] にその詳細を述べる予定である.

注意 21. 高階数のエルミート対称空間では, 一般に逆対応が存在するとは限らない ([17]).

3. 可解群の作用により得られる非コンパクト等質ラグランジュ部分多様体

前節では, $\mathbb{C}H^n$ 内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体は $\mathfrak{p} \simeq \mathbb{C}^n$ 内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体と対応することを見た. しかし, 非コンパクト型エルミート対称空間の自己同型群は非コンパクトであり, 種々の非コンパクト群が作用する. そこで次に, 非コンパクト等質ラグランジュ部分多様体の構成と分類を考えたい. そのために, ここでは, 岩沢分解の可解部分に着目する.

以下, $M = \mathbb{C}H^n \simeq G/K = SU(1,n)/S(U(1) \times U(n))$ とする. G, K のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ と書き, Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と書く. $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間 (今は次元が1) とし, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$$

とかく. ここで, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{g}_\lambda := \{X \in \mathfrak{g};\ \mathrm{ad}(H)X = \lambda(H)X\ \forall H \in \mathfrak{a}\}$ である.今,

$$\mathfrak{n} := \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \text{ and } \mathfrak{s} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

とおく. このとき, 岩澤分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ を得る. ここで, $\mathfrak{n}$ は冪零部分代数, 特に今はハイゼンベルグ代数であり, $\mathfrak{s}$ は可解部分代数になることに注意する. $\mathfrak{s}$ に対応する連結リー群を S とすると, S は単連結であり, M に単純推移的に作用することが知られている. 従って特に, S-同変な微分同相写像 $S \simeq M$ が存在する.

我々は論文 [17] において, S の連結閉部分群で, ラグランジュ軌道を持つ作用を完全に分類し, そのラグランジュ軌道の様子を調べた. その結果が次である:

定理 22 ([17]). $S \curvearrowright M = \mathbb{C}H^n$ を上で定義した可解群作用とする.

(1) S の連結閉部分群の作用として得られる等質ラグランジュ部分多様体の合同類は, $\theta \in [0, \pi/2]$ でパラメトライズされる.

(2) S' を S の連結閉部分群で, $S' \curvearrowright M$ がラグランジュ軌道を持つと仮定する. このとき, $S' \curvearrowright M$ はある二つの作用 $L_0 \curvearrowright M$ か $L_{\pi/2} \curvearrowright M$ のいずれかに軌道同値である. さらに,
- L_0-作用はラグランジュ軌道の1変数族を持ち, それは $(-\infty, \infty)$ の範囲でパラメトライズされる. また, このうち極小軌道は一意的に存在する.
- $L_{\pi/2}$-作用はすべての軌道がラグランジュ軌道であり, かつすべて合同である.

2つの作用 $L_0 \curvearrowright M$ と $L_{\pi/2} \curvearrowright M$ の正確な定義は後で述べることにして, $M = \mathbb{C}H^1$ の場合にどのようになっているかを図1に示しておく.

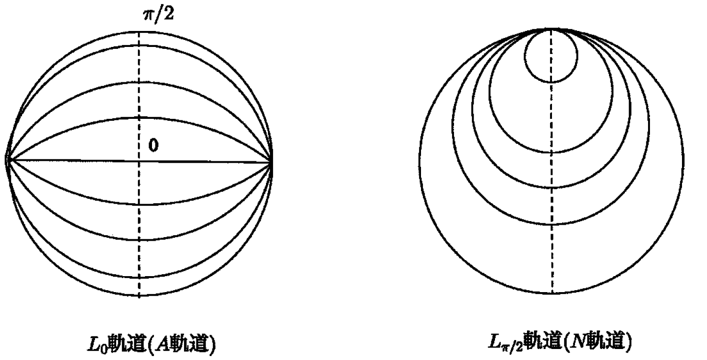

図 1: $M = \mathbb{C}H^1 \simeq B^1$ の場合.

ここで, 得られているラグランジュ軌道はすべて非コンパクトで, $\mathbb{R}^n$ に微分同相である. また, S の部分群作用で得られるラグランジュ軌道のうち, 極小となるのは, それが全測地的な $\mathbb{R}H^n$ になるとき (L_0-作用の原点軌道) だけであるが, すべての軌道が (非コンパクト軌道であるが), ハミルトン極小と呼ばれる制限付き変形のもとでの極小部分多様体になっている (以下, 命題25参照). また, $L_{\pi/2}$ の作用の軌道はすべてホロ球面に含まれるが, L_0-作用の軌道はホロ球面には含まれない.

定理22の証明の概略を述べる前に, S の代数構造について簡単に復習しておく. 特に今の場合, $S(\simeq \mathbb{C}H^n)$ はDamek-Ricci空間の特別な場合であることに注意する. Damek-Ricci空間の一般論については [7] を参照して頂きたい. また, [35] も参考になる.

$S \simeq M$ の同一視のもと, S 上の左不変リーマン計量, 複素構造, シンプレクティック形式は, $\mathfrak{s} \simeq T_eS$ 上の内積 $\langle , \rangle_{\mathfrak{s}}$, 複素構造 $J_{\mathfrak{s}}$, 非退化二次形式 $\omega_{\mathfrak{s}}$ をそれぞれ定める. 例えば, Killing形式から定まる $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle , \rangle$ と $\langle , \rangle_{\mathfrak{s}}$ との関係は $\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{s}} = \langle X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}} \rangle + \frac{1}{2}\langle X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}} \rangle$ $(X, Y \in \mathfrak{s})$ で与えられる. ここで, 下付きの添え字は直交射影である. 複素構造 $J_{\mathfrak{s}}$ に関しては, $\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ はともに $J_{\mathfrak{s}}$ に関する $\mathfrak{s}$ の複素部分空間を定め, さらには, $J_{\mathfrak{s}}\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{2\alpha}$ が成り立つことが分かる (cf. [7]). 従ってまた, $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ の $\langle , \rangle_{\mathfrak{s}}$ に関する正規直交底 $\{A, Z\}$ を $JA = Z$ かつ $\alpha(A) > 0$ となるように取ることができる. ここで, $\mathfrak{a} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{A\}$ であり, $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{Z\}$ である. さらに, $\mathfrak{g}_\alpha$ の正規直交基底としては, $\{X_1 \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}$ を $JX_i = Y_i$ かつ $[X_i, Y_i] = Z (i = 1, \ldots, n-1)$ となるようにとることができる (cf. [35]). また, $\mathfrak{s}$ 上のリー括弧積は次の公式で計算できる (cf. [5]):

$$[aA + U + xZ, bA + V + yZ] = -\frac{b}{2}U + \frac{a}{2}V + \Big(-bx + ay + \omega_{\mathfrak{s}}(U, V) \Big) Z, \quad (7)$$

ここで, $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ であり, $U, V \in \mathfrak{g}_\alpha$ である.

さらには, 指数写像 $\exp_{\mathfrak{s}} : \mathfrak{s} \to S$ は微分同相写像になる. この指数写像や S 上の群構造は, ハイゼンベルグ群 N の指数写像を用いて明示的に書くことができる ([7] を参照).

ここで, ハイゼンベルグ群はtwo-stepの冪零リー群であり, その群構造は比較的扱いやすいものであることに注意する. この他にも, S(あるいはDamek-Ricci空間)に関しては様々なことがわかるが([7]), これらの点が可解リー群Sの扱いやすい理由である. 例えば, 随伴表現も書き下すことができ, これによって, S-作用の運動量写像を陽に計算することができる(以下, 命題24参照).

以上を準備として, 定理22の証明の概略を述べる. 証明の詳細は論文[17]を参照して頂きたい.

証明の概略. S'の任意の軌道は, S'のSの中での適当な共役類S''をとれば, S''の原点軌道に等長的であるから, 初めから, S'の原点軌道がラグランジュ軌道であるとしてよい. このとき, $T_o(S' \cdot o) \simeq \mathfrak{s}'$, $T_oM \simeq T_o(S \cdot o) \simeq \mathfrak{s}$の同一視のもと, $\mathfrak{s}'$は$\mathfrak{s}$のラグランジュ部分空間となるような部分代数である. このような部分代数を単にラグランジュ部分代数と呼ぶことにする. 逆に$\mathfrak{s}$のラグランジュ部分代数$\mathfrak{l}$をとって, $L := \exp_{\mathfrak{s}} \mathfrak{l}$とおけば, Lの原点軌道はラグランジュ軌道である. 従って, Sの閉部分群の場合, ラグランジュ軌道の分類は, $\mathfrak{s}$のラグランジュ部分代数の分類に帰着する.

(1) [ラグランジュ部分代数の分類] 可解代数$\mathfrak{s}$の構造を使うと, ラグランジュ部分代数について, 次のことを示すことができる:

補題 23. $\mathfrak{l}$を$\mathfrak{s}$のラグランジュ部分代数とする. このとき, $\mathfrak{l}$は二つのラグランジュ部分空間$\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{g}_\alpha$と$\mathfrak{l}_2 \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$の直和として得られる.

すると, 簡単な考察から, ラグランジュ部分空間$\mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{g}_\alpha$を標準化することができることがわかり, ラグランジュ部分代数$\mathfrak{l}$は, ある$\theta \in \mathbb{R}$が存在して, 標準的なラグランジュ部分代数

$$\mathfrak{l}_\theta := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, \ldots, X_{n-1}\} \oplus \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\cos\theta A + \sin\theta Z\}$$

に同型になる. また, 再び簡単な考察により, $\mathfrak{l}_\theta$の(リー代数としての)同型類は, θによって, $[0, \pi/2]$の範囲でパラメトライズされることがわかる.

(2) [合同類の決定] $\theta \in [0, \pi/2]$に対し, $L_\theta := \exp_{\mathfrak{s}} \mathfrak{l}_\theta$とおくと, L_θの原点軌道はL_θと微分同相なラグランジュ軌道である. 原点軌道の平均曲率を計算することにより, θが異なればそれらの原点軌道は互いに等長的ではないことがわかる(以下命題25を参照). 従って, Sの部分群作用として得られるラグランジュ軌道の合同類は, $\theta \in [0, \pi/2]$でパラメトライズされ, 原点軌道$L_\theta \cdot o$が合同類の代表元を与える.

(3) [軌道同値類の決定] Sの部分群作用は, L_θ-作用のいずれかに軌道同値である. また, L_0-作用と$L_{\pi/2}$-作用が軌道同値でないこともすぐにわかる. $\theta \in [0, \pi/2)$に関しては, 結果的に, L_θ-作用とL_0-作用は, $\exp_{\mathfrak{s}}(\tan\theta Z) \in S$による等長変換によって軌道同値になることがわかる. 直感的には, 図1を見れば推測できるが, 図1のような状況が一般次元においても成り立っていることを証明することができる(以下(4)を参照).

(4) [各作用に付随するラグランジュ軌道の決定] $\theta = \pi/2$の場合に限り, L_θは可換群になる. 前節で述べたことから, L_θの作用はハミルトン作用になるが, 可換群のハミルトン作用は, その軌道がすべてイソトロピック軌道になることで特徴付けられることが知られている(cf. [2]). 特に$L_{\pi/2}$-作用は単純推移的に作用するので, すべての軌道が同じ次元nを持ち, ラグランジュ軌道になる. 実はより強く, すべての軌道が合同であることがわかる. このことは, $\mathfrak{l}_{\pi/2}$が$\mathfrak{s}$のイデアルになることから, [25]の補題2.1を適用すればわかる.

一方で, $n \geq 2$ の場合は, L_0-作用は (L_0 が可換群でないので) すべての軌道がラグランジュ軌道ではない. L_0-作用に付随するラグランジュ軌道を調べるために運動量写像を使う. まず, S-作用の運動量写像は, $S \simeq M$ の同一視のもと, 陽に計算することができる:

命題 24 ([17]). 運動量写像 $\mu_S : S \to \mathfrak{s}^*$ は次の式で与えられる:

$$\mu_S(\exp_{\mathfrak{s}} X) = -P(-r) i_X \omega_{\mathfrak{s}} + (P(-r/2) - P(-r)) i_U \omega_{\mathfrak{s}} + Z^*, \tag{8}$$

ここで, $X \in \mathfrak{s}$, $X_{\mathfrak{a}} = rA$, $X_{\mathfrak{g}_\alpha} = U$, Z^* は Z の双対であり, また,

$$P(r) := \begin{cases} \frac{1}{r}(e^r - 1) & (r \neq 0) \\ 1 & (r = 0). \end{cases}$$

(8) 式の導出は, [17] を参照して頂きたい. ちなみに, S の運動量写像は一意的ではない. $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{n}$ なので, $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]^0 := \{c \in \mathfrak{s}^* ; c([\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]) = 0\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{A^*\}$ であることがわかる. 従って, $\mu'_S := \mu_S + rA^*$ は S-作用の別の運動量写像を与える.

本題に戻って, L_0-軌道に付随するラグランジュ軌道を考える. L_0 の運動量写像を $\mu_0 : M \simeq S \to \mathfrak{l}_0^*$ とする. $\dim L_0 = n$ であり, L_0 は M に単純推移的に作用しているので, 軌道がイソトロピックであれば自動的にラグランジュ軌道であることに注意すると, 補題2より, 調べるべきは, (a) $\mu_0(M) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0^*)$ と (b) 各 $c \in \mu_0(M) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0^*)$ に関する $\mu_0^{-1}(c)$ の連結性である. これらのことに関しては, 一般にシンプレクティック多様体 M がコンパクトでかつ作用するリー群 G がコンパクトの場合には, 定理4が知られているが, 今の場合, M も G も非コンパクトなので, 注意が必要である.

L_0-作用の場合, (a) に関しては, $\mu_0(M) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0^*) = \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0^*)$ であることがわかる. これは, まず, $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0^*) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{A^*\}$ であり, 図1を念頭に置いて, $\gamma(t) := \exp_{\mathfrak{s}} tZ$ という曲線を考えると, $\mu_0(\gamma(t)) = t i_Z \omega_{\mathfrak{s}}|_{\mathfrak{l}_0} + Z^*|_{\mathfrak{l}_0} = -tA^*$ となる. 従って, $\mu_0(M) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0^*) = \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0^*)$ がわかる. さらには, t が異なれば, $\mu_0(\gamma(t))$ の値は異なることもわかる.

(b) に関しては, 命題24を用いて, $\mu_0^{-1}(c)$ の連結性を示すことができる.

以上により, 各 $c \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0^*)$ に関して, $\mu_0^{-1}(c)$ はラグランジュ L_0-軌道に一致し, ラグランジュ L_0-軌道と $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0^*)$ の元の間に1:1の対応が得られる. 従って, L_0-作用はラグランジュ軌道の1変数族を持ち, それは $t \in (-\infty, \infty) \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_0^*)$ によってパラメトライズされる. □

終わりに, 定理22に現れる軌道の外在的性質についての詳細を述べておく.

命題 25. $\theta \in [0, \pi/2]$ とする. $\mathcal{O}_\theta := L_\theta \cdot o$ の原点における平均曲率ベクトルは,

$$H_o = \frac{n+1}{2} \sin\theta (\sin\theta A - \cos\theta Z) \tag{9}$$

で与えられる. 特に, $\mathcal{O}_\theta$ が極小 $\Leftrightarrow$ $\theta = 0$, 平行な平均曲率ベクトルを持つ $\Leftrightarrow$ $\theta = 0$ or $\pi/2$. また, 任意の θ に対し, $\mathcal{O}_\theta$ はハミルトン極小である.

証明. $M = \mathbb{C}H^n$ をリー群 S とリーマン多様体として同一視する. S 上に誘導された左不変リーマン計量に関する Levi-Civita 接続を ∇ と書く. (9) の導出は論文 [17] を参照. 特に, $|H|^2 = (n+1)^2 \sin^2\theta/4$ なので, $H = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ が分かる. 以下, $\theta \neq 0$ とする.

$T^{\perp} := \sin\theta A - \cos\theta Z$ とおいて, $\nabla^{\perp}_X T^{\perp} = (\nabla_X T^{\perp})^{\perp}$ for $X \in T_o\mathcal{O}_\theta$ を計算する. まず, $X_i \in T_o\mathcal{O}_\theta$, $Y_i \in T_o^{\perp}\mathcal{O}_\theta$ に対して,

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_{X_i} T^{\perp}, Y_i\rangle_o &= \langle [Y_i, X_i], T^{\perp}\rangle + \langle X_i, [Y_i, T^{\perp}]\rangle + \langle [X_i, T^{\perp}], Y_i\rangle \\
&= \langle -Z, T^{\perp}\rangle + \langle X_i, -\frac{1}{2}\sin\theta Y_i\rangle + \langle -\frac{1}{2}\sin\theta X_i, Y_i\rangle \\
&= \cos\theta.
\end{aligned}$$

よって, $\theta \neq \pi/2$ なら, $\mathcal{O}_\theta$ の平均曲率ベクトルは平行ではない. $\theta = \pi/2$ とすると, $\mathfrak{l}_{\pi/2} = \mathrm{span}\{X_1, \ldots, X_n\} \oplus \mathrm{span} Z$, $T^{\perp} = A$. よって,

$$\begin{aligned}
&2\langle \nabla_{X_i} T^{\perp}, Y_i\rangle_o = 0, \\
&2\langle \nabla_T T^{\perp}, Y_i\rangle_o = \langle [Y_i, T], T^{\perp}\rangle + \langle T, [Y_i, T^{\perp}]\rangle + \langle [T, T^{\perp}], Y_i\rangle = 0, \\
&2\langle \nabla_X T^{\perp}, T^{\perp}\rangle_o = \nabla_X |T^{\perp}|^2 = 0.
\end{aligned}$$

よって, 任意の $X \in T_o\mathcal{O}_{\pi/2}$ に対して, $(\nabla^{\perp}_X T^{\perp})_o = 0$. $L_{\pi/2}$ は $\mathcal{O}_\theta$ に単純推移的に作用するので, これは, $\nabla^{\perp} T^{\perp} = 0$, すなわち, 平行な平均曲率ベクトルを持つことを示している.

一方, ラグランジュ部分多様体 L のハミルトン極小性は, $\mathrm{div}_L JH = 0$ で特徴付けられる. ここで, div_L は L の誘導計量による発散作用素である. $L = \mathcal{O}_\theta$ の場合, JH は左不変ベクトル場であり, また L_θ が単純推移的に作用するので, $\mathrm{div}_L JH = 0$ が従う. □

参考文献

[1] A. Amarzaya and Y. Ohnita, *Hamiltonian stability of certain minimal Lagrangian submanifolds in complex projective spaces*, Tohoku Math. J. **55** (2003), 583–610.

[2] M. Audin, *The topology of torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, 93, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.

[3] L. Bates and E. Lermann, *Proper group actions and symplectic stratified spaces*, Pacific J. Math. **181**, (1997) 201–229.

[4] L. Bedulli and A. Gori, *Homogeneous Lagrangian submanifolds*, Comm. Anal. Geom. **16** (2008), no. 3, 591–615.

[5] J. Berndt and J. C. Díaz-Ramos, *Homogeneous polar foliations of complex hyperbolic spaces*, Comm. Anal. Geom. **20** (2012), no. 3, 435–454.

[6] J. Berndt and H. Tamaru, *Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type*. J. Reine Angew. Math. **683** (2013), 129–159.

[7] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci Harmonic spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1598**. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[8] A. Besse, *Einstein manifolds*, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[9] L. Biliotti, *Hamiltonian actions and homogeneous Lagrangian submanifolds*, Tohoku. Math. J. **59** (2007), 603–616.

[10] G. Deltour, *On a generalization of a theorem of McDuff*, J. Differential Geom. **93** (2013), 379–400.

[11] C. Draper and I. McIntosh, *Minimal Lagrangian submanifolds via the geodesic Gauss maps*, to appear in Comm. Anal. Geom.

[12] S. FUJII, *Homogeneous isoparametric hypersurfaces in spheres with four distinct principal curvatures and moment maps.* Tohoku Math. J. **62** (2010), 191–213

[13] A. FUTAKI, *Kähler-Einstein metrics and integral invariants*, Lecture Notes in Mathematics **1314**, Springer, Berlin, 1988.

[14] W.M. GOLDMAN, *Complex hyperbolic geometry.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.

[15] E. GOLDSTEIN, *A construction of new families of minimal Lagrangian submanifolds via torus actions.* J. Differential Geom. **58** (2001), no. 2, 233–261.

[16] A. GORI AND F. PODESTÀ, *A note on the moment map on compact Kähler manifolds*, Ann. Global. Anal. Geom. **26** (2004), 315–318.

[17] T. HASHINAGA AND T. KAJIGAYA, *A class of non-compact homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces*, to appear in Ann. Global Anal. Geom.

[18] S. HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1962.

[19] H. IRIYEH, H. MA, R. MIYAOKA AND Y. OHNITA, *Hamiltonian non-displaceability of Gauss images of isoparametric hypersurfaces*, arXiv: 1510.05057

[20] H. IRIYEH, AND H. ONO, *Almost all Lagrangian torus orbits in $\mathbb{C}P^n$ are not Hamiltonian volume minimizing*, Ann. Global Anal. Geom. **50** (2016), 85–96.

[21] H. IRIYEH, T. SAKAI AND H. TASAKI, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan. **65** (2013) no. 4, 1135–1151.

[22] T. KAJIGAYA, *Hamiltonian stabilities of minimal Lagrangian submanifolds with symmetries and Kähler quotient spaces*, in preparation.

[23] F. KIRWAN, *Convexity properties of the moment mappings, III.* Invent. Math. **77**, 547–552 (1984).

[24] S. KOBAYASHI AND K. NOMIZU, *Fundations of Differential Geometry Vol. II*, Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

[25] A. KUBO AND H. TAMARU, *A sufficient condition for congruency of orbits of Lie groups and some applications*, Geom. Dedicata **167** (2013) 233–238.

[26] H. MA AND Y. OHNITA, *On Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics and isoparametric hypersurfaces in spheres*, Math. Z. **261** (2009), no. 4, 749–785.

[27] Y. MATSUSHIMA: *Espaces homogenes de Stein des groupes de Lie complexes*, Nagoya Math. J. **16**, (1960) 205–218.

[28] D. MCDUFF, *The symplectic structure of Kähler manifolds of nonpositive curvature*, J. Differential Geom. **28** (1988), no.3, 467–475.

[29] Y. G. OH, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Z. **212** (1993), no.2, 175–192.

[30] Y. OHNITA, ラグランジュ部分多様体と等径超曲面の幾何学 (解説と展望), 数理解析研究所講究録 1775, pp1-24.

[31] T. PACINI, *Mean curvature flow, orbits, moment maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3343–3357.

[32] D. PETRECCA AND F. PODESTÀ, *Construction of homogeneous Lagrangian submanifolds in $\mathbb{C}P^n$ and Hamiltonian stability*, Tohoku Math. J. **64** (2012), no. 2, 261–268.

[33] F. PODESTÀ, *A note on moment maps and Kähler-Einstein manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **3** (2006), 1215–1219.

[34] M. SATO AND T. KIMURA, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J. **65**, (1977) 1–155.

[35] H. TAMARU, 複素双曲空間内の等質超曲面の分類, 部分多様体論・湯沢2007報告集, pp. 5–15 (2008).

Osaka City University Advanced Mathematical Institute
3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku
Osaka 558-8585 JAPAN
E-mail address: kajigaya@sci.osaka-cu.ac.jp