数理解析研究所講究録
第2017巻 2017年 103-113

Vaisman 完全可解多様体の構造定理

沼津高専・教養科　沢井 洋
Hiroshi Sawai
Liberal Arts, National Institute of Technology, Numazu College

1　序章

G を単連結な可解リー群とし, Γ を G の格子群とするとき, コンパクト多様体 $\Gamma\backslash G$ を可解多様体という. べき零多様体も同様に定義される. 可解多様体がケーラー構造をもつならば, 複素トーラスとなる [7]. 可解多様体において, ケーラー構造の拡張となる構造について報告する.

(M, g, J) をコンパクトなエルミート多様体とする. また, Ω を (g, J) の基本 2 次形式する. $d\Omega = \omega\wedge\Omega$ を満たす閉 1 次形式 ω が存在するとき, (M, g, J) を局所共形ケーラー多様体という. また, 閉 1 次形式 ω を Lee 形式という. $\omega = df$ のとき, $(M, e^{-f}g, J)$ はケーラー多様体である.

M を多様体とし, α を M 上の閉 1 次形式とする. p 次形式から $p+1$ 次形式への微分作要素 d_α を, $d_\alpha\beta := \alpha\wedge\beta + d\beta$ と定義する. α は閉 1 次形式より, $d_\alpha^2 = 0$ を満たす. また, $d_\alpha\beta = 0$ のとき β を α-閉形式, $\beta = d_\alpha\gamma$ のとき β を α-完全形式とそれぞれいう. リー環上でも, 同様に定義できる. 局所共形ケーラー構造の基本 2 次形式 Ω は, $-\omega\wedge\Omega + d\Omega = 0$ を満たすことから, $-\omega$-閉形式である.

ケーラー多様体でない局所共形ケーラー多様体の例として, Hopf 曲面 [21], 井上曲面 [20], Kodaira-Thurston 多様体 [3], Oeljeklaus-Toma 多様体 [13] が知られている (cf. [6]). また, 井上曲面, Kodaira-Thurston 多様体, Oeljeklaus-Toma 多様体は, 可解多様体の構造をもつ.

局所共形ケーラー多様体 (M, g, J) について, その Lee 形式 ω が計量 g に関して平行となるとき, Vaisman 多様体という. Hopf 曲面と Kodaira-Thurston 多様体は, Vaisman 多様体である. 井上曲面と Oeljeklaus-Toma 多様体はこれと異なり, その Lee 形式は平行でない.

単連結な可解リー群 G のリー環を $\mathfrak{g}$ とする. 任意の $X\in\mathfrak{g}$ に対して, その随伴表現の固有値がすべて実数のとき, G を完全可解リー群という. 完全可解多様体 $\Gamma\backslash G$ 上の Vaisman 構造について次が成り立つ：

主定理 1.1. [18] $(\Gamma\backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつ完全可解多様体とする. $(\Gamma\backslash G, J)$ が Vaisman 構造をもつならば, $\Gamma\backslash G$ は $S^1\times\Gamma\backslash H$, 但し, H は Heisenberg リー群, となる.

なお, 左不変な複素構造も決定できる.

主定理より, 局所共形ケーラー構造をもつべき零多様体が決定できる：

系 1.2. (cf. [15]) $(\Gamma\backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつべき零多様体とする. $(\Gamma\backslash G, J)$ が局所共形ケーラー構造をもつならば, $\Gamma\backslash G$ は $S^1 \times \Gamma\backslash H$, 但し, H は Heisenberg リー群, となる.

Vaisman 多様体であるための必要な条件 [22] や Vaisman 構造をもたない可解多様体の判定方法 [10] が知られている. これらをもちいて, Vaisman 構造をもたない局所共形ケーラー可解多様体を紹介する. また, 井上曲面はこれらの判定条件を用いることはできないが, Vaisman 構造をもたないことを示す.

2 準備

本章では, 主定理を証明するための準備を述べる.

$(M = \Gamma\backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつ完全可解多様体とする. (M, J) が局所共形ケーラー計量 g をもつと仮定する. このとき, Lee 形式 ω に対して, $\omega - \omega_0 = df$ を満たす左不変な閉 1 次形式 ω_0 と M 上の C^∞ 級関数 f が存在する [9]. これらを用いて, 左不変な 2 次形式 Ω_0 を, 左不変なベクトル場 X, Y に対して,

$$\Omega_0(X,Y) := \int_{x\in M} (e^{-f}\Omega)_x(X_x, Y_x)d\mu,$$

但し, $d\mu$ は G 上の両側不変な体積要素から誘導される M 上の体積要素, と定義する.

命題 2.1. [2] 左不変なベクトル場 X, Y に対して, 次が成り立つ：

1. $\Omega_0(JX, JY) = \Omega_0(X, Y)$.
2. $\Omega_0(JX, X) \geq 0$, 但し, 等号成立は $X = 0$ のときのみ.
3. $d\Omega_0 = \omega_0 \wedge \Omega_0$.

命題 2. 1 より, (M, J) 上に, Ω_0 を基本 2 次形式とする左不変なエルミート構造 $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が決まる. 即ち, G に対応する完全可解リー環 $\mathfrak{g}$ 上に局所共形ケーラー構造 $(\langle\ ,\ \rangle, J)$ が誘導される.

(M, g) をコンパクトリーマン多様体とし, α を M 上の平行な 1 次形式とする. α は閉 1 次形式であるが, 次が知られている：

定理 2.2. [11] コンパクトなリーマン多様体 (M, g) において, α を計量 g に関して平行な 1 次形式とする. このとき, 任意の α-閉形式は, α-完全形式である.

したがって, Vaisman 多様体の Lee 形式は平行であることから, この基本 2 次形式 Ω は $-\omega$-完全形式となる. さらに, Vaisman 可解多様体の場合, 上記の左不変な基本 2 次形式 Ω_0 も $-\omega_0$-完全形式となる [16].

3 $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ の構造

$(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle, J)$ を前章で得られた局所共形ケーラー完全可解リー環とする. 本章では, この基本 2 次形式 Ω_0 から得られる $\mathfrak{g}$ の構造について考える.

$\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ によって誘導される $\mathfrak{g}^*$ から $\mathfrak{g}$ への線形写像を γ_0 とし, $A := \gamma_0(\omega_0)$ とおく. また, $\langle A, A\rangle = 1$ と仮定してよい.

局所共形ケーラー構造をもつ可解リー環 $\mathfrak{g}$ について, 次が成り立つ：

定理 3.1. [17] 基本 2 次形式 Ω_0 が $-\omega_0$-完全形式ならば, Lee 形式 ω_0 は平行である.

定理 3.2. [17] $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から誘導される $\wedge\mathfrak{g}^*$ 上の内積を $(\ ,\ )$ とする. このとき, Schwarz の不等式

$$(\Omega_0, d_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J))^2 \leq (\Omega_0, \Omega_0)(d_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J), d_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J))$$

は, 次と同値である：

$$0 \leq \langle [A, JA], JA\rangle.$$

Vaisman 構造の場合, 定理 2.2 より, $\Omega_0 = d_{-\omega_0}\eta_0$ となる. よって, 定理 3.1 から, ω_0 は平行である. これより,

$$\langle [A, JA], JA\rangle = \langle A, \nabla_{JA} JA\rangle = \omega_0(\nabla_{JA} JA) = -\nabla_{JA}\omega_0(JA) = 0$$

となる. 即ち, 定理 3.2 より,

$$\Omega_0 = kd_{-\omega_0}(\omega_0 \circ J) = k(-\omega_0 \wedge \omega_0 \circ J + d(\omega_0 \circ J))$$

を満たす $k \in \mathbb{R}$ が存在する. 特に, $\langle A, A\rangle = 1$ と $\langle [A, JA], JA\rangle = 0$ より, $k = -1$ となる. $\Omega_0 = d_{-\omega_0}(-\omega_0 \circ J)$ から, $JA \in Z(\mathfrak{g})$ となる [16].

4 主定理の証明

本章では, 主定理の証明を述べる.

$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{A, JA\} \oplus \mathfrak{b}$ と直交分解し, $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{JA\} \oplus \mathfrak{b}$ とおく. また, π を $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ への射影とする. $JA \in Z(\mathfrak{g})$ より, π は準同型となることに注意する.

Φ を, $\Phi(JA) = 0$, $\Phi(X) = JX$ $(X \in \mathfrak{b})$ によって定義される $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}$ への線形写像とする. これによって, $\mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ から $\mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ への線形写像 $\widetilde{\Phi}$ を

$$\widetilde{\Phi}(\pi(X)) = \pi(\Phi(X))$$

と定義する.

補題 4.1. $\widetilde{\Phi}$ は, $\mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ 上の複素構造となる.

Proof. $X \in \mathfrak{h}$ に対して, $X = Z + X'$, 但し, $Z \in \mathrm{span}\{JA\}, X' \in \mathfrak{b}$, と分解する.
このとき,

$$\widetilde{\Phi}^2(\pi(X)) = \pi(\Phi^2(X)) = \pi(\Phi^2(X')) = \pi(J^2X') = -\pi(X') = -\pi(X)$$

となる. よって, $\widetilde{\Phi}^2 = -id$ を満たす.
また, $\mathbf{N}_{\widetilde{\Phi}}$ を $\widetilde{\Phi}$ の Nijenhuis テンソル場とすると,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{N}_{\widetilde{\Phi}}(\pi(X), \pi(Y))\\
&= [\pi(X), \pi(Y)] + \widetilde{\Phi}[\widetilde{\Phi}(\pi(X)), \pi(Y)] + \widetilde{\Phi}[\pi(X), \widetilde{\Phi}(\pi(Y))] - [\widetilde{\Phi}(\pi(X)), \widetilde{\Phi}(\pi(Y))]\\
&= \pi[X, Y] + \widetilde{\Phi}[\pi(\Phi(X)), \pi(Y)] + \widetilde{\Phi}[\pi(X), \pi(\Phi(Y))] - [\pi(\Phi(X)), \pi(\Phi(Y))]\\
&= \pi[X, Y] + \widetilde{\Phi} \circ \pi[\Phi(X), Y] + \widetilde{\Phi} \circ \pi[X, \Phi(Y)] - \pi[\Phi(X), \Phi(Y)]\\
&= \pi[X, Y] + \pi \circ \Phi[\Phi(X), Y] + \pi \circ \Phi[X, \Phi(Y)] - \pi[\Phi(X), \Phi(Y)]\\
&= \pi\{[X, Y] + \Phi[\Phi(X), Y] + \Phi[X, \Phi(Y)] - [\Phi(X), \Phi(Y)]\}\\
&= \pi\{[X', Y'] + \Phi[JX', Y'] + \Phi[X', JY'] - [JX', JY']\}
\end{aligned}$$

となる. ここで, J が可積分であることから,

$$\begin{gathered}
[X', Y'] + J[JX', Y'] + J[X', JY'] - [JX', JY'] = 0\\
[X', Y'] - [JX', JY'] = -J[JX', Y'] - J[X', JY']
\end{gathered}$$

を満たす. これより,

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\widetilde{\Phi}}(\pi(X), \pi(Y)) &= \pi\{[X', Y'] + \Phi[JX', Y'] + \Phi[X', JY'] - [JX', JY']\}\\
&= \pi\{-J[JX', Y'] - J[X', JY'] + \Phi[JX', Y'] + \Phi[X', JY']\}\\
&= \pi\{-J([JX', Y'] + [X', JY']) + \Phi([JX', Y'] + [X', JY'])\}
\end{aligned}$$

となる. さらに, $[JX', Y'] + [X', JY'] = Z + B$, 但し, $Z \in \mathrm{span}\{JA\}, B \in \mathfrak{b}$ とおく. $J([JX', Y'] + [X', JY']) = -[X', Y'] + [JX', JY'] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ より, $JZ = 0$, 即ち, $Z = 0$ となる. よって, Φ の定義から, $\mathbf{N}_{\widetilde{\Phi}}(\pi(X), \pi(Y)) = 0$ を得る. □

$\mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ 上の 2 次形式を,

$$\widetilde{\Omega}_0(\pi(X), \pi(Y)) = d(-\omega_0 \circ J)(X, Y)$$

と定義する. $JA \in Z(\mathfrak{g})$ より, これは well-defined である.

命題 4.2. $\pi(X_i) \in \mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ に対して, 次が成り立つ:

1. $\widetilde{\Omega}_0(\widetilde{\Phi} \circ \pi(X_1), \widetilde{\Phi} \circ \pi(X_2)) = \widetilde{\Omega}_0(\pi(X_1), \pi(X_2))$.

2. $\widetilde{\Omega}_0(\widetilde{\Phi} \circ \pi(X_1), \pi(X_1)) \geq 0$, 但し, 等号成立は $\pi(X_1) = 0$ のときのみ.

3. $d\widetilde{\Omega}_0 = 0$.

Proof. $X_i \in \mathfrak{h}$ に対して, $X_i = Z_i + X_i'$, 但し, $Z_i \in \mathrm{span}\{JA\}, X_i' \in \mathfrak{b}$, と分解する.
定義より,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}_0(\widetilde{\Phi}\circ\pi(X_1), \widetilde{\Phi}\circ\pi(X_2)) &= \widetilde{\Omega}_0(\pi(\Phi(X_1)), \pi(\Phi(X_2))) \\ &= \widetilde{\Omega}_0(\pi(JX_1'), \pi(JX_2')) \\ &= d(-\omega_0\circ J)(JX_1', JX_2')\end{aligned}$$

となる. ω_0 は閉形式より, $d(-\omega_0\circ J)$ は J-不変である. よって, $X_i' \in \mathfrak{b}$ より,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}_0(\widetilde{\Phi}\circ\pi(X_1), \widetilde{\Phi}\circ\pi(X_2)) &= d(-\omega_0\circ J)(JX_1', JX_2') \\ &= d(-\omega_0\circ J)(X_1', X_2') = \widetilde{\Omega}_0(\pi(X_1), \pi(X_2))\end{aligned}$$

が成り立つ.
同様に, $X_1' \in \mathfrak{b}$ であるから,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}_0(\widetilde{\Phi}\circ\pi(X_1), \pi(X_1)) &= \widetilde{\Omega}_0(\pi(\Phi(X_1)), \pi(X_1)) \\ &= d(-\omega_0\circ J)(JX_1', X_1') \\ &= \Omega_0(JX_1', X_1') = \langle X_1', X_1'\rangle \geq 0\end{aligned}$$

となる. 等号成立は, $X_1{}' = 0$, 即ち, $\pi(X_1) = 0$ のときのみとなる.
直接計算より,

$$\begin{aligned}&(d\widetilde{\Omega}_0)(\pi(X_1), \pi(X_2), \pi(X_3)) \\ &= -\widetilde{\Omega}_0([\pi(X_1), \pi(X_2)], \pi(X_3)) + \widetilde{\Omega}_0([\pi(X_1), \pi(X_3)], \pi(X_2)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\widetilde{\Omega}_0([\pi(X_2), \pi(X_3)], \pi(X_1)) \\ &= -\widetilde{\Omega}_0(\pi[X_1, X_2], \pi(X_3)) + \widetilde{\Omega}_0(\pi[X_1, X_3], \pi(X_2)) - \widetilde{\Omega}_0(\pi[X_2, X_3], \pi(X_1)) \\ &= d(\omega_0\circ J)([X_1', X_2'], X_3') - d(\omega_0\circ J)([X_1', X_3'], X_2') + d(\omega_0\circ J)([X_2', X_3'], X_1') \\ &= 0\end{aligned}$$

を得る. □

補題 4.1, 命題 4.2 より, $(\widetilde{\Omega}_0, \widetilde{\Phi})$ は $\mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ 上にエルミート構造を誘導し, さらに, その基本 2 次形式 $\widetilde{\Omega}_0$ は閉形式である. 即ち, $(\widetilde{\Omega}_0, \widetilde{\Phi})$ はケーラー構造となる.
さらに, 次が成り立つ：

補題 4.3. $\mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ はユニモジュラーで完全可解リー環である.

Proof. $\pi(X), \pi(Y) \in \mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ に対して, $\Phi(Y) \in \mathfrak{b}$ より,

$$\begin{aligned}\langle[\pi(X), \pi(Y)], \pi(Y)\rangle &= \langle\pi[X, Y], \pi(Y)\rangle \\ &= \widetilde{\Omega}_0(\widetilde{\Phi}\circ\pi(Y), \pi[X, Y]) = \widetilde{\Omega}_0(\pi(\Phi(Y)), \pi[X, Y]) \\ &= d(-\omega_0\circ J)(\Phi(Y), [X, Y]) \\ &= \Omega_0(\Phi(Y), [X, Y])\end{aligned}$$

となる. $X, Y \in \mathfrak{h}$ を $X = Z_X + X', Y = Z_Y + Y'$, 但し, $Z_X, Z_Y \in$ span $\{JA\}, X', Y' \in \mathfrak{b}$ と分解すると,

$$\langle[\pi(X), \pi(Y)], \pi(Y)\rangle = \Omega_0(\Phi(Y), [X, Y]) = \Omega_0(JY', [X', Y']) = \langle[X', Y'], Y'\rangle$$

を得る. よって, ω_0 が閉形式で, $JA \in Z(\mathfrak{g})$ より,

$$\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(\pi(X)) = \ \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(X') - \langle[X', A], A\rangle - \langle[X', JA], JA\rangle = \ \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(X')$$

となる. 可解リー群 G は格子群 Γ をもつことから, ユニモジュラーである. よって, $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(\pi(X)) = \ \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(X') = 0$ が成り立つ.

複素数 $\alpha \neq 0$ を随伴表現の固有値にもつ $\pi(X) \in \mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ が, 存在すると仮定する. その固有ベクトルを $\pi(Y)$ とおくと,

$$\alpha\pi(Y) = [\pi(X), \pi(Y)] = \pi[X, Y]$$

から, $\alpha Y = [X, Y] + Z$ を満たす $Z \in \mathrm{span}\{JA\} \subset Z(\mathfrak{g})$ が存在する. これより,

$$[X, Y - \frac{1}{\alpha}Z] = [X, Y] = \alpha Y - Z = \alpha(Y - \frac{1}{\alpha}Z)$$

となり, $\mathrm{ad}(X)$ は複素数 α を固有値にもつ. これは, $\mathfrak{g}$ の完全性に矛盾する. □

ケーラー構造をもつリー環について, 次が知られている：

定理 4.4. [4] $\mathfrak{g}$ をユニモジュラーな完全可解リー環とする. $\mathfrak{g}$ がケーラー構造をもつならば, $\mathfrak{g}$ は可換となる.

主定理の証明

補題 4.3 より, $\mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ は定理 4.4 の仮定を満たす. ゆえに, $\mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ は可換となる. 実際に, $\mathfrak{h}/\mathrm{span}\{JA\}$ 上のエルミート内積に関して, 正規直交基底 $\{\pi(X_i), \widetilde{\Phi} \circ \pi(X_i)\}_{i=1}^{n-1} = \{\pi(X_i'), \pi(JX_i')\}_{i=1}^{n-1}$, 但し, $X_i', JX_i' \in \mathfrak{b}$, をとると,

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \langle\pi(X_i'), \pi(X_j')\rangle = \widetilde{\Omega}_0(\widetilde{\Phi} \circ \pi(X_i'), \pi(X_j')) = \widetilde{\Omega}_0(\pi(JX_i'), \pi(X_j')) \\
&= d(-\omega_0 \circ J)(JX_i', X_j') = \omega_0 \circ J([JX_i', X_j']) = -\langle JA, [JX_i', X_j']\rangle, \\
0 &= \langle\pi(X_i'), \widetilde{\Phi} \circ \pi(X_j')\rangle = \widetilde{\Omega}_0(\pi(X_i'), \pi(X_j')) \\
&= d(-\omega_0 \circ J)(X_i', X_j') = \omega_0 \circ J([X_i', X_j']) = -\langle JA, [X_i', X_j']\rangle
\end{aligned}$$

を満たす. また, $d(-\omega_0 \circ J)$ が J-不変より, $0 = \langle JA, [JX_i', JX_j']\rangle$ も満たす. 以上より,

$$\mathfrak{h} = \mathrm{span}\left\{JA, X_i', JX_i' \ : \ [X_i', JX_j'] = \delta_{ij} JA\right\}$$

となり, これは $(2n-1)$ 次元 Heisenberg リー環である. よって, $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{A\} \ltimes \mathfrak{h}$ となる.

Lee 形式 ω_0 が平行より, 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_X \omega_0(Y) &= -\omega_0(\nabla_X Y) = -\langle A, \nabla_X Y\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle [A,X], Y\rangle + \langle X, [A,Y]\rangle\} \\ \langle [A,X], Y\rangle &= -\langle X, [A,Y]\rangle \end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに, $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}$ への線形写像 $\mathrm{ad}(A)$ の表現行列は歪対称である. 一方, $\mathfrak{g}$ は完全可解リー環より, 線形写像 $\mathrm{ad}(A)$ の固有値は実数のみである. よって, $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}$ への線形写像 $\mathrm{ad}(A)$ は自明となる.

主定理より, 次が得られる：

系 4.5. (cf. [15]) $(\Gamma\backslash G, J)$ を左不変な複素構造をもつべき零多様体とする. $(\Gamma\backslash G, J)$ が局所共形ケーラー構造をもつならば, $\Gamma\backslash G$ は $S^1 \times \Gamma\backslash H$, 但し, H は Heisenberg リー群, となる.

Proof. べき零多様体 $\Gamma\backslash G$ の局所共形ケーラー構造 (Ω, J) は, そのリー環 $\mathfrak{g}$ 上に局所共形ケーラー構造 (Ω_0, J) を誘導する (cf. [12]). 基本 2 次形式 Ω_0 は $-\omega_0$-閉形式であるが, これは $-\omega_0$-完全形式である [5]. したがって, (Ω_0, J) は Vaisman 構造となる [17]. よって, べき零多様体は完全可解多様体であるから, 主定理より, $\Gamma\backslash G$ は $S^1 \times \Gamma\backslash H$, 但し, H は Heisenberg リー群, となる. □

5 局所共形ケーラー可解多様体の例

本章では, Vaisman 構造をもたない局所共形ケーラー可解多様体の例を紹介する. Vaisman 多様体について, 次が知られている：

定理 5.1. [22] Vaisman 多様体の第 1 ベッチ数は奇数である.

定理 5.2. [10] 可解リー群 G を $G = \mathbb{R}^n \ltimes \mathbb{R}^m$ とする. 以下を仮定する：

1. 可解リー群 G が格子群 Γ をもつ.

2. 可解多様体 $\Gamma\backslash G$ は左不変な複素構造 J をもつ.

3. $H^1_{\mathrm{DR}}(\Gamma\backslash G) \cong H^1(\mathfrak{g})$, 但し, $\mathfrak{g}$ は G のリー環.

このとき, $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] > \frac{1}{2}\dim \mathfrak{g}$ ならば, $(\Gamma\backslash G, J)$ は Vaisman 構造をもたない.

上記を用いて, Vaisman 構造をもたない局所共形ケーラー可解多様体を紹介する.

例 5.3. (井上曲面 S^0 [20]) $\alpha, \beta, \bar{\beta} (\alpha > 0, \beta \neq \bar{\beta})$ を $B \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ の固有値とする. これを用いて, $\mathbb{H} \times \mathbb{C} = \{(x + \sqrt{-1}\alpha^t, z) : x, t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\}$ 上の群構造を

$$(x + \sqrt{-1}\alpha^t, z) \cdot (x' + \sqrt{-1}\alpha^{t'}, z') = (\alpha^t x' + x + \sqrt{-1}\alpha^{t+t'}, \beta^t z' + z)$$

と定義する. $(\mathbb{H}\times\mathbb{C},\cdot)$ を行列表示すると,

$$G_1=\left\{\begin{pmatrix}\alpha^t & 0 & 0 & x\\ 0 & \beta^t & 0 & z\\ 0 & 0 & \bar{\beta}^t & \bar{z}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : t,x\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{C}\right\}$$

となる. 可解リー群 G_1 は格子群 Γ をもつ [16].

可解リー群 G_1 のリー環を $\mathfrak{g}_1$ とすると,

$$\mathfrak{g}_1=\ \mathrm{span}\ \{A,X,Z_1,Z_2\}$$
$$[A,X]=2X,[A,Z_1]=-Z_1+cZ_2,[A,Z_2]=-Z_2-cZ_1$$

となる. 可解多様体 $\Gamma\backslash G_1$ 上の左不変な複素構造は, $JA=X, JZ_1=Z_2$ によって定義できる. また, 左不変な 1 次形式 の基底として, 次の $\{\omega,x,z_1,z_2\}$ をとる:

$$d\omega=0, dx=-2\omega\wedge x,$$
$$dz_1=\omega\wedge z_1+c\omega\wedge z_2, dz_2=\omega\wedge z_2-c\omega\wedge z_1.$$

基本 2 次形式 Ω を

$$\Omega=-\omega\wedge x-z_1\wedge z_2$$

とすると, (Ω,J) は, Lee 形式を ω とする局所共形ケーラー構造となる. また, $\nabla\omega\neq 0$ であることにも注意する.

一方, $\dim H^1_{DR}(\Gamma\backslash G_1)=1$ であるが, 可解多様体 $\Gamma\backslash G_1$ は 定理 5.2 の仮定を満たす. したがって, $\dim[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]=3$ より, $(\Gamma\backslash G,J)$ は Vaisman 構造をもたない [10].

例 5.4. ((2,1)-型 Oeljeklaus-Toma 多様体 [13]) $\alpha_1,\alpha_2,\beta,\bar{\beta}(\beta\neq\bar{\beta})$ を $f_1(x)=x^4-2x^3-2x^2+x+1$ の零点とし, $\alpha'_1,\alpha'_2,\beta',\bar{\beta}'$ を $f_2(x)=x^4-4x^3+4x^2-3x+1$ の零点とする. このとき, $\begin{vmatrix}\log\alpha_1 & \log\alpha_2\\ \log\alpha'_1 & \log\alpha'_2\end{vmatrix}\neq 0$ から,

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \{(t_1,t_2):t_i\in\mathbb{R}\}\\ &= \left\{(t_1,t_2)\begin{pmatrix}\log\alpha_1 & \log\alpha_2\\ \log\alpha'_1 & \log\alpha'_2\end{pmatrix}:t_i\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \{(t_1\log\alpha_1+t_2\log\alpha'_1, t_1\log\alpha_2+t_2\log\alpha'_2):t_i\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^2\times\mathbb{C} &= \{(x_1+\sqrt{-1}e^{t_1},x_2+\sqrt{-1}e^{t_2},z):x_i,t_i\in\mathbb{R},z\in\mathbb{C}\}\\ &= \{(x_1+\sqrt{-1}e^{t_1\log\alpha_1+t_2\log\alpha'_1},x_2+\sqrt{-1}e^{t_1\log\alpha_2+t_2\log\alpha'_2},z):x_i,t_i\in\mathbb{R},z\in\mathbb{C}\}\\ &= \{(x_1+\sqrt{-1}\alpha_1^{t_1}\alpha_1'^{t_2},x_2+\sqrt{-1}\alpha_2^{t_1}\alpha_2'^{t_2},z):x_i,t_i\in\mathbb{R},z\in\mathbb{C}\}\end{aligned}$$

が成り立つ. これを用いて, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{C}$ 上の群構造を

$$(x_1+\sqrt{-1}\alpha_1^{t_1}\alpha_1'^{t_2},x_2+\sqrt{-1}\alpha_2^{t_1}\alpha_2'^{t_2},z)\cdot(x'_1+\sqrt{-1}\alpha_1^{t'_1}\alpha_1'^{t'_2},x'_2+\sqrt{-1}\alpha_2^{t'_1}\alpha_2'^{t'_2},z')$$
$$=(\alpha_1^{t_1}\alpha_1'^{t_2}x'_1+x_1+\sqrt{-1}\alpha_1^{t_1+t'_1}\alpha_1'^{t_2+t'_2},\alpha_2^{t_1}\alpha_2'^{t_2}x'_2+x_2+\sqrt{-1}\alpha_2^{t_1+t'_1}\alpha_2'^{t_2+t'_2},\beta^{t_1}\beta'^{t_2}z'+z)$$

と定義する. $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}, \cdot)$ を行列表示すると,

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1^{t_1}\alpha_1'^{t_2} & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & \alpha_2^{t_1}\alpha_2'^{t_2} & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & \beta^{t_1}\beta'^{t_2} & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\beta}^{t_1}\bar{\beta}'^{t_2} & \bar{z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t_i, x_i \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \right\}$$

となる. $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta, \bar{\beta}\}$ と $\{\alpha_1', \alpha_2', \beta', \bar{\beta}'\}$ は, それぞれ

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値となっており, $B_1B_2 = B_2B_1$ を満たす. これより, G_2 上に格子群 Γ を構成することができる [19].

可解リー群 G_2 のリー環を $\mathfrak{g}_2$ とすると,

$$\begin{gathered} \mathfrak{g}_2 = \mathrm{span}\{A_1, A_2, X_1, X_2, Z_1, Z_2\} \\ [A_1, X_1] = 2X_1, \quad [A_1, Z_1] = -Z_1 + c_1Z_2, \quad [A_1, Z_2] = -Z_2 - c_1Z_1 \\ [A_2, X_2] = 2X_2, \quad [A_2, Z_1] = -Z_1 + c_2Z_2, \quad [A_2, Z_2] = -Z_2 - c_2Z_1 \end{gathered}$$

となる. 可解多様体 $\Gamma\backslash G_2$ 上の左不変な複素構造は, $JA_i = X_i (i = 1, 2), JZ_1 = Z_2$ によって定義できる. また, 左不変な 1 次形式 の基底として, 次の $\{\omega_1, \omega_2, x_1, x_2, z_1, z_2\}$ をとる：

$$\begin{aligned} & d\omega_1 = 0, d\omega_2 = 0, \\ & dx_1 = -2\omega_1 \wedge x_1, \ dx_2 = -2\omega_2 \wedge x_2, \\ & dz_1 = (\omega_1 + \omega_2) \wedge z_1 + (c_1\omega_1 + c_2\omega_2) \wedge z_2, \\ & dz_2 = (\omega_1 + \omega_2) \wedge z_2 - (c_1\omega_1 + c_2\omega_2) \wedge z_1. \end{aligned}$$

基本 2 次形式 Ω を

$$\Omega = -2(\omega_1 \wedge x_1 + \omega_2 \wedge x_2) - (\omega_1 \wedge x_2 + \omega_2 \wedge x_1) - z_1 \wedge z_2$$

とすると, (Ω, J) は, Lee 形式を $\omega_1 + \omega_2$ とする局所共形ケーラー構造となる. また, $\nabla(\omega_1 + \omega_2) \neq 0$ であることにも注意する.

可解多様体 $\Gamma\backslash G_2$ は 定理 5.2 の仮定を満たす. したがって, $\dim[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = 4$ より, $(\Gamma\backslash G, J)$ は Vaisman 構造をもたない [10]. また, $\dim H^1_{DR}(\Gamma\backslash G_1) = 2$ であることからも, $(\Gamma\backslash G, J)$ は Vaisman 構造をもたないことがわかる [22].

例 5.5. (井上曲面 S^+ ([20], [1])) 完全可解リー群 G_3 を

$$G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -e^t y & e^{-t}x & z \\ 0 & e^t & 0 & x \\ 0 & 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．完全可解リー群 G_3 は格子群 Γ をもつ [14].
完全可解リー群 G_3 のリー環を $\mathfrak{g}_3$ とすると，

$$\mathfrak{g}_3 = \mathrm{span}\{A, X, Y, Z\}$$
$$[A, X] = X, [A, Y] = -Y, [X, Y] = Z$$

となる．可解多様体 $\Gamma\backslash G_3$ 上の左不変な複素構造は，$JA = X, JZ = Y$ によって定義できる．また，左不変な 1 次形式 の基底として，次の $\{\omega, x, y, z\}$ をとる：

$$\begin{aligned} d\omega &= 0, \\ dx &= -\omega \wedge x,\ dy = \omega \wedge y, \\ dz &= -x \wedge y. \end{aligned}$$

基本 2 次形式 Ω を

$$\Omega = -\omega \wedge x - z \wedge y$$

とすると，(Ω, J) は，Lee 形式を ω とする局所共形ケーラー構造となる．また，$\nabla\omega \neq 0$ であることにも注意する．

命題 5.6. (cf. [2]) 可解多様体 $\Gamma\backslash G_3$ は Vaisman 構造をもたない．

Proof. 4 次元可解多様体の複素構造は，すべて左不変である [8]．また，可解多様体 $\Gamma\backslash G_3$ は完全であるから，$H^1_{DR}(\Gamma\backslash G_3) \cong H^1(\mathfrak{g})$ が成り立つ [9]．したがって，可解多様体 $\Gamma\backslash G_3$ 上の局所共形ケーラー構造は，左不変なものを誘導する [2]．
完全可解多様体 $\Gamma\backslash G_3$ が Vaisman 構造をもつと仮定する．そのリー環 $\mathfrak{g}_3$ は，$\mathrm{span}\{A\} \ltimes \mathfrak{h}(1)$，但し，$\mathfrak{h}(1)$ は 3 次元 Heisenberg リー環，であるが，随伴表現 $\mathrm{ad}(A)$ は自明でない．これは，主定理に矛盾する．したがって，完全可解多様体 $\Gamma\backslash G_3$ は Vaisman 構造をもたない．□

なお，$\dim H^1_{DR}(\Gamma\backslash G_3) = 1$ であることに注意する．

参考文献

[1] L. C. de Andrés, L. A. Cordero, M. Fernández and J. J. Mencía: Examples of four dimensional locally conformal Kähler manifolds, Geom. Dedicata **29** (1989), 227-233.

[2] F. A. Belgun: On the metric structure of non-Kähler complex surfaces, Math. Ann. **317** (2000), 1-40.

[3] L. A. Cordero, M. Fernández and M. de Léon: Compact locally conformal Kähler nilmanifolds, Geom. Dedicata **21** (1986), 187-192.

[4] J. M. Dardie and A. Medina: Kähler Lie algebras and double extension, J. Algebra **185** (1996), no. 3, 774-795.

[5] J. Dixmier: Cohomologie des algebres de Lie nilpotentes, Acta Sci. Math. Szeged **16** (1955), 246-250.

[6] S. Dragomir and L. Ornea: *Locally conformal Kähler geometry*, Birkhäuser (1998).

[7] K. Hasegawa: A note on compact solvmanifolds with Kähler structures, Osaka J. Math **43** (2006), 131-135.

[8] ________: Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds, J. Symplectic Geom. **3** (2005), 749-767.

[9] A. Hattori : Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I . **8** (1960), 289-331.

[10] H. Kasuya : Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 1, 15-26.

[11] M. de León, B, López, J. C. Marrero and E, Padrón: On the computation of the Lichnerowicz-Jacobi cohomology, J. Geom. Phys. **44** (2003), no. 4, 507-522.

[12] K. Nomizu: On the cohomology of homogeneous of nilpotent Lie groups, Ann. Math. **59** (1954), 531-538.

[13] K. Oeljeklaus and M. Toma : Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), no. 1, 161-171.

[14] H. Sawai: A construction of lattices on certain solvable Lie groups, Topology Appl. **154** (2007), no. 18, 3125-3134.

[15] ________: Locally conformal Kähler structures on compact nilmanifolds with left-invariant complex structures, Geom. Dedicata **125** (2007), 93-101.

[16] ________: Locally conformal Kähler structures on compact solvmanifolds Osaka J. Math. **49** (2012), no. 4, 1087-1102.

[17] ________: Vaisman structure on compact solvmanifolds, Geom. Dedicata **178** (2015), 389-404.

[18] ________: Structure Theorem for Vaisman completely solvmanifolds, preprint.

[19] ________: Example of the six-dimensional LCK solvmanifold, preprint.

[20] F. Tricerri: Some examples of locally conformal Kähler manifolds, Rend. Sem. Math. Univ. Politec. Torino **40** (1982), no.1, 81-92.

[21] I. Vaisman: Locally conformal Kähler manifolds with parallel Lee form, Rend. Mat. **12** (1979), 263-284.

[22] ________: Generalized Hopf manifolds, Geom. Dedicata **13** (1982), no. 3, 231-255.