数理解析研究所講究録
第2029巻 2017年 43-64

チュートリアル招待論文

年金保険の長寿リスク管理*

浦谷 規
法政大学理工学部
経営システム工学科

1 はじめに

キャッチフレーズの巧みな米国では，長寿リスクに対する驚くほど的を得た次のデータ標語がある．第1は,「６３／３６ルール」である：６５歳の夫婦が揃って９０歳まで生きる確率は６３％であり，さらに一方が９５歳までに生きる確率は３６％である．第2は『２１９ルール」である：夫婦の２０年間の食費は２１万９０００ドルである．単純に１食5ドルを２人で１日3回を３６５日，２０年間の合計は２１９，０００ドルと計算される．１ドルを１００円とするなら，２１９０万円になる．

米国の平均寿命は男女計では78.5歳に対して，2010年における日本の夫婦の平均寿命は83歳であるから，長生きのために生活資金が不足するという長寿リスクは米国より日本では更に深刻な問題である．

まず、この長寿リスクに対して年金の経済的意義を考えてみよう．５５歳になったＡさんが働けなくる７０歳以降のために備えるには次の方法がある．

第１は銀行に手元資金の S_0 預け、利率 r =1.5 %の定期預金ができるものとしよう．１５年後の元利合計 S_{15} は

$$S_{15} = S_0(1+r)^{15} = 1.2502S_0$$

となり、およそ1．２５倍の資金が老後の蓄えとなる．インフレーションがなければ，１食５００円とすると夫婦１日３０００円で１カ月では9万円であり，７０歳から９０歳になるまでの２０年間では２１９０万円が必要である．夫婦で２０年間に最低必要な５５歳での定期預金額は $\frac{2190}{(1+r)^{15}}$=1760万円である．

次にもう少し現実的考えて７０歳以降に食費の１２ヶ月分の総額１０９．５万円づつを毎年、定期預金から２０年間引き出すとしよう．預金金利がそれまでと変わらずに、r=1.5%であるならば，７０歳での必要な資金は

$$\sum_{i=1}^{25} \frac{109.5}{(1+r)^{i-1}} = 109.5\frac{1-(\frac{1}{1+r})^{20}}{1-\frac{1}{1+r}} = 1882.0260$$

１８８2万２６０円になり５５歳時点での必要資金は $1882.0260/(1.015)^{15} = 1505.341$ 万円と、単純に計算した２１９０万円からおよそ７００万円も減少する．，以上の預金によって老後に備える

*This research was supported in part by the Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 16K01264) of the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) in 2016–2018.

には，インフレ率を含まない実質金利が1.5％であり，７０歳から２０年間にわたって１０９．５万円を受け取るとするなら，そのための預金額は５５歳において $S_0 = 1506$ 万円である．もしも金利がこれより高いならば，この預金額は減少する．しかし，現在の金利水準からは以上の貯蓄による方法には期待できなくなっていることは明らかである．

第２は，トンチン (Tontine) 契約とよばれる方式である．預金を契約後にその夫婦が死亡する確率を 0.8 としよう．さらに，単純化のために財産相続人はいないものとすると，７０歳のときの受け取る現在価値の期待値は $0.8S_{15}$ である．

同じ年齢の３人の男性 A,B,C が次のような生存契約をする場合を考えよう．それぞれが，同一額 S_0 をはじめに支払い，１５年後に生存した人が総額 $3S_{15}$ を等分割して受け取る．

生存契約のメンバー A,B,C のそれぞれの生存とその確率は表 1 の通りである．

表 1: 生存契約

状態	A	B	C	生存者数	それぞれの受取額	その確率
1	1	1	1	3	S_{15}	$0.8^3 = 0.512$
2	1	1	0	2	$1.5S_{15}$	$0.8^2 \times 0.2 = 0.128$
3	1	0	1	2	$1.5S_{15}$	$0.8^2 \times 0.2 = 0.128$
4	1	0	0	1	$3S_{15}$	$0.8 \times 0.2^2 = 0.032$
5	0	1	1	2	$1.5S_{15}$	$0.8^2 \times 0.2 = 0.128$
6	0	1	0	1	$3S_{15}$	$0.8 \times 0.2^2 = 0.032$
7	0	0	1	1	$3S_{15}$	$0.8 \times 0.2^2 = 0.032$
8	0	0	0	0	NA	$0.2^3 = 0.008$

Ａの１５年後の受取額の期待値は 状態 1 から 4 の和，すなわち $S_{15} \times 0.512 + 1.5S_{15} \times 0.128 \times 2 + 3S_{15} \times 0.032 = .992S_{15}$ であり，ＢもＣも同じ期待値である．状態 8 は誰も受け取ることができないが，この生存契約を運営するものの取り分ともいえる．その額は $3S_{15} \times 0.2^3 = 0.024S_{15}$ である．

この契約の参加者を n とし，生存する確率を p とすると，メンバーの 1 人の受取額の期待値は

$$n \times S_{15} \times (1 - (1 - p)^n)/n = S_{15}(1 - (1 - p)^n)$$

であり，契約参加者数の増加に伴い期待値は増加する．一方，その運営者は期待値は

$$n \times S_{15} \times (1 - p)^n$$

と減少する規模の拡大はその取り分を増加しない．

年金保険には死亡者から生存者への富の移転というトンチン性はある．しかし，純粋なトンチン方式は基本的には違法であるとされる．Ａにとっては状態 4 では受取額が初期資金の 3 倍になり，他の参加者の死亡を自分の受取と関係付けて行動しうる問題点からである．

第３は，保険数理（アクチュアリー数理）[†]の考え方によって大規模な生存契約を考えてみよう．５５歳の加入者数を L_{55} とし，７０歳までの生存者数を L_{70} とすると，加入者の受取額は加入者の年金支払価値を生存者で分割するので

$$\frac{L_{55}S_{15}}{L_{70}} = \frac{S_{15}}{L_{70}/L_{55}}$$

である．生存者数 L_{70} は確率変数であり，確率論の大数の法則[‡]から，個人の生存事象が互いに独立であれば個人の生存確率に等しく

$$\lim_{L_{55}\to\infty} \frac{L_{70}}{L_{55}} = 0.8$$

であるから，５５歳の契約加入時における７０歳まで生きて受取額は

$$\frac{S_{15}}{L_{70}/L_{55}} = 1.25S_{15}$$

であり，死亡すると受取はないので契約加入の期待値は

$$1.25S_{15} \times 0.8 + 0 \times 0.2 = S_{15}$$

である．契約加入によって生存したときには，S_{15} の 1.25 倍の 1882.5 万円が受取可能となるという社会的相互扶助の仕組みである．この仕組みは契約者数を増加することによって，年金保険のリスクの低減を可能にすると考えられてきた．

1.1　年金基金の準備金とそのリスク

年金額 (benefit) を b_t とし，$t = m+1$ から $t = n$ まで受取り, その掛金 (contribution) の c_t を $t = 1$ から $t = m$ まで支払う問題を考えてみよう．$t = 1$ から $t = m$ まで，安全と考えられる金融資産を毎年買うものとし，その価格を S_t 円とする．その毎年の購入数 u_t は,

$$u_t = c_t/S_t$$

である．支払い終了時点 $t = m$ までの保有資産価値は

$$V_t = S_t(u_1 + \cdots + u_t) = S_t \sum_{i=1}^{t} \frac{c_i}{S_i}$$

である．$t = m+1$ 以降に b_t 受取るために売却する資産の数は

$$u_t = b_t/S_t$$

[†]Actuarial Mathematics は Edmund Halley が 1693 年に開発した生命表 (Mortality table) を基礎として James Dodson が 1750 年代に英国において年金および生命に対する相互扶助保険の数理的保険料率の計算を始めたことから始まる起源がある．

[‡]ボレルの大数の法則

であるから，時点 $t = m$ から $t = n$ までの保有資産価値は

$$V_t = S_t\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{S_i} - \sum_{i=m+1}^{t}\frac{b_i}{S_i}\right), \quad t > m+1 \tag{1.1}$$

である．満期時点 n では保有資産はゼロであるから，$V_n = 0$ から次の資産均衡式

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{S_i} = \sum_{i=m+1}^{n}\frac{b_i}{S_i}, \tag{1.2}$$

が成り立つ．インフレーションがなく年金額を $b_t = b = 100$ 万円とし，払込期間 $m = 35$ 年で，受取期間３５年とする．掛け金を一定額 $c_t = c$ は

$$c = b\sum_{i=m+1}^{n}S_i^{-1}(\sum_{i=1}^{m}S_i^{-1})^{-1}$$

となる．金融資産の価格が，単純に一定な金利で増加すると $S_t = S_{t-1}(1+r)$ であり，$S_t = S_0(1+r)^t$ となるから (1.2) の左辺は

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{c}{S_i} = \frac{c}{S_1}\frac{1-\frac{1}{1+r}^{m}}{1-\frac{1}{1+r}}.$$

同様に (1.2) の右辺は

$$\sum_{i=m+1}^{2m}\frac{b}{S_i} = \frac{b}{S_{m+1}}\frac{1-\frac{1}{1+r}^{m}}{1-\frac{1}{1+r}}$$

であるから，積立期間と受取期間が等しいときには掛金は

$$c = b\frac{S_1}{S_{m+1}} = b/(1+r)^{-m}.$$

この式から，$r = 2$ %の時は掛け金は 50.0 万円，$r = 4$ %の時は 25.3416 万円と半減し，さらに $r = 8$ %の時は掛け金は 6.763 万円と減少する．したがって，金利あるいは運用資金の収益率が長期に亘る年金における重大な影響が単純な計算で明らかになる．

以上は単純にな積立とその消費の金利計算であり，生存者が死亡者からの分配を受ける年金（生存保険）は全く考えていない．年金保険では L_0 を加入者数とし，L_{i-1} をその $i-1$ 年後の生存者数すると，(1.2) に対応する満期 n までの資産均衡式は

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{c_iL_{i-1}}{S_i} = \sum_{i=m+i}^{n}\frac{b_iL_{i-1}}{S_i} \tag{1.3}$$

２５歳で加入し３５年払込みで，６０歳から３５年間に亘って１００万円 $(= b_i)$ の年金を受取るための年間の一定値の掛け金 c を求めてみよう．2010 年の第２１回生命表から抜粋した，次の表 3[§] の L_x を用いて掛け金 c を (1.3) から計算する．ただし，$b_i = 1$ 百万円とする．

$$c = \sum_{i=m+i}^{n}\frac{L_{i-1}}{(1+r)^i}/\sum_{i=1}^{m}\frac{L_{i-1}}{(1+r)^i} \tag{1.4}$$

[§] $d_x = l_x - l_{x+1}, q_x = d_x/l_x, p_x = 1 - q_x$ と生存数から求められる．http://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/seimei/

$r = 2$ %の時は掛け金は 33.4572 万円，$r = 4$ %の時は 18.4561 万円と半減し，さらに $r = 8$ %の時は掛け金は 5.6236 万円と減少する．表 2 は預金と年金制度の掛け金を金利に関してまとめたものである．年金方式の掛金を預金との比率の比較をすると，金利が低いときに年金方式の効果が

表 2: １００万円年金の掛け金 (万円/年)

金利 (%)	0	2	4	8
(a) 預金方式	100.0	50.0	25.3	6.8
(b) 年金方式	60.6	33.5	18.5	5.6
(b)/(a)	0.60	0.67	0.73	0.82

顕著であることが明らかになる．

表 3: 生命表 2010(男)

年齢 x	生存数 l_x	死亡数 d_x	生存率 q_x	死亡率 p_x	死 力 μ_x	定常人口 L_x
0	100 000	246	0.99754	0.00246	0.09375	99 808
25	99 105	64	0.99936	0.00064	0.00064	99 073
35	98 409	84	0.99915	0.00085	0.00083	98 367
50	96 006	304	0.99683	0.00317	0.00303	95 856
60	91 308	739	0.99190	0.00810	0.00773	90 944
70	80 904	1 490	0.98158	0.01842	0.01775	80 168
80	58 902	3 279	0.94432	0.05568	0.05407	57 278
90	21 495	3 448	0.83959	0.16041	0.16615	19 752
95	7 343	1 813	0.75305	0.24695	0.27056	6 407
100	1 317	475	0.63949	0.36051	0.42746	1 065

2 年金の連続モデル

2.1 生存数モデル

年金数理に関する理論的解析には連続モデルが有効である．死亡時刻の確率変数を T とすると，その確率分布関数は

$$F(t) = P(T \leq t)$$

であり，その密度関数を $f(t)=dF(t)/dt$ とする．t に生きている確率を生存関数といい，

$$\bar{F}(t)=P(T>t)=1-F(t)$$

とする．生存確率の変化率を死力とよび $\mu(t)>0$ とする．生存確率は t に関する減少関数であるから

$$\frac{d\bar{F}(t)}{\bar{F}(t)}=-\mu(t)dt \tag{2.1}$$

とする．従って，

$$\bar{F}(t)=\exp(-\int_0^t \mu(s)ds)$$

である．さらに x 歳の人が t 年間生存する条件付き確率は

$$\bar{F}(t|x)=P(T>x+t|T>x)=\frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(x)}$$

であり，その密度関数は

$$f(t|x)=\frac{f(t+x)}{\bar{F}(x)}dt$$

となる．x 歳の人が t 年間生存する確率の変化率を

$$\mu(t|x)dt=-\frac{d\bar{F}(t|x)}{\bar{F}(t|x)} \tag{2.2}$$

と定義すると，

$$\frac{d\bar{F}(t|x)}{\bar{F}(t|x)}=\frac{f(t+x)}{\bar{F}(x)}/\frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(x)}=\frac{f(t+x)}{\bar{F}(t+x)}$$

である．(2.2) から

$$\mu(t|x)dt=-\frac{f(t+x)}{\bar{F}(t+x)}=\mu(t+x)dt$$

従って x 歳の人が t 年間生存する確率は

$$\bar{F}(t|x)=\exp(-\int_0^t \mu(s+x)ds)$$

であり，これを ${}_tP_x$ とアクチュアリーでは記す．x 歳の人が死亡する時刻を T_x と定義すると，その生存確率は

$$P(T_x>t)={}_tP_x=\exp(-\int_0^t \mu(s+x)ds) \tag{2.3}$$

となる．

x 歳の人の存在数を L_x とし，時点 t における死亡者数を N_t とすると，

$$N_t=\sum_{i=1}^{L_x}\mathbf{1_{T_i\le t}}$$

$\mathbf{1_{T_i\le t}}$ は第 i 番目に亡くなった以降に 1 になり，それより前には 0 である次の関数である．

$$\mathbf{1_{T_i\le t}}=\begin{cases}1 & T_i\le t\\ 0 & T_i<t\end{cases}$$

計数過程プロセス N_t が生成する情報系（フィルトレーション）を $\{\mathcal{H}_t\}_{0\le t\le n}$ とする．そのジャンプの強度 λ_t は

$$\lambda_t dt = E[dN_t|\mathcal{H}_{t\_}] = (L_x - N_{t-})\mu(x+t)dt$$

である．このジャンプの平均項を計数過程プロセス N_t から引き，そのマルチンゲールプロセス M_t を定義する．

$$M_t := N_t - \int_0^t \lambda_s ds$$

2.2 年金収支 (Reserve)

連続モデルにおける年金収支の現在価値を定式化する．加入者が $c(t)$ の掛金を期間 $[0, T_a)$ に連続的に払い，年金として連続的に $b(t)$ を $[T_a, T]$ まで受取るとすると，その満期時点における年金基金にとっての価値 A_T は $r(t)$ を無リスク金利とすると

$$A_T = \int_0^T \exp(\int_s^T r(u)du)c(s)(L_x - N_s)\mathbf{1}_{0\le s<T_a}ds - \int_0^T \exp(\int_s^T r(u)du)b(s)(L_x - N_s)\mathbf{1}_{T_a\le s<T}ds$$

A_T の時点 t における市場価値を $V(t)$ とする．無裁定取引理論から市場価格はリスク中立確率 Q での期待値を用いると

$$V(t)\exp(-\int_0^t r(u)du) = E_Q[A_T \exp(-\int_0^T r(u)du)|\mathcal{F}_t]$$

となる．さらに，左辺を $V^*(t)$ とおくと

$$\begin{aligned}
V^*(t) &= E_Q[\int_0^T \exp(-\int_0^s r(u)du)\{c(s)(L_x - N_s)\mathbf{1}_{0\le s<T_a} - b(s)(L_x - N_s)\mathbf{1}_{T_a\le s<T}\}ds|\mathcal{F}_t] \\
&= \int_0^t \exp(-\int_0^s r(u)du)(L_x - N_s)\{c(s)\mathbf{1}_{0\le s<T_a} - b(s)\mathbf{1}_{T_a\le s<T}\}ds \\
&+ E_Q[\int_t^T \exp(-\int_0^s r(u)du)(L_x - N_s)\{c(s)\mathbf{1}_{0\le s<T_a} - b(s)\mathbf{1}_{T_a\le s<T}\}ds|\mathcal{F}_t]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

右辺の第１項は t まで時点０からの収支であり，第２項は t 以降の収支のリスク中立確率での期待値である．第２項を $\tilde{V}(t)$ とし，フビニの定理を用いて計算すると

$$\tilde{V}(t) = \exp(-\int_0^t r(u)du)\int_t^T E_Q[\exp(-\int_t^s r(u)du)(L_x - N_s)\{c(s)\mathbf{1}_{0\le s<T_a} - b(s)\mathbf{1}_{T_a\le s<T}\}ds|\mathcal{F}_t].$$

金利変動が生成する情報系（フィルトレーション）を $\{\mathcal{G}_t\}_{0\le t\le T}$ とし，$\{\mathcal{F}_t\} = \{\mathcal{G}_t\} \vee \{\mathcal{H}_t\}$ と表す．金融プロセスと生存プロセスは独立であり，$B(t,s) = E_Q[\exp(-\int_t^s r(u)du)|\mathcal{G}_t]$ は，満期を s とする時点 t における割引債価格である．従って，

$$\tilde{V}(t) = \exp(-\int_0^t r(u)du)\int_t^T B(t,s)E_Q[(L_x - N_s)\{c(s)\mathbf{1}_{0\le s<T_a} - b(s)\mathbf{1}_{T_a\le s<T}\}ds|\mathcal{F}_t]$$

生存者数は $L_x - N_s = (L_x - N_t)e^{-\int_t^s \mu(x,u)du}$ であるから

$$\begin{aligned} E_Q[(L_x - N_s)|\mathcal{F}_t] &= E_Q[(L_x - N_t)e^{-\int_t^s \mu(x,u)du}|\mathcal{F}_t] \\ &= (L_x - N_t)E_Q[e^{-\int_t^s \mu(x,u)du}|\mathcal{F}_t] \\ &= (L_x - N_t)S_x(t,s) \end{aligned}$$

ただし，$S_x(t,s) = E_Q[e^{-\int_t^s \mu(x,u)du}|\mathcal{F}_t]$ は x 歳の人が t から s まで生存するリスク中立確率である．従って，

$$\tilde{V}(t) = \exp(-\int_0^t r(u)du)(L_x - N_t)\int_t^T B(t,s)S_x(t,s)(c(s)\mathbf{1}_{0\le s<T_a} - b(s)\mathbf{1}_{T_a\le s<T}\}ds \quad (2.5)$$

以上をまとめたのが次の年金収支 (Reserve) の定理である．

定理 1 x 歳の加入者数が L_x の年金において，連続的に掛金を $c(s)$ を $0 < s < T_a$ に支払い，その後に $b(s)$ を $T_a \le s \le T$ 歳まで受取る契約の時点 t における資産価値 *(Reserve)* を $V(t)$ とすると，その割引価値 $V^*(t)$ は

$$V^*(t) = A_t^* + \tilde{V}(t) \quad (2.6)$$

である．ただし $\tilde{V}(t)$ は *(2.5)* とする．および A_t^* は *(2.7)* である．

$$A_t^* = A_t e^{-\int_0^t r(s)ds} = \int_0^t \exp(-\int_0^s r(u)du)(L_x - N_s)\{c(s)\mathbf{1}_{0\le s<T_a} - b(s)\mathbf{1}_{T_a\le s<T}\}ds \quad (2.7)$$

3　長寿リスク

年金制度の基本的な仕組みは第 1 節で見た通り生存率に依存する．さらに年金加入から年金給付までの長期の積立期間が存在し，積立額と給付額の設定は加入時の生存率によって決められる．ところが医療の進歩や健康に対する人々の意識が高まりによって，図-1 に示した日本の近年の傾向では，男性６５歳の平均余命は１９６０年の 11.6 年から５０年間に 18.6 年となった．平均 0.1525 年増加している．女性の場合には 14.05 から 23.94 にまで延び，平均 0.2138 増加している．

変化率（%）については図-2 に示した通り，男女ともにその変動率は小さくなっている．変化率の最大値は男女それぞれ 1962 年の 4.94% と 3.97%である．一方その最小値は それぞれ 1964 年の -2.38% と -1.42%である．また，それぞれの標準偏差は男性が 1.47%であり，女性が 1.20%である．

図-2 から増加率の平均が正で一定であることは６５歳余命が無限に延びることになる．次の散布図の平滑法の 1 つである LOESS[2] を用いて余命における増加から減少への転換年を推定してみる．図-3 は R 言語あるいは Splus に用意されている局所多項式回帰当てはめ (Local Polynomial Regression Fitting) を用いて長期的傾向を変動する時系列から抽出したものである．特に女性の６５歳余命の増加率はこの多項式平滑では 1978 年を頂点とする 1.38%から 1979 年以降は減少関数と推定され，2009 年には半減し 0.656%の増加率となる．男性の６５歳余命の平滑化後の増加率

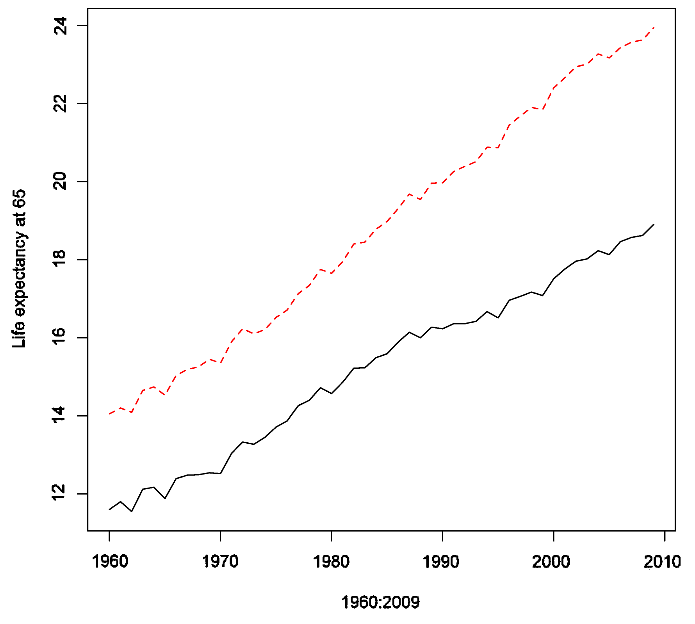

図 1: **６５歳の平均余命（男性，女性）**

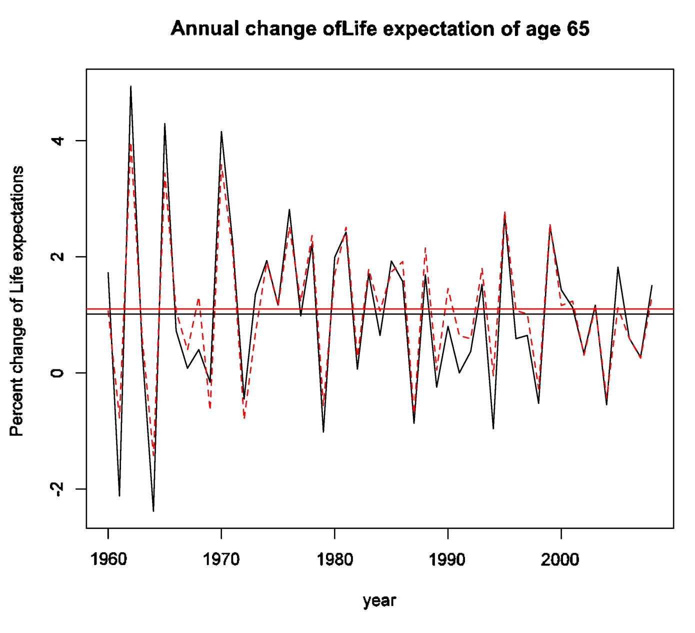

図 2: **６５歳の平均余命変化率（男性，女性）**

の最大値は 1976 年であるが 1992 年に平滑化における最小値 0.673%となった以降上昇し，2009 年には 0.982% となり，ここで用いた５０年間の平滑化では明らな減少を把握できない．

平滑化した増加率を平均項として余命の変動率を求めると，男性の標準偏差が 1.43%となり，女性のそれは 1.16%と平滑を用いない場合の微減となる．

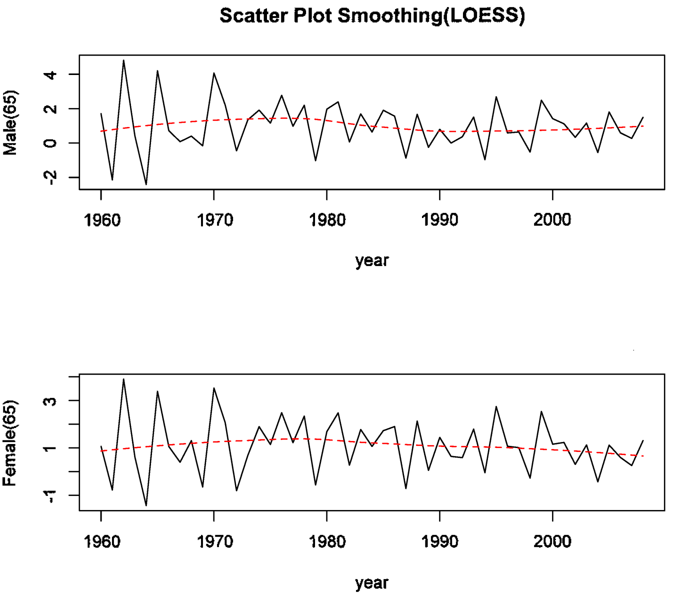

図 3: **６５歳の平均余命多項式平滑（男性，女性）**

3.1 平均余命のリスク

第 1 節で述べたように年金は大数の法則によって，加入者の増加がリスク管理の基本的戦略である．しかし，その前提には死力は確定的関数であり確率的に変化しないと仮定している．高齢化の進展は生存確率を確率的に変化させている．そのリスクを簡単な生存者数のシミュレーションモデルで示してみよう．

（１）死力確定的モデル

x 歳の N_x 人の加入者が生存し，その死力をメイカムモデル

$$\mu(x+t) = a + bc^{x+t}$$

とし，第 i 年次の年間死亡者 d_i をその強度を $N_{x+i-1}\mu(x+i)$ とするポアソン分布から求める．

$$d_i \sim Poisson(N_{x+i-1}\mu(x+i))$$

第 i 年次の生存者は $N_{x+i} = N_{x+i-1} - d_i$ である．Dickson[5] が推薦する死力のパラメター値であるa $a = 0.0001, b = 0.00035, c = 1.075$ として平均余命のリスクを考えよう．65 歳から３０年間 $(x = 65, i = 1 \sim 30)$ の生存者数 N_{95} を１０万回のシミュレーションで求めたヒストグラムが 図-4 である．左側が６５歳の人数１００人であり，右側は１０００人の場合である． 母集団が 100 人

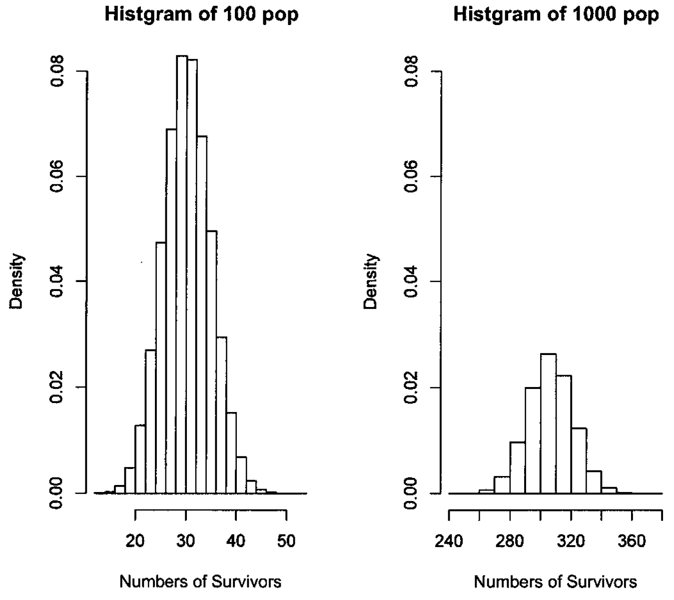

図 4: 生存者数シミュレーション

のときの平均値は 30.60 人であり，分散は 4.7 人である．一方，母集団が 1000 人のときの平均値は 306.90 人であり，分散は 14.86 人である．従って一人あたりの平均値はどちらの場合もほぼ 0.306 であるが，一人当たり分散が１００人のときは 0.2260 に対して１０００人のときには 0.2209 と減少している．これは大数の法則から「平均値は収束し，そのリスクである分散は加入者数が増えるとリスクが減少する」という保険数理の基本的原理である．死亡者数の変動リスク"Unsystematic mortality risk" は加入者数の増加により " Diversifiable" とする特徴である．

(2) 死力確率変動モデル

死力が確率的に変化し，その変動乗数を正の確率プロセス $K_x(t)$ とすると，確率変動死力を次のように定義できる．

$$\mu(x,t) = \mu(x+t)K_x(t) = (a + bc^{x+t})K_x(t)$$

死力の変動がすべての個人の死亡に対して同じ方向に影響があるとき，大数の法則を基礎とする伝統的保険商品だけではそのリスク管理は困難となる．このリスクは "Systematic mortality risk" とよばれ，管理のためのポートフォリオ資産として期待されるのが，第５節で示す長寿デリバティ

ブである.

3.2 確率的死力のアフィン・モデル

確率的死力プロセス $\mu(t,x)$ を確定的死力 $\mu(t+x)$ と長寿化のリスク $\kappa(t,x)$ の積とする.

$$\mu(t,x)=\mu(t+x)\kappa(t,x), \quad \kappa(0,x)=1$$

長寿化のリスク $\kappa(t,x)$ は $\mathcal{H}_t$ 可測なブラウン運動 $W_\mu(t)$ によって次のようプロセスとする.

$$d\kappa(t,x) \;=\; \mu_k(t,\kappa(t,x))dt+\sigma_k(t,\kappa(t,x))dW_\mu(t)$$

このときの確率的生存確率 $S_x(t,T)$ は,

$$S_x(t,T) \;=\; E[\exp(-\int_t^T \mu(s,x)ds)|\mathcal{H}_t]$$

によって定義される. 死力が非負の確率モデルであるために, $\kappa(t,x)$ を平均回帰性のあるアフィンモデル[¶]とする.

$$d\kappa(t)=(\gamma_k-\delta_k\kappa(t))dt+\sigma_k\sqrt{\kappa(t)}dW_\mu(t)$$

伊藤の補題によって確率的死力も次のようにアフィンモデルになる.

$$d\mu(t,x)=(\gamma_\mu-\delta_\mu\mu(t,x))dt+\sigma_\mu\sqrt{\mu(t,x)}dW_\mu(t) \tag{3.1}$$

ただし $\gamma_\mu=\mu(t+x)\gamma_k$, $\delta_\mu=\delta_k-\frac{d\mu(t+x)}{\mu(t+x)}$, $\sigma_\mu=\sigma_k\sqrt{\mu(t+x)}$ である. 死力が正である $\mu(t,x)>0$ の条件は $2\gamma_\mu>\sigma_\mu^2$ である.
生存確率プロセスは (3.1) の解は次の通りであり,

$$S_x(t,T)=\exp(-\int_t^T \mu(t,s)ds)=\exp(\alpha_x(t,T)-\beta_x(t,T)\mu(t,x)) \tag{3.2}$$

$\alpha_x(t,T),\beta_x(t,T)$ は次の偏微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial\beta_x(t,T)}{\partial t} &= \delta_x\beta_x(t,T)+\frac{1}{2}\sigma_\mu^2\beta_x(t,T)^2-1 \\ \frac{\partial\alpha_x(t,T)}{\partial t} &= \gamma_\mu\beta_x(t,T) \end{cases} \tag{3.3}$$

を満たし、終端条件 $\beta_x(T,T)=0$ からの解は

$$\beta_x(t,T)=\frac{2(e^{\eta_x\tau}-1)}{(\eta_x+\delta_x)(e^{\eta_x\tau}-1)+2\eta_x},$$

である. ただし $\eta_x^2=\delta_x^2+2\delta_x\sigma_x^2$ とする. このときの先渡し死力 (Forward mortality intensities) は

$$f_x^\mu(t,T)=-\frac{\partial logS_x(t,T)}{\partial T}=\mu(t,x)\frac{\partial\beta_x(t,T)}{\partial T}-\frac{\partial\alpha_x(t,T)}{\partial T}$$

[¶] Dahl-Moller[3] を参照

と求められる.

確定的死力がメイカムモデルとすると確定的生存確率は

$$\exp(-\int_t^T \mu(s+x)ds) = \exp(-a(T-t) - \frac{b}{logc}c^x(c^T - c^t))$$

である，式 (3.1) から確率的死力の長期的平均項は $\frac{\gamma_\mu}{\delta_\mu}$ である．したがって確率的死力は $\mu(t+x)\frac{\gamma_k}{\delta_\mu}$ に回帰するモデルとなっている．この平均回帰的アフィンモデルによる生存確率を次節以降の "Systematic Risk" に対するモデルとする.

付録 A の測度変換によるブラウン運動 W_μ^Q を用いると，生存確率の変化率のプロセスはリスク中立確率 Q のもとではアフィンモデルの特徴から次の通りとなる.

$$dS_x^Q(t,T)/S_x^Q(t,T) = r(t)dt - \sigma_\mu\sqrt{\mu(t,x)}\beta_x(t,T)dW_\mu^Q(t) \tag{3.4}$$

4　年金リスク管理のポートフォリオ

長寿デリバティブ市場は 2012 年頃から増加しはじめ，２０１５年にはヨーロッパ市場で２５兆円規模に急速に市場規模が拡大しつつある．また，長寿デリバティブ市場をリアルタイムで報告するサイト www.artemis.bm もあり，その拡大の勢いは加速していることを示している．長寿デリバティブ市場は大別すると，(1) Longevity Swaps (Survivor swaps)：長寿スワップ (2) Longevity Bonds：長寿債券 (3) q-forward，あるいは s-forward contracts：長寿先物契約 (4) 年金基金のバイアウトがある．以下では長寿スワップおよび長寿債を用いたポートフォリオによって長寿リスクを管理するためのポートフォリオ戦略を検討する．まず，ポートフォリオに従来は基本的に使われてきた割引債 (Non-defaultable Bond) を考えよう.

4.1　債券価格モデル

観測される確率空間を $(\Omega, \mathcal{G}_t, P)$ とし，短期金利 $r(t)$ には次の Vasicek Model を仮定し

$$dr(t) = (\gamma_r - \delta_r r(t))dt + \sigma_r dW_r(t)$$

とする．また，安全資産価格 $B(t)$ が

$$dB(t) = r(t)B(t)dt$$

を満たすとする．債券価格 $B(t,T)$ はリスク中立確率 Q のもとで

$$B(t,T) = E_Q[e^{-\int_t^T r(u)du}|\mathcal{F}_t] = \exp(\alpha_r(t,T) - \beta_r(t,T)r(t))$$

であり，その収益率プロセスは

$$dB(t,T)/B(t,T) = r(t)dt - \sigma_B(t)dW_r^Q(t)$$

となる．ただし，

$$\sigma_B(t,T)=\sigma^r(1-e^{-\delta_r(T-t)})/\delta^r$$

である．さらに，債券価格の割引価値を $B^*(t,T)=B(t,T)/B(t)$ とすると，その収益率のプロセスは

$$dB^*(t,T)/B^*(t,T)=-\sigma_B(t)dW_r^Q(t). \tag{4.1}$$

4.2 長寿スワップ (Longevity swap)

長寿スワップ契約を表４の例で紹介しよう．１月１日がそのスワップ契約日としよう．契約時には金銭の授受はなく，契約期間に支払う予定額だけが決められる．この例では表４の第３列の額であり，６５歳の加入者数 10 万人の年金が給付月額１０００円であるとしよう．

２月１日には契約時の予定では生存者数が 9.5 万人であるものとしていたが実際は１０万人が生存していたとすると，年金基金は 10,000 万円を受給者に支払うために，固定された支払予定額 (1000 円 ×9.5 万人=) 9,500 万円との差額５００万円をスワップ契約者から受取る．スワップ契約によって年金基金は支払額が固定され，スワップ契約者は実際の生存者の差額を支払う．一方，４月１日のように契約時の予定支払額が 9,100 万円であったものが実際の生存者への支払が 9,000 万円であると，年金基金は１００万円をスワップ契約者に支払う．満期時点 T まで続け，満期には金銭の授受はない．契約両者は固定支払予定額を決めることによって契約が成立する．

表 4: Longevity swaps(万円)

日付	支払実額	予定給付総額	swap 収支
2 月 1 日	10,000	9,500	500
3 月 1 日	9,500	9,300	200
4 月 1 日	9,000	9,100	-100
5 月 1 日	9,000	8,900	100

4.2.1 長寿スワップのモデル

Longevity swap のペイオフを $L(t,x)$ とすると，固定支払額は予定生存数である $l_x\bar{F}(t,x)=l_xe^{-\int_0^t\mu(x+u)du}$ に年金額を乗じたものであり，変動受取額は確率的生存者数である $l_x-N(t,x)$ に比例して受取る．従って，長寿スワップ収支の変動プロセスは

$$dL(t,x)=(l_x-N(t,x))dt-l_xe^{-\int_0^t\mu(x+u)du}dt,$$

である．ただし，初期に金銭の授受はないから $L(0,x)=0$ である．

Longevity swaps の t における価値を $V_L(t,x)$ とすると，その満期日 T に対して

$$
\begin{aligned}
V_L(t,x) &= E_Q[\int_0^T e^{-\int_0^s r(u)du} dL(s,x)|\mathcal{F}_t] \\
&= \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} dL(s,x) + E_Q[\int_t^T e^{-\int_0^s r(u)du} dL(s,x)|\mathcal{F}_t].
\end{aligned}
$$

その第1項は t までのスワップの収支の現在価値の $L^*(t,x)$ であり，第2項は割引将来収支である．それを $V_L^*(t,x)$ と定義すると

$$
V_L^*(t,x) = e^{-\int_0^t r(u)du} E_Q[\int_t^T e^{-\int_t^s r(u)du} dL(s,x)|\mathcal{F}_t]
$$

死亡確率と債券価格のリスク中立確率は独立であり，さらにフビニの定理を用いると

$$
V_L^*(t,x) = (l_x - N(t,x)) \int_t^T B^*(t,s) S_x^Q(t,s) ds - l_x \bar{F}(t,x) \int_t^T B^*(t,s) \bar{F}(s-t, x+t) ds \tag{4.2}
$$

ただし

$$
\begin{cases}
S_x^Q(t,s) & = E_Q[\exp(-\int_t^s \mu(u,x)du)|\mathcal{F}_t] = e^{\alpha_\mu(t,s) - \beta_\mu(t,s)\mu(t,x)} \\
B^*(t,s) & = B(t,s) e^{-\int_0^t r(u)du}.
\end{cases}
$$

以上から，longevity swap 価値の確率変動プロセスは

$$
dV_L^*(t,x) = \nu_L(t) dM_Q(t) + \eta_L(t) dW_r^Q(t) + \rho_L(t) dW_\mu^Q(t) \tag{4.3}
$$

であり，その確率変動項の係数は

$$
\begin{cases}
\nu_L(t) = -\int_t^T B^*(t,s) S_x^Q(t,s) ds \\
\eta_L(t) = -(l_x - N(t_-,x)) \int_t^T \sigma_B(s-t) B^*(t,s) S_x^Q(t,s) ds + l_x \bar{F}(t,x) \int_t^T \sigma_B(s-t) B^*(t,s) \bar{F}(s-t, x+t) ds \\
\rho_L(t) = -\sigma_\mu \sqrt{\mu(t,x)} (l_x - N(t_-,x))(1+g(t)) \int_t^T \beta_x(t,s) B^*(t,s) S_x^Q(t,s) ds
\end{cases}
$$

である．ここで，$g(t)$ は付録で述べる測度変換に関する関数である．

4.3 長寿債（Longevity Bond）

Longevity Bond は満期が T であるが，その元金の返済ない利付債である．ただし，対象とする人口の生存人数に比例したクーポンが支払われる．例えば，ヨーロッパの EIB/BNP が２００４年に発行した満期が $T=25$ 年の長寿債では $x=65$ 歳の英国のコホートを対象とし，クーポンベースを５０００万ポンドで割引率を LIBOR–0.35%としたものが発行された，次の表 4.4 はこの長寿債の初期の３年間のクーポン支払の例である．

表 5: Longevity Bond

u 年度	実現生存率 $S_x(t,u)$	クーポン支払 (ポンド)
2005	97.95%	48,975,000
2006	95.89%	47,945,000
2007	93.83%	46,915,000

生存確率と金利の変動は独立であるからリスク中立確率では，長寿債の価格は

$$\begin{aligned} B_L(t,T) &= E_Q[\int_t^T e^{-\int_t^u r(s)ds} S_x(t,u)du|\mathcal{F}_t] \\ &= E_Q[\int_t^T e^{-\int_t^u (r(s)+\mu(s,x))ds} du|\mathcal{F}_t] \\ &= \int_t^T B(t,u) S_x^Q(t,u)du \end{aligned}$$

長寿債のの変動プロセスは

$$dB_L^*(t,T) = \int_t^T \left(dB^*(t,u)S_x^Q(t,u) + B^*(t,u)dS_x^Q(t,u) \right) du$$

であり，(4.1) と (3.4) から

$$dB_L^*(t,T) = \eta_B(t)dW_r^Q(t) + \rho_B(t)dW_\mu^Q(t) \tag{4.4}$$

ただし

$$\begin{cases} \eta_B(t) = \int_t^T S_x^Q(t,u)\sigma_B(u)du \\ \rho_B(t) = -(\int_t^T B^*(t,u)S_x^Q(t,u)\sigma_\mu\sqrt{\mu(t,x)}\beta_x(t,u)du) \end{cases}$$

である．

4.4 年金の割引準備金の確率プロセス

年金価値として x 歳の l_x 人からなる満期 T の年金保険のヘッジポートフォリオを考えよう．第2節で見たように t における年金収支のプロセスは式 (2.6) から

$$V^*(t) = A^*(t) + e^{-\int_0^t r(u)du}\tilde{V}(t)$$

である．受給者一人あたりの割引準備金を $\tilde{V}_1(t)$ とすると，

$$\tilde{V}_1(t) = \int_t^T B^*(t,s)S_x^Q(t,s)(-c(s)\mathbf{1}_{(0\le s<T_r)} + b(s)\mathbf{1}_{(T_r\le s<T)})ds$$

t 以降に発生する将来の支払プロセスを割引準備金 (Market reserve) は

$$\tilde{V}(t) = (l_x - N(t,x))\tilde{V}_1(t)$$

である．

年金収支のプロセスのダイナミックスは伊藤の公式より，

$$dV^*(t) = \nu_V(t)dM_Q(t) + \eta_V(t)dW_r^Q(t) + \rho_V(t)dW_\mu^Q(t) \tag{4.5}$$

であり，その係数は

$$\begin{cases} \nu_V(t) = -\tilde{V}_1(t) \\ \eta_V(t) = -\sigma_r(l_x - N(t_-, x)) \displaystyle\int_t^T B^*(t,s)S_x^Q(t,s)\beta_r(t,s)dA(s) \\ \rho_V(t) = \sigma_\mu\sqrt{\mu(t,x)}(1+g(t)) \displaystyle\int_t^T B^*(t,s)S_x^Q(t,s)\beta_x(t,s)dA(s) \end{cases}$$

である．

4.5 ヘッジポートフォリオ

年金の割引準備金のヘッジ戦略を考えよう．割引債保有数を ξ_t, 長寿スワップ契約数を θ_t, そして長寿債保有額を ζ_t とすると，ポートフォリオの割引プロセスは

$$d\tilde{V}(t) \;=\; \xi_t dB^*(t,T) + \theta_t dL^*(t,x) + \zeta_t dB_L^*(t)$$

であり，年金収支のダイナミックスの式 (4.5) から

$$\nu_V(t)dM_Q + \eta_V(t)dW_r^Q + \rho_V(t)dW_\mu^Q(t)$$

に等しい．安全資産の保有額は $\eta_t = \tilde{V}(t) - \{\xi_t B^*(t,T) + \theta_t L^*(t,x) + \zeta_t B_L^*(t)\}$ とすると，年金収支のダイナミックスのリスクを以下のようにヘッジできる；

$$\begin{pmatrix}\xi_t, \theta_t, \zeta_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_B(t) & 0 \\ \nu_L(t) & \eta_L(t) & \rho_L(t) \\ 0 & \eta_B(t) & \rho_B(t) \end{pmatrix} = (\nu_V(t), \eta_V(t), \rho_V(t))$$

その解は

$$\begin{cases} \theta_t^* = \nu_V(t)/\nu_L(t) \\ \zeta_t^* = (\rho_V(t) - \theta_t^*\rho_L(t))/\rho_B(t) \\ \xi_t^* = -(\eta_V - \theta_t^*\eta_L(t) - \zeta_t^*\eta_B(t))/\sigma_B(t) \end{cases}$$

である．以上から，年金保険のリスク管理は長寿スワップ保有によって死亡に関する Unsystematic risk 対策が可能となり， 長寿債の保有は長寿による systematic risk 対策，割引債の保有は金利変動の systematic risk 対策が可能となる．しかし，問題点は『生命表から推定される生存確率』と『年金加入者の生存確率』のずれによるリスクである．

5 年金基金のリスク管理

年金基金の運営会社の長寿リスクに対する管理のためのポートフォリオを考えよう．次の Gompertz-Makeham law を基礎として確率的生存確率を仮定する．

$$\mu(x+t) = a + bc^{x+t}$$

ある年金基金の加入者は一般生命表からの死力の比較は次の表である．一般に年金基金加入者は一般の人口より死亡率が低く，長寿リスクが大きくなりうる例である．年金加入者の死亡率の情報は限られており，一般の人口に関する死亡率の統計を用いる．年金基金加入者に関する情報の不足によるリスクを一般の人口に関する長寿デリバティブによっていかに管理できるか考る．表

表 6: Gompertz-Makeham

モデル	人口	死力	a	b	c
年金加入者	l_{x_1}	$\mu_1(t+x)$	0.000134	0.0000353	1.102
一般	l_x	$\mu(t+x)$	0.000136	0.0000350	1.103

6 は Dahle and Moller (2008)[4] からのパラメータであり，図 5 には年金加入者（実線）と一般人口（破線）の生存確率を示した．

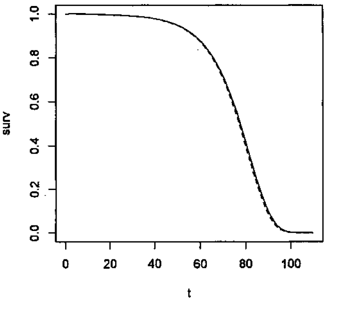

図 5: Gompertz-Makeham Sarvival probablity

5.1 加入者の生存確率 (survival model)

当該年金の x 歳の加入者グループ l_x^1 の死力を次のように定義する．ただし $l_x^1 < l_x$ とする．

$$\begin{cases} \mu_1(t,x) = \mu_1(t+x)\kappa_1(t) \\ d\kappa_1(t) = (\gamma_{k1} - \delta_{k1}\kappa_1)dt + \sqrt{\kappa_1}\sigma_{11}dW_\mu(t) \end{cases}$$

死力のプロセスは

$$d\mu_1(t,x) \quad = \quad (\gamma_{\mu_1} - \delta_{\mu_1}\mu_1(t,x))dt + \sqrt{\mu_1(t,x)}\sigma_{11}dW_\mu(t)$$

となる．このグループの年金キャッシュフローのプロセスは

$$dA_1(t) \quad = \quad -c(t)(l_x^1 - N_1(t_-,x))\mathbf{1}_{(0\le t<T_r)} + b(t)(l_x^1 - N_1(t_-,x))\mathbf{1}_{(T_r\le t<T)}$$

であり，その年金収支のプロセスは

$$V^{1*}(t) = E_Q[\int_0^T e^{-\int_0^s r(u)du} dA_1(s)|\mathcal{F}(t)]$$

さらに年金収支プロセスは将来の支払プロセス $\tilde{V}^*(t)$ と t までのキャッシュフロー $A_1^*(t)$ の和になる．

$$\begin{aligned} V^{1*}(t) &= \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} dA_1(s) \\ &= A_1^*(t) + \tilde{V}^*(t) \end{aligned}$$

そのための割引準備金 (Market reserve) は受給者あたりの割引準備金 $\tilde{V}_p(t)$ を用いると

$$\tilde{V}^*(t) = (l_x^1 - N_1(t,x))\tilde{V}_p(t)$$

ただし，受給者あたりの割引準備金は

$$\tilde{V}_p(t) = \int_t^T B^*(t,s)S_x^Q(t,s)(-c(s)\mathbf{1}_{(0\le s<T_r)} + b(s)\mathbf{1}_{(T_r\le s<T)})ds$$

となる．

5.2 年金収支プロセス

当該年金基金の収支のプロセス

$$dV^{1*}(t) = \nu_V^1(t)dM_Q^1(t) + \eta_V^1(t)dW_r^Q(t) + \rho_V^1(t)dW_\mu^Q(t) \tag{5.1}$$

ただしジャンププロセスは

$$\begin{cases} dM_Q^1 = N_1(t,x) - \lambda_1^Q(t)dt \\ \lambda_1^Q(t) = (l_x^1 - N_1(t_-,x))\mu_1(t,x) \end{cases}$$

で定義される．式 (5.1) のマルチンゲール項のそれぞれの係数は

$$\begin{cases} \nu_V^1(t) = -\tilde{V}_p(t) \\ \eta_V^1(t) = -\sigma_r(l_x^1 - N_1(t,x)) \int_t^T \beta^r(t,s)B^*(t,s)S_x^{Q1}(t,s)dA(s) \\ \rho_V^1(t) = \sigma_{12}\sqrt{\mu_1(t,x)}(1+g^1(t)) \int_t^T \beta^x(t,s)B^*(t,s)S_x^{Q1}(t,s)dA(s) \end{cases}$$

である．

年金保険のリスクは　M_Q^1, W_r, W_μ であり，そのヘッジ戦略を考える．

5.3　リスク最小投資戦略

非完備市場のヘッジングは，Moller[98] が年金基金のリスク最小化戦略として Foellmer-Schweizer の “Minimal martingale measure” の方法を用いる．ポートフォリオ戦略を $\psi_t = (\eta_t, \theta_t, \zeta_t)$ とする．割引債，長寿スワップ，長寿債のそれぞれの割引価格の収益率プロセスは

$$\begin{cases} \frac{dB^*(t,T)}{B^*(t,T)} &= -\sigma_B(t)dW_r^Q \\ \frac{dV_L^*(t,x)}{V_L^*(t,x)} &= \nu_L(t)dM_Q(t) + \eta_L(t)dW_r^Q(t) + \rho_L(t)dW_\mu^Q(t) \\ \frac{dB_L^*(t,T)}{B_L^*(t,T)} &= \eta_B(t)dW_r^Q(t) + \rho_B(t)dW_\mu^Q(t) \end{cases} \tag{5.2}$$

である．さらに $dX(t) = (dB^*(t,T), dV_L^*(t,x), dB_L^*(t))$ とおくと，そのコスト関数が次のように定義される．

$$C(t,\psi) = V^{1*}(t) - \int_0^t \psi_s^\top dX(s) + A^*(t)$$

リスクプロセスをコスト関数によって次のように定義する．

$$R(t,\psi) = \min_{\eta,\theta,\zeta} E_Q[(C(T,\psi) - C(t,\psi))^2 | \mathcal{F}_t]$$

マルチンゲールに関する Galtchouk-Kunita-Watanabe 分解定理によって

$$dV^{1*}(t) = \eta_t dB^*(t,T) + \theta_t dV_L^*(t,x) + \zeta_t dB_L^*(t,T) + dU(t)$$

となり，U が B^*,V_L^*, および B_L^* と独立となるように分解できる．従って，リスク最小ポートフォリオは

$$\begin{cases} \eta_t^* &= \frac{d<V^{*1},B^*>}{d<B^*,B^*>} \\ \theta_t^* &= \frac{d<V^{*1},V_L^*>}{d<V_L^*,V_L^*>} \\ \zeta_t^* &= \frac{d<V^{*1},B_L^*>}{d<B_L^*,B_L^*>} \end{cases} \tag{5.3}$$

であり，安全資産保有額は

$$\phi_t^* = V^{1*}(t) - (\eta_t^* B^*(t,T) + \theta_t^* V_L^*(t) + \zeta_t^* B_L^*(t,T))$$

である．リスクプロセスは加入者変化の Unsystematic Risk に対するヘッジを評価しており，長寿スワップを用いない，即ち $\theta_t = 0$ としたときのリスクのコスト関数は長寿スワップを用いる戦略 $\theta_t \neq 0$ のコスト関数より大きくなる．

6　おわりに

長寿債は死力の変動リスクに有効である．さらにOECD[1]などに指摘されているように，その債券が流通することによって死力に関する情報の量とその質の改善が期待されている．その市場からの価格情報によって，スワップにおける固定死力の決定に適切な死力の情報が期待できる．しかし，スワップが初期費用がかからないのに比べ，長寿債はその初期費用 (Up front cost) が発生することが問題となっている．長寿債の市場への浸透には，そのための新たな仕組みが必要である．

保険会社の年金のリスク管理には，人口ベースの長寿スワップをヘッジ戦略に含むかの選択はリスクプロセスの評価値に依存する．年金保険の生存者数 Unsystematic Risk つまり dM^1 を人口の長寿スワップでヘッジできないことが，年金保険のリスク管理を複雑にしている．死力に対する情報の非対称の問題に起因している．

現在の低金利が続くならば，将来的には年金の長寿リスク管理における長寿デリバティブの重要性を増すであろう．

A　リスク中立測度のギルサノフ変換

リスク中立確率への測度変換をまとめてみよう．確率 P のもとで金利プロセスは

$$dr(t) = (\gamma_r - \delta_r r(t))dt + \sigma_r dW_r(t)$$

であり，死力プロセスを

$$d\mu(t,x) = (\gamma_\mu - \delta_\mu \mu(t,x))dt + \sigma_\mu \sqrt{\mu(t,x)}dW_\mu(t)$$

とし，その強度プロセスを

$$\lambda(t,x)dt = (l_x - N(t_-,x))\mu(t,x)dt$$

とすると，リスク中立確率 Q のもとでは．ブラウン運動 $W_r(t)$ に対して

$$h_r(t) = -(c_0 + c_1 r(t))/\sigma_r$$

同様に $W_\mu(t)$ に対して

$$h_\mu(t) = -b_0(t)\frac{\sqrt{\mu(t,x)}}{\sigma_\mu} + \frac{b_1(t)}{\sigma_\mu\sqrt{\mu(t,x)}}$$

と定義する．そのギルサノフ・カーネルを

$$dG(t) = G(t_-)(h_r(t)dW_r(t) + h_k(t)dW_\mu(t) + g(t)dM(t))$$

とすると，リスク中立確率として

$$dQ/dP = G(T), G(0) = 1, E[G(T)] = 1, g(t) + 1 > 0$$

となる測度Qが定義できる．Qのもとではポアソン強度プロセスを

$$\lambda^Q(t) = (l_x - N(t_-, x))(1 + g(t))\mu(t, x)$$

とすると，リスク中立確率Qのもとで確率プロセスはそれぞれ次の通りとなる．

$$\begin{cases} dW_r^Q(t) = dW_r(t) - h_r(t)dt \\ dW_\mu^Q = dW_\mu(t) - h_\mu(t)dt \\ dM_Q(t, x) = dN(t, x) - \lambda^Q(t)dt \end{cases} \tag{A.1}$$

参考文献

[1] "Mortality assumptions and Lonvegity risk -Implications for pension funds and annuity providers" 0ECD 2014

[2] Chambers, J.M. and T.J. Hastie, "Local regression models." Chapter 8 of Statistical Models in S, Wadsworth & Brooks/Cole.

[3] Dahl,M. and Moller,T."Valuation and Hedging of Life insurance liabilities with systematic mortality risk", Insurance: Mathematics and Ecoonomics 39, pp 193-217, 2006

[4] Dahl,M. Melchior, M and Moller, T. "On systematic mortality risk and risk-minimization with survivor swaps" Scandinavian actuarial journal 108, pp114-146 2008

[5] Dickson,D. Hardy, M. and Waters,H. "Actuarial mathematics for Life contingent risks" Cambridge university press 2009

[6] Norberg, R. "Basic Life insurance mathematics" Lecture note 2002

[7] Moller,T." Risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts" ASTIN BULLETIN vol 28 No 1, 1998, pp 17-47

Department of Indistrial & Systems Engineering
Faculty of Science & Engineering
Hosei University, Koganei 184-8584, Japan
E-mail address: uratani@hosei.ac.jp

法政大学・理工学部　浦谷　規