数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 17-23

Exponents for the number of high points of simple random walks in two dimensions

Izumi OKADA, Tokyo institute of Technology

1 研究の背景

ここでは、2次元 (整数格子上) の単純ランダムウォーク (SRW)$\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ の local time に関する極限定理を扱う. 特に、2次元の favorite point (SRW の local time が他点と比べて極端に大きい点) と late point (SRW の到達時刻が極端に遅い点) という特異点に着目した. また、その拡張として favorite domain (他の領域と比べて SRW の local time が極端に大きい領域) にも着目している. この背景として、favorite point などについて、local time の様々な汎関数との対応関係が知られていることがある. もともと P.Erdös 氏ら ([8, 9, 10]) が2次元 SRW の local time の汎関数に関する多様な問題を提唱しており、この分野の第一人者である A.Dembo, Y.Peres, O.Zeitouni, J.Rosen 氏ら (以下四氏) により [1, 2, 4] などで解決されている. 例えば [2, 4] では、local time の汎関数である「被覆時間 (整数トーラス上の全ての点を被覆し終える時間)」や「SRW の訪問点集合に被覆される円板の最大の半径」の長時間挙動に関する評価がされた. また一般的に、確率過程の様々な極限定理を得るために、その確率過程の高次モーメントの評価が重要であることが知られている. 実際、四氏は「評価したい local time の汎関数の2次モーメント」と「 favorite point や late point の2点間の相関関係」の対応を示すことで、[2, 4] では問題を解決している. 従って、これらの特異点は local time の汎関数の極限定理と密接な関係を持つため、重要な研究対象と考えている.

2 先行結果

まず、local time に関する特異点を調べる動機として、Gaussian free field と local time との関係を知りたいということがある. これに関する結果として、Generalized second Ray-Knight theorem が Gaussian free field と local time を結びつけている. これは連続時間のランダムウォークに関する結果であるため、結果を述べるために、記号の準備をする. 一般の有限グラフ G 上の reversible である連続時間のランダムウォーク $\{S_t\}_{t\geq 0}$ 考える. このとき、

total conductance (又は weight) $\{\lambda_x\}_{x\in G}$ ([11] の定義を参照) と、local time

$$\tilde{K}(t,x) := \lambda_x^{-1}\int_0^t 1_{\{S_l=x\}}dl$$

その逆時間

$$\tilde{\tau}_t := \inf\{s : \tilde{K}(s,0) > t\}$$

を定める. また G の原点を適当に定める. $\{\phi(x)\}_{x\in G}$ を平均 0 で、covariace が $\mathrm{Cov}(\phi(x),\phi(y)) = E^x[\tilde{K}(\tilde{\tau}_0,y)]$ を満たす Gaussian free field を考える. $\mathbf{P}$ を Gaussian free field に対する確率測度、P を原点から出発するランダムウォークの確率測度とする.

Theorem 2.1 ([7] : The generalized second Ray-Knight theorem). $P\times\mathbf{P}$ の下での

$$\{\tilde{K}(\tilde{\tau}_t,x)+\frac{1}{2}\phi(x)^2\}_{x\in G}$$

の法則は、$\mathbf{P}$ の下での

$$\{\frac{1}{2}(\phi(x)+\sqrt{2t})^2\}_{x\in G}$$

の法則と等しい.

ここから直ぐに、次の Corollary が得られる.

Corollary 2.1 ([7]).

$$\{\frac{\tilde{K}(\tilde{\tau}_t,x)-t}{\sqrt{2t}}\}_{x\in G}\to\{\phi(x)\}_{x\in G}\quad (t\to\infty)\ \textit{in law}.$$

従って、これは local time $\tilde{K}(\tilde{\tau}_t,x)$ の中心極限定理が成立すること、さらには、中心極限定理の意味での $\tilde{K}(\tilde{\tau}_t,x)$ の収束先が対応する Gaussian free field になることを示している. さらに、[5, 6] では、Gaussian free field と cover time の強い関係性が示されている. ここで、一つの問題点を提案できる:

各時刻で Gaussian free field と local time の分布はどれ位近いのだろうか?

これを踏まえ、$\mathbb{Z}^2$ 又は $\mathbb{Z}_n^2(:=\mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z}^2)$ 上の離散時間の単純ランダムウォークの特異点と対応する Gaussian free field の特異点を調べることにした. ここでは、単純ランダムウォークの特異点の結果のみを紹介する. $\mathbb{Z}^2$ 上の単純ランダムウォークの性質を紹介するため、定義を与える. (ここから先は、$\mathbb{Z}^2$ 又は $\mathbb{Z}_n^2$ の単純ランダムウォークのみを扱う.) 初めに、$\{S_k\}_{k=0}^\infty$ を $\mathbb{Z}^2$(又は $\mathbb{Z}_n^2$) の単純ランダムウォークとする. さらに、$d(x,y)$ を $x,y\in\mathbb{Z}^2$ に対するユークリッド距離とする. また、$D(x,r) := \{y\in\mathbb{Z}^d : d(x,y)\le r\}$

とする．さらに、$K(n,x)$ を時刻 n までの x への訪問回数 (local time) とする．すなわち、$K(n,x)=\sum_{i=0}^{n} 1_{\{S_i=x\}}$ を満たす．また、$D\subset\mathbb{Z}^d$ に対して、$T_x:=\inf\{m\geq 1: S_m=x\}$、$\tau_n:=\inf\{m\geq 0: S_m\in D(0,n)^c\}$ とする．

次に $\mathbb{Z}^2$(又は $\mathbb{Z}_n^2$) の単純ランダムウォークの特異点に関する先行結果を紹介する．もともと四氏よって、 [1] では次が示されていた：$\mathbb{Z}^2$ 上の SRW に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max_{x\in\mathbb{Z}^2}K(\tau_n,x)}{(\log n)^2}=\frac{4}{\pi}\quad a.s.$$

これに基づき、$0<\alpha<1$ に対して、α-favorite points の集合を次のように定義する：

$$\Psi_n(\alpha):=\left\{x\in\mathbb{Z}^2: K(\tau_n,x)\geq\frac{4\alpha}{\pi}(\log n)^2\right\}.$$

さらに四氏よって、 [3] では次が示されていた：$\mathbb{Z}_n^2(:=\mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z}^2)$ 上の SRW に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max_{x\in\mathbb{Z}_n^2}T_x}{(n\log n)^2}=\frac{4}{\pi}.$$

これに基づき、$0<\alpha<1$ に対して、α-late points の集合を次のように定義する：

$$\mathcal{L}_n(\alpha):=\left\{x\in\mathbb{Z}_n^2:\frac{T_x}{(n\log n)^2}\geq\frac{4\alpha}{\pi}\right\}.$$

これを踏まえて、$0<\alpha<1$ に対して、favorite domain の集合を次のように定義する：

$$\mathcal{R}_{j,n}(\alpha):=\left\{(x_1,...,x_j)\in(\mathbb{Z}^2)^j:\sum_{i=1}^{j}K(\tau_n,x_i)\geq\frac{4\alpha j}{\pi}(\log n)^2\right\}.$$

3 主定理

$\Psi_n(\alpha)$, $\mathcal{L}_n(\alpha)$, $\mathcal{R}_{j,n}(\alpha)$ に対して、以下の定理が得られた．

Theorem 3.1 (O. 2015). $0<\alpha,\beta<1$, $j\in\mathbb{N}$ に対して確率収束の意味で次が成立する：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log|\{(x_1,...,x_j)\in\Psi_n(\alpha)^j: d(x_i,x_l)\leq n^\beta\ for\ any\ 1\leq i,l\leq j\}|}{\log n}=\rho_j(\alpha,\beta)$$

$$:=\begin{cases}2+2(j-1)\beta-\frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta\leq\frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha}))\\ 4j(1-\sqrt{\alpha})-2j(1-\sqrt{\alpha})^2/\beta & (\beta\geq\frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})).\end{cases}$$

Theorem 3.2 (O. 2015). $0<\alpha,\beta<1,\ j\in\mathbb{N}$ に対して次が成立する：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log E[|\{(x_1,...,x_j)\in\Psi_n(\alpha)^j : d(x_i,x_l)\le n^\beta \textit{ for any } 1\le i,l\le j\}|]}{\log n}=\hat{\rho}_j(\alpha,\beta)$$
$$:=\begin{cases}2+2(j-1)\beta-\frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta\le 1+\frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1})\\ 2(j+1-2\sqrt{j\alpha}) & (\beta\ge 1+\frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}).\end{cases}$$

さらに、$\Psi_n(\alpha)$ を $\mathcal{L}_n(\alpha)$ に変えたときも同様の評価が得られた.

Theorem 3.3 (0. 2016). $0<\alpha,\beta<1,\ j\in\mathbb{N}$ に対して、次が成立する：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log E[|\{(x_1,...,x_j)\in\mathcal{R}_{j,n}(\alpha) : d(x_i,x_l)\le n^\beta \textit{ for any } 1\le i,l\le j\}|]}{\log n}=\hat{\rho}_j(\alpha,\beta).$$

この補題として、超距離行列が $\Psi_n(\alpha)$, $\mathcal{L}_n(\alpha)$, $\mathcal{R}_{j,n}(\alpha)$ に関する評価と対応していることを示せれた.

4 証明

次が直ちに成立にすることに着目したい：

$$\begin{aligned}&E[|\{(x_1,...,x_j)\in\Psi_n(\alpha)^j : d(x_i,x_l)\le n^\beta \text{ for any } 1\le i,l\le j\}|]\\
=&\sum_{\substack{d(x_i,x_l)\le n^\beta,\\ x_i\in\mathbb{Z}_n^2, 1\le\forall i,l\le j}} P((x_1,...,x_j)\in\Psi_n(\alpha)^j)\\
&E[|\{(x_1,...,x_j)\in\mathcal{R}_{j,n}(\alpha) : d(x_i,x_l)\le n^\beta \text{ for any } 1\le i,l\le j\}|]\\
=&\sum_{\substack{d(x_i,x_l)\le n^\beta,\\ x_i\in\mathbb{Z}_n^2, 1\le\forall i,l\le j}} P((x_1,...,x_j)\in\mathcal{R}_{j,n}(\alpha)).\end{aligned}\tag{1}$$

従って、大雑把に言うと、$x_1,...,x_j\in D(0,n/3)$ に対して一様に次を示した：

$$\begin{aligned}P((x_1,...,x_j)\in\Psi_n(\alpha)^j)&\approx\exp\left(-2\alpha\log n\chi\left(\left(\frac{\pi G_n(x_i,x_l)}{2\log n}\right)_{1\le i,l\le j}\right)\right),\\
P((x_1,...,x_j)\in\mathcal{R}_{j,n}(\alpha))&\approx\exp\left(-2\alpha j\log n\lambda^{-1}\left(\left(\frac{\pi G_n(x_i,x_l)}{2\log n}\right)_{1\le i,l\le j}\right)\right).\end{aligned}\tag{2}$$

ただし、$a_n \approx b_n$ とは、$\log a_n / \log b_n \to 1$ as $n \to \infty$ を意味し、任意の正則行列に対して、$\chi(A)$ は A^{-1} の全ての成分の和とし、さらに $\lambda(A)$ を A の最大固有値とする．さらに、$\Psi_n(\alpha)$ を $\mathcal{L}_n(\alpha)$ に変えたときも同様の評価が得られた．

(2) を示すため、単純ランダムウォークの二つの small circle と large circle の crossing number を条件付けた上で、$D(0,n)$ 上の点である $x_1, ..., x_j$ が favorite point、late point あるいは favorite domain になる確率を評価した．(Figure 1 は、$j=5$ のときの例である．）この評価が単純ランダムウォーク

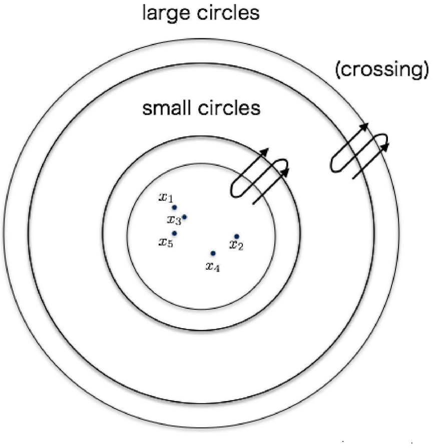

Figure 1:

の多点配置への到達確率と対応することを示した上で、さらに到達確率を評価することで (2) を得た．

次に (2) を評価した後の、(1) の右辺のさらなる評価の手法について紹介する．簡単な計算から、$n^{o(1)}$ の誤差で超距離空間に収束する $(x_1^{(n)}, ..., x_j^{(n)})$ に対して、(2) の右辺を足し合わせすると、(1) の右辺と一致することが得られる．ここで、$n^{o(1)}$ の誤差で超距離空間に収束する $(x_1^{(n)}, ..., x_j^{(n)})$ とは、次を満たすものである：任意の $i \neq l$, $l \neq p$, $i \neq p$ を満たす $1 \leq i, l, p \leq j$ に対して、

$$d(x_i^{(n)}, x_l^{(n)}) \leq \max\{d(x_l^{(n)}, x_p^{(n)}) n^{o(1)}, d(x_p^{(n)}, x_i^{(n)}) n^{o(1)}\}. \tag{3}$$

従って、$x_1^{(n)}, ..., x_j^{(n)}$ の点配置はある入れ子構造を持つものに対応する (Figure 2 は、$j=5$ のときの例である)．例えば、$j=3$ に対して、(1) を評価するためには、等距離配置（正三角形のような配置）と、ある 1 点のみが他の 2 点と十分離れた配置（二等辺三角形のような配置）である．$j=3$ に対して、等

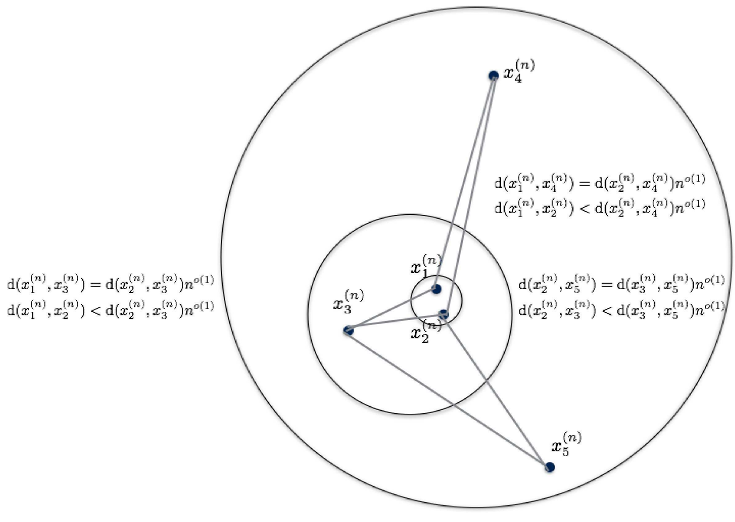

Figure 2:

距離配置 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ とは、次を満たす配置である：$n \to \infty$ のとき、

$$d(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \approx d(x_2^{(n)}, x_3^{(n)}) \approx d(x_3^{(n)}, x_1^{(n)}).$$

従ってこれに対応して、(2) の二つの式の右辺を評価するため、超距離行列を考える必要があった. 超距離行列は、これまで沢山の性質が知られていたが、超距離行列の逆行列の全ての成分和、あるいは最大固有値に関する新しい性質を解明することによって、主定理を得た.

References

[1] Dembo, A. , Peres, Y. , Rosen, J. and Zeitouni, O. (2001). Thick points for planar Brownian motion and the Erdős-Taylor conjecture on random walk. Acta Math., **186**, 239–270.

[2] Dembo, A. , Peres, Y., Rosen, J. and Zeitouni, O. (2004). Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions. Ann. Math., **160**, 433–464.

[3] Dembo, A. , Peres, Y. , Rosen, J. and Zeitouni, O. (2006). Late points for random walks in two dimensions. Ann. Probab., **34**, 219–263.

[4] Dembo, A. , Peres, Y. and Rosen, J. (2007). How large a disc is covered by a random walk in n steps? Ann. Probab., **35**, 577–601.

[5] Ding, J. (2014). Asymptotics of cover times via Gaussian free fields: Bounded-degree graphs and general trees. Ann. Probab., **42**, 464–496.

[6] Ding, J. , Lee, J. R. and Peres, Y. (2012). Cover times, blanket times, and majorizing measures. Ann. of Math., **175**, 1409–1471.

[7] Eisenbaum, N. , Kaspi, H. , Marcus, M. B. , Rosen, J. , and Shi, Z. (2000). A Ray-Knight theorem for symmetric Markov processes. Ann. Probab., **28**, 1781–1796.

[8] Erdős, P. and Taylor, S. J. (1960). Some problems concerning the structure of random walk paths. Acta Sci. Hung., **11**, 137–162.

[9] Erdős, P. and Révész, P. (1984). On the favourite points of a random walk. Mathematical Structures Computational Mathematics Mathematical Modelling, **2**, 152–157. Sofia.

[10] Erdős, P. and Révész, P. (1987). Problems and results on random walks. In: Mathematical Statistics and Probability (P. Bauer et al., eds.), Proceedings of the 6th Pannonian Symposium, Volume **B**, 59–65.

[11] Sznitman , A. S. (2012). Topics in Occupation Times and Gaussian Free Fields. . Lectures in Advanced Mathematics, EMS, Zurich.