数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 69-76

Dynamic universality for random matrices

河本陽介 (Yosuke Kawamoto)
九州大学数理学研究院 (Department of Mathematics, Kyushu University)
y-kawamoto@math.kyushu-u.ac.jp

長田博文 (Hirofumi Osada)
九州大学数理学研究院 (Department of Mathematics, Kyushu University)
osada@math.kyushu-u.ac.jp

1. イントロダクション

この原稿は、[6] の結果の予報 (announcement) である。

ランダム行列とは、典型的な場合、成分が独立なガウス分布であるエルミート行列であり、Gaussian Unitary Ensembles (GUE) と呼ばれる。その固有値の分布は、Vandermonde 行列式で表示される。その固有値を確率変数と思った場合、相関が非常に強くなり（長距離相互作用）、大数の法則および中心極限定理のレベル共に、古典的な結果とは著しく異なる現象が現れる。上述の GUE はいわば、ベルヌイ分布の対応物で、可解モデルとしてすべてを具体的に計算することにより、これらの現象が解明された。従って、古典理論の大数の法則や中心極限定理と同じく、今や、その普遍性が重要な問題となっている。

1.1. Gaussian Unitary Ensembles: まず、GUE の場合の古典的な結果を述べる. N 次元 GUE とは、$N\times N$ の Hermite 行列であって、各成分が（Hermite 性を除いて）独立同分布の Gaussian で与えられるものを言う。このとき、GUE の N 個のランダムな実固有値 $\mathbf{x}_N=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N$ が得られるが、その分布は次のように書ける：

$$\mu_{\mathrm{GUE}}^N(d\mathbf{x}_N)\propto\prod_{i<j}^N|x_i-x_j|^2\prod_{k=1}^N e^{-N|x_k|^2}d\mathbf{x}_N.$$

以下、各固有値を粒子とみなす。つまり、μ_{GUE}^N はランダムな N 個の粒子の配置を与えていると解釈する。

この粒子系の無限系を解析したい。まず、GUE の固有値の粒子数無限大の極限を考えたとき、そのマクロスケールでの対象物は、Wigner の半円則である。つまり、GUE の固有値の経験分布を、$\mathsf{x}^N=\sum_{1\le i\le N}\delta_{x_i}$ とすると、次の Wigner の半円収束が得られる：

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{GUE}}^N}[\frac{1}{N}\mathsf{x}^N((-\infty,s])]=\int_{-\infty}^{s}\rho_{\mathrm{sc}}(x)\,dx.$$

ここで、$\rho_{\mathrm{sc}}(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{2-x^2}\mathbf{1}_{\{|x|<\sqrt{2}\}}$ は Wigner の半円則と呼ばれる. 収束先である Wigner の半円則は確定的な確率測度であるので、この Wigner の半円収束は大数の法則とみなすことができる。

そこで、次にミクロスケールを考えるために、中心極限定理にあたるものを取る。つまり、粒子数無限大のときの揺動として、無限粒子系のランダムな配置を得たい。今回は、熱

力学極限としてバルクスケーリング極限をとる。θ を半円分布の内部、つまり $\theta \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ なるものとして固定し、次で与えられるバルクスケーリングをとる：

$$x \mapsto \frac{s}{N\rho_{\mathrm{sc}}(\theta)} + \theta.$$

θ はバルクスケーリング極限をとる位置を示している。さらに、$\mu^N_{\mathrm{GUE},\theta}$ をこのスケーリングのもとでの s に対する N 個の粒子の確率測度とする:

$$\mu^N_{\mathrm{GUE},\theta}(d\mathbf{s}^N) \propto \prod_{i<j}^N |s_i - s_j|^2 \prod_{k=1}^N \exp(-N\left(\frac{s}{N\rho_{\mathrm{sc}}(\theta)} + \theta\right)^2)\, d\mathbf{s}^N.$$

$\{\rho^{N,n}_{\mathrm{GUE},\theta}\}$ を $\mu^N_{\mathrm{GUE},\theta}$ の n 点相関関数とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\lim_{N\to\infty} \rho^{N,n}_{\mathrm{GUE},\theta} = \rho^n_{\sin} \text{ compact uniformly},$$

が得られる。ここで、極限の $\rho^n_{\sin}$ は

$$\rho^n_{\sin}(\mathbf{x}^n) = \det\left[\frac{\sin(x_i - x_j)}{x_i - x_j}\right]_{1\le i,j\le n}$$

で与えられる。$\rho^n_{\sin}$ は、無限粒子系の点過程である Sine 点過程 $\mu_{\sin}$ の n 点相関関数になっている。よって、相関関数のコンパクト一様収束性より、点過程の弱収束

$$\lim_{N\to\infty} \mu^N_{\mathrm{GUE},\theta} = \mu_{\sin} \text{ in law}$$

が得られる。ここで、$\mu^N_{\mathrm{GUE},\theta}$ は θ に依存する有限粒子だが、粒子数無限大の極限で得られる $\mu_{\sin}$ は θ に依らない点過程である。つまり、中心極限定理のレベルでは、バルクスケーリングを取る位置 θ に依らないという意味で、シフト θ に関する普遍性を示している。よってこの結果は、ランダム行列の普遍性の先駆けとみなすことができる。

1.2. ランダム行列の普遍性: 上記の結果を一般化した結果がランダム行列の普遍性である。ランダム行列の普遍性は、ランダム行列理論における中心的課題であり、T. Tao や H. -T. Yau を初めとして、これまで様々な設定の下で研究がなされてきた (詳しくは、例えば [2]、[14] やその参考文献を参照)。ここでは、その一例である対数ガスの普遍性を考える。

V を $\mathbb{R}$ 上実解析的かつ $\lim_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{\log|x|} = \infty$ を満たす関数とし、$\mathbb{R}^N$ の確率測度 $\mu^N_V(d\mathbf{x}^N)$ を考える。

$$\mu^N_V(d\mathbf{x}^N) \propto \prod_{i<j}^N |x_i - x_j|^2 \prod_{k=1}^N e^{-NV(x_k)}\, d\mathbf{x}^N. \tag{1}$$

V に対する平衡測度が存在するので ρ_V と表す。つまり、$\mathsf{x}^N = \sum_{1\le i\le N} \delta_{x_i}$ とおくと、次が成立する。

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{\mu^N_V}[\frac{1}{N}\mathsf{x}^N((-\infty, s])] = \int_{-\infty}^s \rho_V(x)\, dx. \tag{2}$$

特に、$V=x^2$ のとき、μ_V^N は N 次 GUE の固有値の法則を与え、このときの ρ_V は Wigner の半円則 ρ_{sc} に他ならない。

ρ_V は決定論的な測度であることから、(2) は大数の法則とみなすことができる。更に大数の法則の次のオーダー、つまり中心極限定理にあたるものを考え、ランダムな無限粒子の配置を与える。$\rho_V(\theta)>0$ なる $\theta\in\mathbb{R}$ を固定し、スケーリング $x\mapsto s$ を、$x=\frac{s}{N\rho_V(\theta)}+\theta$ とし、s に対する確率測度を $\mu_{V,\theta}^N$ とすると、

$$\mu_{V,\theta}^N(d\mathbf{s}^N)\propto\prod_{i<j}^N|s_i-s_j|^2\prod_{k=1}^N\exp(-NV(\frac{s}{N\rho_V(\theta)}+\theta))\,d\mathbf{s}^N. \tag{3}$$

$\rho_{V,\theta}^{N,n}$ を $\mu_{V,\theta}^N$ の n 点相関関数とすると、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、局所一様収束が成立する [3]：

$$\lim_{N\to\infty}\rho_{V,\theta}^{N,n}=\rho_{\sin}^n \text{ compact uniformly}, \tag{4}$$

ここで、$\rho_{\sin}^n(\mathbf{x}^n)$ は次式で与えられる Sine 点過程 $\mu_{\sin}$ の n 点相関関数である。

$$\rho_{\sin}^n(\mathbf{x}^n)=\det\Big[\frac{\sin(x_i-x_j)}{x_i-x_j}\Big]_{1\le i,j\le n}$$

つまり、$\mu_{V,\theta}^N$ は粒子数無限大での極限で Sine 点過程に弱収束する。特に、極限 $\mu_{\sin}$ は V や θ に依らない普遍的な点過程であり、これは、バルク極限におけるランダム行列理論の普遍性の一例である。

1.3. 力学的普遍性: 前節の結果は点過程レベルの普遍性である。次にこの結果の力学的対応物を考えたい。そこで、$\mu_{V,\theta}^N$ に対し、$L^2(S^N,\mu_{V,\theta}^N)$ 上で次の Dirichlet 形式を考える。

$$\mathcal{E}^N(f,g)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^N\nabla_i f\cdot\nabla_i g\,d\mu_{V,\theta}^N.$$

この Dirichlet 形式を部分積分することにより得られる生成作用素に対応する N 次元 SDE を書き下すと、次のものになる：

$$dX_t^{N,i}=dB^i+\sum_{1\le j\ne i\le N}\frac{1}{X_t^{N,i}-X_t^{N,j}}dt-\frac{1}{2\rho_V(\theta)}V'(\frac{X_t^{N,i}}{N\rho_V(\theta)}+\theta)dt,\quad 1\le i\le N. \tag{5}$$

この N 粒子系の確率力学に対して、粒子数無限大の極限を取って得られる無限粒子系の確率力学を導きたい。形式的には、N 無限大での極限で得られる無限次元 SDE（ISDE）は、以下の (6) である。

$$dX_t^i=dB^i+\sum_{1\le j\ne i\le\infty}\frac{1}{X_t^{N,i}-X_t^{N,j}}dt-\frac{1}{2\rho_V(\theta)}V'(\theta)dt,\quad i\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

しかし実際に得られる ISDE は無限次元 Dyson モデル (7) であると予想される。

$$dX_t^i=dB^i+\lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^i-X_t^j|<r}\frac{1}{X_t^i-X_t^j}dt,\quad i\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

実際、(7) は $\mu_{\sin}$ に付随する Dirichlet 形式 (distorted ブラウン運動) に対応する確率力学だからである。つまり、N 粒子系の形式的な極限と実際の極限は、一般には一致しない。

この現象の背景は、点過程レベルの普遍性 (4) であり、極限の ISDE(7) も V や θ には依存しない、普遍的な力学的対象物である。

まとめると、有限粒子系の点過程の無限系の点過程への収束が、それぞれに付随する確率力学の収束も伴うと期待される。特に、点過程の普遍性は、対応する確率力学の普遍性を導く、つまり、幾何的普遍性の力学的普遍性への伝播が成立すると予想する。以下、極限の無限次元 SDE の解の一意性が満たされる条件の下では、この予想が正しいことを示す。つまり、一般に点過程の良い収束（**幾何的強普遍性**）が確率力学の収束（**力学的普遍性**）を保証するということを示す。

2. 設定と主結果

以下、一般的枠組みを設定し、主結果を述べる。拡散過程の存在等に関する設定については詳しく述べない。ここでは、確率力学の収束に必要な、２つの本質的な条件を明示する。ひとつは、点過程の強収束条件である（後述の **(A1)** または **(A1')**)。もうひとつは、無限粒子系の拡散過程に付随する Dirichlet 形式の一意性である（後述の **(A2)**)。

2.1. 点過程の有限粒子系近似: $S=\mathbb{R}^d$ と置き、S を S の配置空間とする。S 上の確率測度 μ を点過程という。点過程の列 $\{\mu^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ が次を満たすとする。

$$\lim_{N\to\infty}\mu^N=\mu \text{ in law},\quad \mu^N(\mathsf{s}(S)=N)=1 \tag{8}$$

以下、μ^N や μ については、対応した確率力学が存在するということを仮定する。つまり対応する Dirichlet 形式の可閉性や準正則性を仮定する。さらに、対数微分の存在と粒子の非衝突かつ非爆発を仮定する [11]。本質的なのは、次の **(A1)** と後述の **(A2)** の条件である。

$S_r=\{x\in S\,;\,|x|<r\}$ に対し、$m_{r,n}$ と $m_{r,n}^N$ をそれぞれ μ と μ^N の S_r の Lebesgue 測度に対する n 点密度関数とする。これらは連続関数であると仮定する。今、点過程の弱収束は、(8) ですでに仮定しているが、さらに、弱収束より強い、次の条件を仮定する：

(A1) $\lim_{N\to\infty}||\frac{m_{r,n}^N}{m_{r,n}}-1||_{S_r^n}=0$ for any $r,n\in\mathbb{N}$.

尚、$\|\cdot\|_A$ は集合 A 上の L^∞ ノルムを表す。また、**(A1)** の代わりに次の **(A1')** を仮定しても良い。具体的な状況では、**(A1)** より示しやすい **(A1')** を確かめればよい。

(A1') 任意の $n,r\in\mathbb{N}$ に対し、$\mathrm{Cap}^{\mu}(\{\mathsf{s};m_{r,n}(\mathsf{s})=0\})=0$ かつ、

$$\lim_{N\to\infty}||m_{r,n}^N-m_{r,n}||_{S_r^n}=0. \tag{9}$$

ここで $m_{r,n}$ を自然に配置空間の関数とみなしている。また、Cap^{μ} は次節で定義する無限粒子系の Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ に関する容量である。

注意： (1) **(A1')** の前半の容量に関する仮定は、具体的な場合には容易に確かめることができるので、ここでは本質的な条件ではない。

(2) **(A1')** の中で重要な条件は、密度の強収束条件 (9) である。ランダム行列の普遍性については、密度の弱収束のレベルでは様々な結果が知られている。しかし、有限次元の場合でも、密度の弱収束だけでは一般には Mosco 収束は成り立たない。Mosco 収束を示すためには、弱

収束よりも強い収束が本質的に必要となる。よって、(9) のようにコンパクト一様収束を課すことは技術的な要請というより、自然な条件である。
(3) 相関関数のコンパクト一様収束があれば、(9) が言える。故に、例えば (4) から (9) を確かめられる。相関関数のコンパクト一様収束の例は、[1, 3, 4, 13] を参照。

2.2. Dirichlet 形式の 2 種類の近似: 最後の条件を述べるため、μ の自然な Dirichlet 形式に付随する、2 種類の近似（領域近似）を導入する。$\mathcal{D}_\circ$ を local かつ smooth な $f:\mathsf{S}\to\mathbb{R}$ 全体とする。$f,g\in\mathcal{D}_\circ$ に対して、2 次場 $\mathbb{D}$ と $\mathbb{D}_r^m$ を次で与える。

$$\mathbb{D}[f,g](\mathsf{s})=\frac{1}{2}\sum_i\nabla_{s_i}\check{f}(\mathsf{s})\cdot\nabla_{s_i}\check{g}(\mathsf{s}),$$
$$\mathbb{D}_r^m[f,g](\mathsf{s})=\mathbb{D}[f,g](\mathsf{s})\quad(\mathsf{s}\in\mathsf{S}_r^m),\quad \mathbb{D}_r^m[f,g](\mathsf{s})=0\quad(\mathsf{s}\notin\mathsf{S}_r^m).$$

ここで $\mathsf{s}=\sum_i\delta_{s_i}$, $\mathbf{s}=(s_i)$, $\check{f}$ は $\check{f}(\mathbf{s})=f(\mathsf{s})$ をみたす対称関数で、$\mathsf{S}_r^m=\{\mathsf{s}\in\mathsf{S}\,;\,\mathsf{s}(S_r)=m\}$ である。

$\mathcal{D}_\circ^\mu=\{f\in\mathcal{D}_\circ\cap L^2(\mu)\,;\,\mathcal{E}(f,f)<\infty\}$ とおき、$L^2(\mu)$ 上の双線形形式 $(\mathcal{E},\mathcal{D}_\circ^\mu)$ と $(\mathcal{E}_r^m,\mathcal{D}_\circ^\mu)$ を次で与える。

$$\mathcal{E}(f,g)=\int_{\mathsf{S}}\mathbb{D}[f,g](\mathsf{s})d\mu,\quad \mathcal{E}_r^m(f,g):=\int_{\mathsf{S}}\mathbb{D}_r^m[f,g](\mathsf{s})d\mu. \tag{10}$$

今課している μ に対する適切な仮定の下では、任意の $m,r\in\mathbb{N}$ に対し、$(\mathcal{E}_r^m,\mathcal{D}_\circ^\mu)$ は $L^2(\mu)$ 上可閉となる。よって、以下で行っている閉包を取る操作は保証されている。

$\mathcal{E}_r=\sum_{i=1}^\infty\mathcal{E}_r^i$ とおく。$S_r=\{s\in S\,;\,|s|<r\}$ に対し

$$\mathcal{B}_r^b=\{f\,;\,f\text{ は有界で、かつ }f\text{ の値は }S_r\text{ 内の粒子の配置のみに依る}\}$$

と定義する。そして、$(\underline{\mathcal{E}}_r,\underline{\mathcal{D}}_r)$ を $(\mathcal{E},\mathcal{D}_\circ^\mu\cap\mathcal{B}_r^b)$ の $L^2(\mu)$ 上の閉包とする。また、$(\mathcal{E}_r,\mathcal{D}_r)$ を $(\mathcal{E}_r,\mathcal{D}_\circ^\mu)$ の $L^2(\mu)$ 上の閉包とする。すると、$\{(\underline{\mathcal{E}}_r,\underline{\mathcal{D}}_r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ は Dirichlet 形式として単調増大、$\{(\mathcal{E}_r,\mathcal{D}_r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ は単調減少になる。よって、$\{(\underline{\mathcal{E}}_r,\underline{\mathcal{D}}_r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ と $\{(\mathcal{E}_r,\mathcal{D}_r)\}_{r\in\mathbb{N}}$ の $r\to\infty$ での極限が存在し、その極限をそれぞれ $(\underline{\mathcal{E}},\underline{\mathcal{D}})$ と $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ と書く。各 r で $(\underline{\mathcal{E}}_r,\underline{\mathcal{D}}_r)\le(\mathcal{E}_r,\mathcal{D}_r)$ だから、極限でも $(\underline{\mathcal{E}},\underline{\mathcal{D}})\le(\mathcal{E},\mathcal{D})$。そこで、この 2 つの Dirichlet 形式の一致を仮定する。

(A2) $(\underline{\mathcal{E}},\underline{\mathcal{D}})=(\mathcal{E},\mathcal{D})$.

注意: $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ に付随する無限次元 SDE の解の一意性が満たされるならば、**(A2)** は成立する [12]。解の一意性は、μ の末尾事象の自明性から従う [11]。さらに、行列式点過程は、常に末尾事象が自明になる [9]。

2.3. 主結果: $(\mathcal{E}^N,\mathcal{D}^N)$ を $(\mathcal{E}^N,\mathcal{D}_\circ^{\mu^N})$ の $L^2(\mu^N)$ での閉包とする。X^N を $(\mathcal{E}^N,\mathcal{D}^N,L^2(\mu^N))$ に、X を $(\mathcal{E},\mathcal{D},L^2(\mu))$ にそれぞれ付随する S 値拡散過程とする。この時、桑江-塩谷型の Mosco 収束が成立し SDE の解の収束が従う。

定理 1 ([6]). 適切な条件の下、**(A1)**（もしくは **(A1')**）と **(A2)** を仮定する。このとき、

$$\lim_{N\to\infty}(\mathcal{E}^N,\mathcal{D}^N,L^2(\mu^N))=(\mathcal{E},\mathcal{D},L^2(\mu))\text{ in Mosco in the sense of 桑江-塩谷 [7].}$$

特に、初期条件が平衡状態（ $\mathsf{X}_0^N \overset{d}{=} \mu^N$ かつ $\mathsf{X}_0 \overset{d}{=} \mu$）とすると、

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{X}^N = \mathsf{X} \text{ in distribution in } C([0,\infty),\mathsf{S}). \tag{11}$$

定理 1 は配置空間値拡散過程の収束である。更に、配置空間値拡散過程の各粒子に適切なラベルを付けることにより、確率微分方程式の収束を導くことができる。

定理 2 ([6]). 定理 1 と同様の仮定を置く。更に、ラベル ℓ^N と ℓ に対して $\ell^N(\mathsf{X}_0^N)$ の分布が $\ell(\mathsf{X}_0)$ 分布に収束する時（任意の最初の m 粒子の意味で）

$$\lim_{N\to\infty} (X^{N,i})_{i=1}^m = (X^i)_{i=1}^m \text{ in distribution in } C([0,\infty);(\mathbb{R}^d)^m). \tag{12}$$

3. 力学的普遍性の例

3.1. バルク極限の力学的普遍性: 1 章で述べたバルク極限の力学的普遍性は、定理 2 を用いて証明することができる。$\beta = 1,2,4$ として、$\mu_{V,\theta}^N$ と $\mu_{\sin}$ を考える。このとき、**(A1')** のコンパクト一様収束条件が広い範囲で満たされることが、[3] と [4] で示されている。$\mu_{\sin}$ に対応する ISDE(7) の可逆解の一意性が $\beta = 1,2,4$ [11, 15]、また、（可逆かどうかはわからないが一意的非平衡解が）$\beta \geq 1$ について [15] で得られている。よって、**(A2)** が成立する。特に次の力学的普遍性が成立する。

定理 3 (バルク極限 [6]). $\mu_{V,\theta}^N$ を (3) で与えられたものとする。V は実解析的かつ $\lim_{|x|\to\infty} \frac{V(x)}{\log|x|} = \infty$ を満たすとする。このとき、**(A1')** と **(A2)** が満たされる。特に、(5) と (7) の SDE の解に対して定理 2 の結論が成立する。但し、$\beta = 1,4$ の場合は、(3), (5), (7) は適宜修正する。

特に、$\beta = 2$, $V(x) = x^2$ とすると、次の系が得られる

系 4. 以下の SDE に対して、定理 2 の結論が成立する。

$$dX_t^{N,i} = dB_t^{N,i} + \sum_{1\leq j\neq i\leq N} \frac{1}{X_t^{N,i} - X_t^{N,j}} dt - \frac{1}{N\rho_{\mathrm{sc}}(\theta)^2} X_t^{N,i} dt - \frac{\theta}{\rho_{\mathrm{sc}}(\theta)} dt,$$
$$dX_t^i = dB^i + \lim_{r\to\infty} \sum_{|X_t^i - X_t^j|<r} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} dt.$$

特に、極限の ISDE は θ に依らない.

この確率力学は、相互作用が対数ポテンシャル（長距離相互作用）で与えられているため、その収束は極めて非自明である。実際、(7) のドリフト項の級数は絶対収束しない。故に、ドリフト項を計算することによって SDE の収束を導出するためには、精密な計算を必要とする。系 4 の結果自体は、対数微分（ドリフト項）を具体的に計算する方法によって [5] でも得られているが、今回の方法ではドリフト項を計算することなく、点過程の収束のみから力学的収束を導くことができる。

3.2. ソフトエッジ極限の力学的普遍性: これまではスケーリング極限としてバルク極限を扱ったが、バルク極限以外にもスケーリング極限の取り方は存在する。最大固有値を中心に

スケーリング極限を取ったのがソフトエッジ極限である。この場合、普遍的な幾何的対象物はAiｒｙ点過程である。(1) を $V(x) = \sum_{i=0}^{2l} \kappa_i x^i$ ($\kappa_{2l} > 0$) で与え、次で与えられるソフトエッジスケーリングをとる：

$$x \mapsto N^{-\frac{1}{2l}}(c_N(1+\frac{s}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}})+d_N)$$

このとき、$\mu_{V,\mathrm{Ai}}^N$ をこのスケーリングのもとでの s に対する確率測度とする:

$$\mu_{V,\mathrm{Ai}}^N(d\mathbf{s}^N) \propto \prod_{i<j}^N |s_i - s_j|^2 \prod_{k=1}^N \exp(-NV(N^{-\frac{1}{2l}}(c_N(1+\frac{s_k}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}})+d_N)))\, d\mathbf{s}^N. \tag{13}$$

ここで、c_N, α_N, d_N は [4] で与えられている N に依る定数である。このとき、$\mu_{V,\mathrm{Ai}}^N$ は N 無限大の極限で Airy 点過程 μ_{Ai} に収束し、かつ **(A1')** を満たす [4]。**(A2)** を満たすことは知られている [10, 11, 9]。よって、定理 2 の仮定をすべて満たすことが分かる。

定理 5 (ソフトエッジ極限 [6]). 以上の仮定の下で、平衡状態を初期条件とした次の SDE を考える。このとき、定理 2 の結論が成立する。

$$dX_t^{N,i} = dB^i + \sum_{1\le j\ne i\le N} \frac{1}{X_t^{N,i}-X_t^{N,j}}dt - \frac{N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2l}}c_N}{2\alpha_N}V'(N^{-\frac{1}{2l}}(c_N(1+\frac{X_t^{N,i}}{\alpha_N N^{\frac{2}{3}}})+d_N))dt,$$

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{s\to\infty}\{\sum_{|X_t^j|<s, j\ne i} \frac{1}{X_t^i - X_t^j} - \int_{|x|<s} \frac{\hat{\rho}(x)}{-x}dx\}dt.$$

References

[1] Akemann,G., Cikovic,M., Venker, V., *Universality at weak and strong non-Hermiticity beyond the elliptic Ginibre ensemble*, arXiv:1610.06517 [math.PR]

[2] Bourgade, P., Erdös, L., and Yau, H.-T., *Universality of general β-ensembles*, Duke Math. J. **163**, (2014), 1127-1190.

[3] Deift, P., Kriecherbauer, T., McLaughlin, K. T.-R., Venakides, S., Zhou, X., *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory*, Comm. Pure Appl. Math., **52**, (1999), 1335-1425.

[4] Deift, P., Gioev, D., *Universality at the edge of the spectrum for unitary, orthogonal, and symplectic ensembles of random matrices*, Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), 867-910.

[5] Kawamoto, Y., Osada, H., *Dynamical Bulk Scaling limit of Gaussian Unitary Ensembles and Stochastic-Differential-Equation gaps*, arXiv:1610.05969.

[6] Kawamoto, Y., Osada, H., *Dynamical universality for random matrices*, (in preparation)

[7] Kuwae, K., Shioya, T., *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Comm. Anal. Geom. **11**, (2003), no. 4, 599673.

[8] Osada, H., *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions*, Comm. Math. Phys. **176**, (1996), 117-131.

[9] Osada, H., Osada, S., *Discrete approximations of determinantal point processes on continuous spaces: tree representations and the tail triviality*, (preprint)

[10] Osada, H., Tanemura, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations arising from Airy random point fields*, (preprint/draft)

[11] Osada, H., Tanemura, H., *Strong solutions of infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ-fields*, (preprint/draft)

[12] Osada, H., Tanemura, H., *Uniqueness of quasi-regular Dirichlet forms related to interacting Brownian motions*, (in preparation)

[13] Shcherbina, M., *Edge universality for orthogonal ensembles of random matrices*, Journal of Statistical Physics **136** 35-50

[14] Tao, T., Vu, V., *Random matrices: universality of local eigenvalue statistics*, Acta Math., **206**(1) (2011),127–204.

[15] Tsai, Li-Cheng *Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson's model*, Probab. Theory Relat. Fields (published on line) DOI 10.1007/s00440-015-0672-2 (2015)