数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 99-104

レヴィ過程に対する田中の公式

大阪市立大学大学院理学研究科 塚田 大史
Hiroshi Tsukada
Graduate School of Science,
Osaka City University

概要

本稿では，[4] において得られた結果について紹介する．1 次元のブラウン運動に対する田中の公式はよく知られており，局所時間や反射壁過程を理解するために役立っている．ここでは局所時間に注目し，田中の公式を局所時間のドゥーブ–メイエー分解として考える．指数 $1<\alpha<2$ の対称な安定過程に対しては Yamada [5]，局所時間をもつ対称なレヴィ過程に対しては Salminen–Yor [2] によって研究されている．本稿では，[2] によるポテンシャル論の手法を用いて，非対称な過程を含むレヴィ過程に対して田中の公式を構成する．

1 準備

$X=(X_t)_{t\geq 0}$ を実数値レヴィ過程とする．このとき，X のレヴィ指数は

$$\begin{aligned}\eta(u) &= \log \mathbb{E}_0[e^{iuX_1}] \\ &= ibu - \frac{1}{2}au^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{iuy} - 1 - iuy1_{|y|\leq 1}\right)\nu(dy)\end{aligned}$$

と表される．ただし，$b\in\mathbb{R}, a\geq 0$ であり，$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上のレヴィ測度 ν は $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(|y|^2\wedge 1)\nu(dy)<\infty$ を満たす．

有界可測関数 f に対し，X のレゾルベントを

$$R_qf(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-qt}f(X_t)dt\right], \quad q>0,\, x\in\mathbb{R}$$

とする．またレゾルベント密度が存在するとき，

$$R_qf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)r_q(y-x)dy, \quad q>0,\, x\in\mathbb{R}$$

とする．X が初めて原点に到達する時刻を

$$T_0 := \inf\{t>0 : X_t = 0\}$$

とする.

ここで次の条件を導入する：

(A1) X のレヴィ指数 $\eta(u)$ が次の条件を満たす：

$$\int_{\mathbb{R}} \Re\left(\frac{1}{q-\eta(u)}\right) du < \infty, \quad q > 0.$$

(A2) X について 0 は正則である. すなわち, $\mathbb{P}_0(T_0 = 0) = 1$ が成り立つ.

条件 **(A1)** は有界なレゾルベント密度の存在に対する必要十分条件であり, また条件 **(A1)** の下, 条件 **(A2)** はレゾルベント密度の連続性に対する必要十分条件であることが知られている.

さらに, 条件 **(A1)**, **(A2)** より強い次の条件を導入する：

(A) X のレヴィ指数 $\eta(u)$ が次の条件を満たす：

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{q-\eta(u)}\right| du < \infty, \quad q > 0.$$

このとき, 次のことがいえる.

補題 1.1. 条件 *(A)* の下, 連続なレゾルベント密度は

$$r_q(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\left(\frac{e^{-iux}}{q-\eta(u)}\right) du, \quad q > 0,\, x \in \mathbb{R},$$

で与えられる.

注意 1.2. 条件 **(A1)**, **(A2)** を満たすが, 条件 **(A)** を満たさないレヴィ過程の例として非対称なコーシー過程がある. 非対称なコーシー過程のレヴィ指数は

$$\eta(u) = -c|u|(1 + 2i\beta\pi^{-1}\mathrm{sgn}(u)\log|u|) + ib_0 u$$

と表される. ただし $c > 0, \beta \in [-1,1] \setminus \{0\}, b_0 \in \mathbb{R}$ である. このとき, 連続なレゾルベント密度は

$$r_q(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\left(\frac{\cos(ux)}{q-\eta(u)}\right) du + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^N \Im\left(\frac{\sin(ux)}{q-\eta(u)}\right) du,$$

で与えられることが知られている (Takada [3]).

2 修正 0 レゾルベント

まず,

$$h_q(x) := r_q(0) - r_q(-x), \quad q > 0,\, x \in \mathbb{R}$$

と定義する．このとき，任意の $q>0$ に対し，$h_q \geq 0$ である．もし極限 $h := \lim_{q\downarrow 0} h_q$ が存在するとき，h を修正 0 レゾルベントと呼ぶ．

対称な場合，条件 **(A)** の下，修正 0 レゾルベントが存在することが知られている．非対称な場合は，次の条件 **(L1)**–**(L3)** の下，修正 0 レゾルベントが存在することが知られている（Yano [6]）．

(L1) X のレヴィ指数 $\eta(u)$ が次の条件を満たす：

$$\int_0^\infty \frac{1}{q-\Re\eta(u)}du<\infty, \quad q>0,$$

(L2) X は C 型である．すなわち，$a>0$ または $\int_{|y|\leq 1}|y|\nu(dy)=\infty$ である．

(L3) レヴィ指数 $\eta(u)$ の実部 $\Re\eta(u)$ と虚部 $\Im\eta(u)$ が $(0,\infty)$ 上に以下を満たすような可測な導関数をもつ：

$$\int_0^\infty (u^2\wedge 1)\frac{|\{\Re\eta(u)\}'|+|\{\Im\eta(u)\}'|}{\Re\eta(u)^2+\Im\eta(u)^2}du<\infty.$$

ここで，条件 **(L1)**–**(L3)** を弱めた条件 **(A)**, **(B)** を仮定する．

(B) X のレヴィ指数 $\eta(u)$ が次の条件を満たす：

$$\int_0^1 \left|\Im\left(\frac{u}{\eta(u)}\right)\right|du<\infty.$$

命題 2.1. 条件 ***(L1)–(L3)*** が成り立つとき，条件 ***(A)***, ***(B)*** が成り立つ．

このとき，修正 0 レゾルベントが存在する．

定理 2.2. 条件 ***(A)***, ***(B)*** の下，

$$h(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\left(\frac{e^{iux}-1}{\eta(u)}\right)du, \quad x\in\mathbb{R}.$$

が成り立つ．

証明は次の補題を用いる．

補題 2.3. 条件 ***(A)*** の下，

$$\int_0^\infty \frac{|u|^2\wedge 1}{|\eta(u)|}du<\infty.$$

が成り立つ．

3 田中の公式

条件 (**A1**), (**A2**) の下，レゾルベント密度と局所時間との関係が知られている (Bertoin [1, Lemma V.3]) :

$$\mathbb{E}_y\left[\int_0^\infty e^{-qt}dL_t^x\right] = r_q(x-y), \quad q>0,\, x,y\in\mathbb{R}.$$

このとき，次のドゥーブ–メイエー分解が得られる．

命題 3.1. 条件 *(A1), (A2)* の下，任意の $q>0$, $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$ に対し，

$$r_q(-X_t+x) = r_q(-X_0+x) + M_t^{q,x} + q\int_0^t r_q(-X_s+x)ds - L_t^x,$$

が成り立つ．ただし，$M_t^{q,x}$ はマルチンゲールである．

上の命題において $q\downarrow 0$ とすれば，次の補題と修正 0 レゾルベントから田中の公式を構成できる．

補題 3.2. 条件 *(A)* の下，

$$\lim_{q\downarrow 0} q\, r_q(0) = 0,$$

が成り立つ．

定理 3.3. X が条件 *(A), (B)* を満たすとする．このとき， 任意の $t\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$ に対し，

$$h(X_t-x) - h(X_0-x) = M_t^x + L_t^x,$$

が成り立つ．ただし，$M_t^x := -\lim_{q\downarrow 0} M_t^{q,x}$ はマルチンゲールである．

4 例

最後に，条件 (**A**), (**B**) を満たすレヴィ過程の例を挙げる．

例 4.1. 指数 $1<\alpha<2$ の狭義安定過程の場合，レヴィ測度が

$$\nu(dy) = c_+|y|^{-\alpha-1}1_{\{y>0\}}dy + c_-|y|^{-\alpha-1}1_{\{y<0\}}dy,$$

で与えられ，レヴィ指数が

$$\eta(u) = -d|u|^\alpha\left(1-i\beta\,\mathrm{sgn}(u)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

と表せる．ここで，c_+, c_- は $c_+ + c_- \neq 0$ を満たす非負の定数で，$d > 0, \beta \in [-1,1]$ は

$$d = \frac{c_+ + c_-}{2c(\alpha)}, \qquad \beta = \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-}$$

で与えられる．ただし，

$$c(\alpha) = \frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$$

である．このとき，条件 **(A)**, **(B)** を満たす．さらに修正 0 レゾルベントは

$$h(x) = c(-\alpha)\frac{1-\beta \mathrm{sgn}(x)}{d\left(1+\beta^2\tan^2(\pi\alpha/2)\right)}|x|^{\alpha-1}$$

で与えられる．

例 4.2. 指数 $1 < \alpha < 2$ の切断安定過程の場合，レヴィ測度が

$$\nu(dy) = c_+|y|^{-\alpha-1}1_{\{1>y>0\}}dy + c_-|y|^{-\alpha-1}1_{\{-1<y<0\}}dy,$$

で与えられる．ここで，c_+, c_- は $c_+ + c_- \neq 0$ を満たす非負の定数である．このとき，条件 **(A)**, **(B)** を満たす．

例 4.3. ドリフトをもつブラウン運動の場合，レヴィ指数が

$$\eta(u) = ibu - \frac{1}{2}au^2$$

で与えられる．ここで，$a > 0, b \neq 0$ である．このとき，条件 **(A)**, **(B)** を満たす．さらに修正 0 レゾルベントは

$$h(x) = \frac{1}{|b|}\left(1 - e^{-2|bx|/a}\right)1_{\{bx\geq 0\}}$$

で与えられる．

参考文献

[1] J. Bertoin, Lévy processes. Cambridge Tracts in Mathematics, 121, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] P. Salminen and M. Yor, *Tanaka formula for symmetric Lévy processes*, Séminaire de Probabilités XL, Lecture Notes in Math., 1899, Springer, Berlin, (2007), pp. 265–285.

[3] T. Takada, *On potential densities of one-dimensional Lévy processes*, J. Math. Kyoto U. 14.2 (1974), pp. 371–390.

[4] H. Tsukada, *A potential theoretic approach to Tanaka formula for asymmetric Lévy processes*, arXiv preprint arXiv:1609.00082 (2016).

[5] K. Yamada, *Fractional derivatives of local times of α-stable Levy processes as the limits of occupation time problems*, Limit theorems in probability and statistics, Vol. II (Balatonlelle, 1999), János Bolyai Math. Soc., Budapest, (2002), pp. 553–573.

[6] K. Yano, *On harmonic function for the killed process upon hitting zero of asymmetric Lévy processes*, J. Math-for-Ind. 5A (2013), pp. 17–24.