数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 105-107

分割の可乗測度と可換代数

統計数理研究所 間野 修平*1
Shuhei Mano
The Institute of Statistical Mathematics

サイズ n の標本のクラスタリングを考える．交換可能であれば，クラスタのサイズのみに注目し，n を和とする正の整数の集合の上の確率法則を考えれば十分であるが，それを確率分割とよぶ．サイズ i のクラスタに w_i の重みを割り当てると，クラスタ数 k の条件の下でクラスタリングの総数は偏 Bell 多項式で与えられ，

$$B_{n,k}(w) := n! \sum_{s \in \mathcal{S}_{n,k}} \frac{x^s}{s!}, \qquad x^s := \prod_{i=1}^{n} x_i^{s_i}, \qquad s! := \prod_{i=1}^{n} s_i!, \qquad x_i := \frac{w_i}{i!}$$

である．s_i はサイズが i のクラスタの数で，台は

$$\mathcal{S}_{n,k} := \left\{ (s_1, ..., s_n); \sum_{i=1}^{n} i s_i = n, \sum_{i=1}^{n} s_i = k \right\}. \tag{1}$$

である．自然な確率モデルとして

$$\mathbb{P}(S = s) = v_{n,k} n! \frac{x^s}{s!}, \qquad s \in \mathcal{S}_{n,k} \tag{2}$$

を考える．これは，A. M. Vershik (1996) が統計力学の文脈において議論し，分割の可乗測度 (multiplicative measure) とよんだものである．確率過程との関わりについては Pitman (2006) に詳しい．交換可能な分割の確率函数は Bayes 統計にも関わりが深く，事前過程からの標本分布を与える (総説は，例えば，Lijoi & Prünster, 2010).

例 1. 2 母数 Poisson-Dirichlet 分布 (Pitman & Yor, 1997) からの標本分布である Pitman 確率分割は

$$w_i = (1-\alpha)_{i-1}, \qquad v_k = \theta(\theta+\alpha)\cdots(\theta+(k-1)\alpha), \qquad i, k \in \mathbb{N}$$

とするものである．ただし，$v_{n,k} = v_k / \sum_{k=1}^{n} v_k B_{n,k}(w)$ とした．

本稿では可乗測度の統計的側面の可換代数を用いた解析について紹介する．詳細は Mano (2016) にあり，代数的背景については Saito et al. (2010) に詳しい．I. M. Gel'fand ら (1989) により導入された A 超幾何函数は整数成分の $d \times m$ 行列 A と $b \in \mathbb{C}^d$ について消去作用素

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \partial_j - b_i, \qquad i = 1, 2, ..., d, \qquad \partial^u - \partial^v, \qquad u - v \in \ker A \cap \mathbb{Z}^m$$

*1 smano@ism.ac.jp

がなす左 ideal として定義される．ここで，$\partial^u - \partial^v$ は A の toric ideal を生成する．そのひとつの解は A 超幾何多項式

$$Z_A(b;x) := \sum_{\{s; As=b, s\in\mathbb{N}^m\}} \frac{x^s}{s!}$$

である．偏 Bell 多項式は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-k \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} \tag{3}$$

とした A 超幾何多項式に他ならない．A が $d=2$ の同次行列は扱いが容易であり，initial ideal の標準単項式 $\{1, \theta_i; i = 3, ..., n-k+1\}$, $\theta_i := x_i\partial_i$ が解の基底を与え，A 超幾何多項式が一意な多項式解であることを示すことができる．

注意 1. 式 (3) に与えた A の toric ideal I_A は有理正規曲線を定める．$n-k=3$ のときは，$I_A = \langle x_1x_4 - x_2x_3, x_1x_3 - x_2^2, x_2x_4 - x_3^2\rangle$ の零点集合である．

確率分布 (2) においてクラスタ数 k は母数 $v_{n,k}$ の完備十分統計量であり，母数 $v_{n,k}$ によらない条件付き分布

$$\mathbb{P}(S = s | \sum_{i=1}^{n} S_i = k) = \frac{1}{Z_A(b;x)} \frac{x^s}{s!} \tag{4}$$

を考えることには統計学的な意味がある．これは指数型分布族をなし，その Newton 多胞体 (台 (1) が定める格子点たちの凸包) の性質から次の結果を得ることができる．

定理 1. 確率分布 (4) において母数 x の最尤推定量は確率 1 で存在しない．

指数型分布属において母数が制約に従う曲指数型分布族については最尤推定量が存在することがあり，例 1 の Pitman 確率分割は一例である．その解析には Newton 多胞体の微分幾何 (情報幾何) が有用であり，例えば，最尤推定量の存在を議論することができる．数値計算にも有用であり，Fisher 計量は Pfaffian 系

$$\theta_i \bullet Q_{n,k} = P_{n,k}^{(i)} Q_{n,k}, \qquad i = 1, ..., n-k+1, \qquad Q_{n,k} := (1, \theta_3, ..., \theta_{n-k+1})^\top \bullet Z_A(b;x)$$

を用いて組み合わせの計算をすることなく数値的に求めることができ，holonomic 勾配法とよばれる (Nakayama et al. 2010)．ここで，Pfaffian $P_{n,k}^{(i)}$ は一般に Gröbner 基底を用いて求められるが，時間がかかる．しかし，Bell 多項式についてはほぼ陽な形を与えることができる．

謝辞

Holonomic 勾配法に関して高山信毅氏にコメントをいただいたことを感謝いたします．

参考文献

Vershik, A.M. (1996) Statistical mechanics of combinatorial partitions, and their limit shapes. *Funct. Anal. Appl.*, **30**, 90–105.

Pitman, J. (2006) *Combinatorial Stochastic Processes.* Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour, Lecture Notes in Math., Vol. 1875. Berlin: Springer.

Lijoi, A., and Prünster, I. (2010) Models beyond the Dirichlet process. In: Hjort et al. eds *Bayesian Nonparametrics*, Cambridge Universit Press.

Pitman, J., Yor, M. (1997) The two-parameter Poisson-Dirichlet distribution derived from a stable subordinator. *Ann. Probab.*, **25**, 855–900.

Mano, S. (2016) The A-hypergeometric system associated with the rational normal curve and exchangeable structures, arXiv:1607.03569.

Saito, M., Sturmfels, B., Takayama, N. (2010) *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations.* Berlin: Springer.

Gel'fand, I.M., Zelevinsky, A.V., Kapranov, M.M. (1989) Hypergeometric functions and total manifolds. *Funct. Anal. Appl.*, **23**, 94–106.

Nakayama, H., Nishiyama, K., Noro, M., Ohara, K., Sei, T., Takayama, N., Takemura, A. (2011) Holonomic gradient descent and its application to the Fisher-Bingham integral. *Adv. Appl. Math.*, **47**, 639658.